Università degli Studi di Parma

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica
Informatica e delle Telecomunicazioni

anno accademico 2014-2015

Fisica 1



Prof. Enrico Onofri,
titolare del corso

Prof. Emilia Liviotti,
esercitazioni

19 maggio 2015

COMPLEMENTI DI MECCANICA

Oscillazioni smorzate, oscillazioni forzate, risonanza, risonanza parametrica

Gettys Cap. ***14***

19 maggio 2015

Oscillazioni smorzate

Si tratta di calcolare la dinamica di una massa su cui agisce una forza elastica e in più l'attrito dinamico:l'equazione del moto è

$$m\,\ddot{x}(t) + \eta\,\dot{x}(t) + k\,x(t) = 0$$

m è la massa, k il modulo di elasticità della molla, η il coefficiente di attrito.
Come per ogni equazione differenziale lineare a coefficienti costanti la soluzione è da ricercarsi nella forma

$$x(t) = A\,\exp\{\alpha t\}$$

Una volta inserita questa espressione nell'equazione si trova subito

$$m\,\alpha^2 + \eta\,\alpha + k = 0$$

Si hanno tre casi da distinguere:

1. $\eta^2 - 4\,m\,k > 0$, $\alpha = (-\eta \pm (\eta^2 - 4\,m\,k)^{1/2})\ /2m \in R$

In questo primo caso l'attrito domina il movimento e il moto è smorzato senza oscillazioni (α è *reale*)

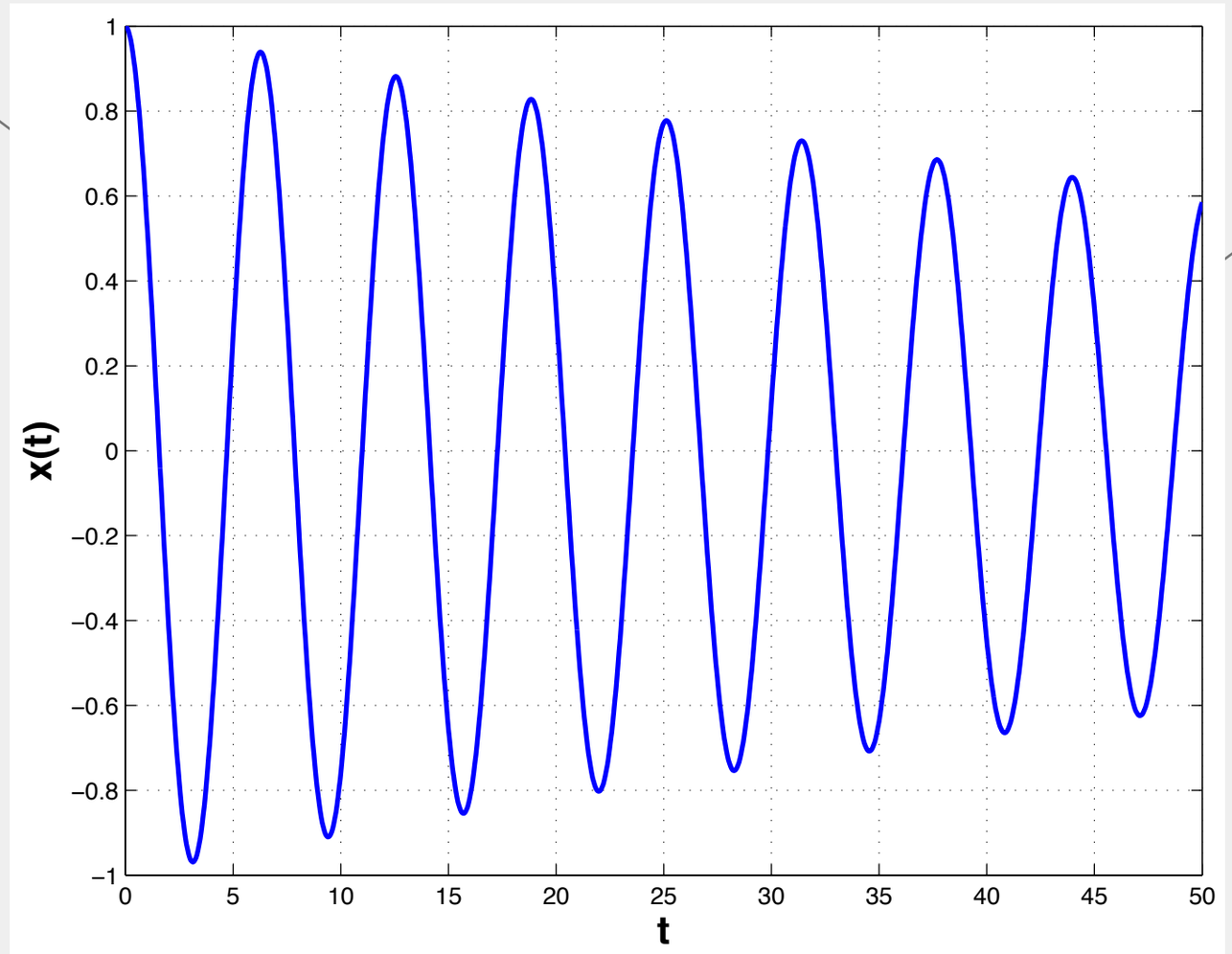
$$x(t) = A_1\,e^{-(\eta+\sqrt{\eta^2-4mk})t/2m} + A_2\,e^{-(\eta-\sqrt{\eta^2-4mk})t/2m}$$

2. $\eta^2 - 4\,m\,k < 0$, $\alpha = (-\eta \pm i(4\,m\,k - \eta^2)^{1/2})\ /2m$

In questo caso il moto è *oscillatorio smorzato*
(α è complesso)

$$x(t) = e^{-\eta\, t/2m}\, A\cos(\omega(t - t_0))$$

(dove $\omega = (k/m - \eta^2/4m^2)^{1/2}$)



3. η^2 = 4 m k . In questo caso la soluzione generale è

$$x(t) = A\ e^{-\eta t} + B\ t\ e^{-\eta t}$$

praticamente indistinguibile dal primo caso

Oscillazioni forzate

19 maggio 2015

Forse più interessante è il caso di *oscillazioni forzate*, dove l'oscillatore è mantenuto in moto da una forza esterna.La forma generale dell'equazione del moto è

$$m\,\ddot{x}(t) + \eta\,\dot{x}(t) + k\,x(t) = f(t)$$

Ora l'equazione è lineare a coefficienti costanti ma *inomogenea.* La soluzione generale è data da quella dell'equazione in assenza di *f(t)* a cui bisogna aggiungere una soluzione particolare dell'equazione inomogenea. Infatti se $x_1(t)$ e $x_2(t)$sono soluzioni, allora la loro differenza $x_1(t)-x_2(t)$ è soluzione dell'equazione omogenea

$$m\,\ddot{x}(t) + \eta\,\dot{x}(t) + k\,x(t) = 0$$

Dato che la soluzione di quest'ultima è già nota, dobbiamo chiederci come trovare una soluzione dell'equazione inomogenea.

Si dà il caso che esiste una regola assolutamente generale a questo scopo: siano $x_1(t)$ e $x_2(t)$ due soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione omogenea, di modo che *$A_1\ x_1(t) + A_2\ x_2(t)$* sia la soluzione generale dell'equazione omogenea. Allora l'espressione

$$x(t) = \int_0^t \frac{f(\tau)}{W(\tau)} \left(x_1(t)\, x_2(\tau) - x_2(t)\, x_1(\tau)\right)\, d\tau$$

fornisce una soluzione particolare della equazione inomogenea. *W* è chiamato il *Wronskiano* delle due soluzioni, e deve essere diverso da zero se $x_1(t)\, e\, x_2(t)$ sono davvero soluzioni linearmente indipendenti:

$$W(t) = x_1'(t)\, x_2(t) - x_1(t)\, x_2'(t)$$

I calcoli possono diventare impegnativi, ma ci si può fare aiutare da un computer (si veda nelle ultime pagine un codice "Mathematica").

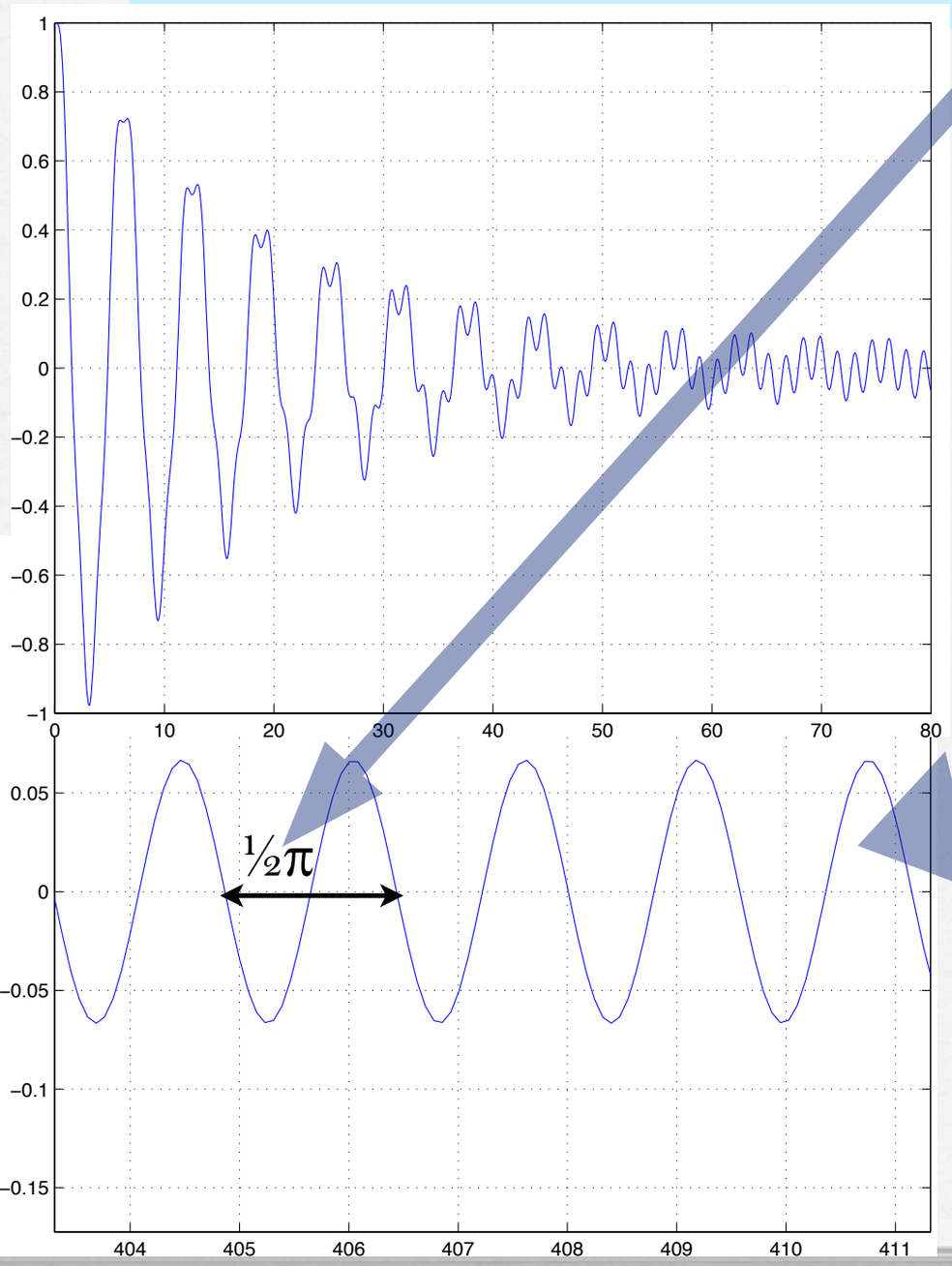
Nel caso in esame (coefficienti costanti) le soluzioni le abbiamo a pag.4. Il calcolo è semplice se la forza esterna ha la forma di una funzione armonica semplice con frequenza ω_0 non necessariamente coincidente con quella dell'oscillatore. Il risultato è descrivibile a parole: *la soluzione dell'equazione omogenea è smorzata quindi dopo un tempo $\propto 1/\eta$ diventa trascurabile; quella che sopravvive è la soluzione "forzata" che è proporzionale alla forza esterna:*

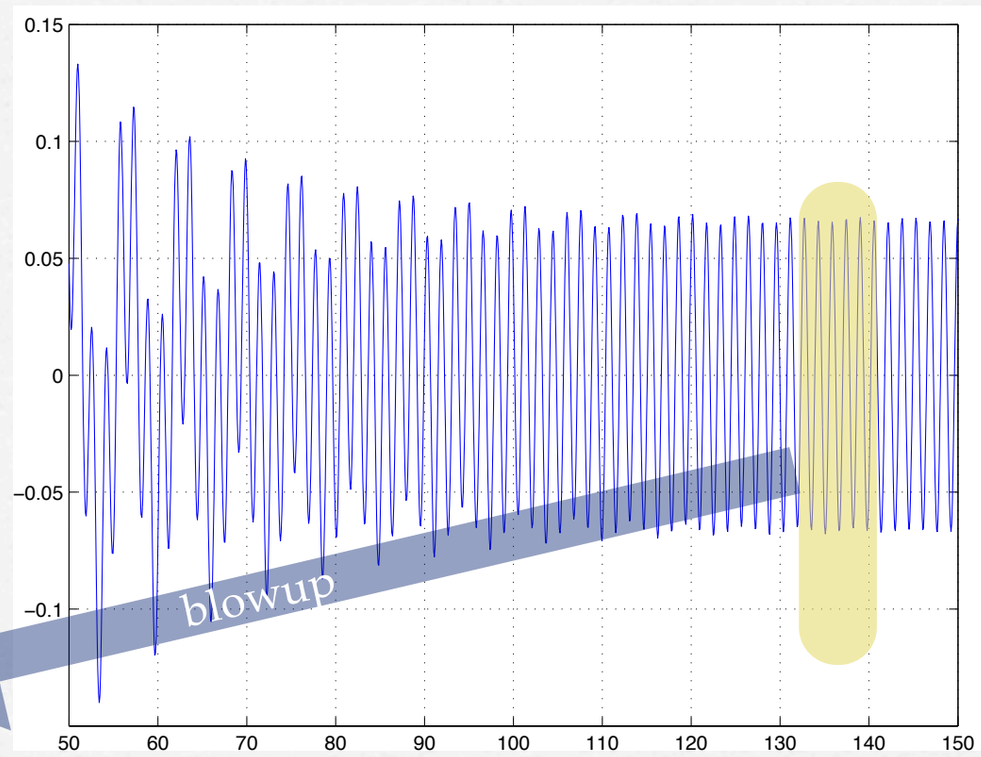
$$x(t) \propto f(t-t_0)$$

con un eventuale ritardo t_0.

Questo viene evidenziato facilmente con un calcolo numerico. Al di fuori di casi molto speciali questa è l'unica risorsa sempre disponibile!

Qui scegliamo $\eta=1/10$, $\omega=1$, $m=1$. La forza esterna è armonica con frequenza $\omega_0=4$. Si nota il transiente e l'instaurarsi di un moto periodico con frequenza ω_0





Per il calcolo analitico si procede cosí: assumiamo la soluzione della forma

$$x(t) = A\ sin(\omega t+\delta)$$

dove A e δ sono a disposizione per soddisfare l'equazione. Si trova la condizione

$$mA(-\omega^2)sin(\omega t+\delta)+A\eta\omega\ cos(\omega t+\delta)+ m\omega_0^2\ A\ sin(\omega t+\delta)= F\ sin(\omega t)$$

Ora esprimiamo tutto in termini di *sin(ωt) e cos(ωt) e troviamo due condizioni da cui ricavare A e δ. Il risultato è*

$$A = \frac{F}{\sqrt{m^2(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (\eta\omega)^2)}}$$

Da cui si conclude che tanto più la forza esterna ha frequenza vicina a quella naturale dell'oscillatore tanto più grande è l'ampiezza del moto che ne risulta. È chiaro poi che in condizioni di attrito debole le oscillazioni tendono a crescere moltissimo in condizioni di risonanza, cioè ω = ω0.

$$m\,\ddot{x}(t) + \eta\,\dot{x}(t) + k\,x(t) = f(t)$$

Il calcolo risulta più agile utilizzando le funzioni complesse: sia *f(t) = Re{F exp(i ω t)}* e cerchiamo *x(t)=Re{A exp(i ω t)}* con A complessa. Si trova

$$A = \frac{F}{-m\omega^2 + i\eta\omega + k}$$

e quindi

$$x(t) = \Re\{\frac{F\ \exp\{i\omega t\}}{-m\omega^2 + i\eta\omega + k}\}$$

Questo porta a uno sfasamento della soluzione rispetto al termine "forzante" f(t) (prendendo la parte reale si hanno contributi proporzionali a cos(ω t) e a sin(ω t)). In generale se si ha un'espressione del tipo *h(t) = a cos(ω t) + b sin(ω t)* questa si può sempre ricondurre a una sola funzione trigonometrica sfasata: poniamo

$$a = c\,\cos\alpha, b = c\,\sin\alpha \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2},\ \tan\alpha = b/a$$

Nel caso che ci interessa troviamo che lo sfasamento è dato da

$$\tan\alpha = \eta\,\omega/(k - m\,\omega^2)$$

e quindi lo spostamento si trova esattamente a un quarto di periodo di ritardo quando

$$\omega^2 = k/m$$

il che corrisponde anche alla massima ampiezza dell'oscillazione. Si dice allora che la forza esterna è in risonanza.

Studiamo il *doppio pendolo*, di cui abbiamo calcolato i modi normali di oscillazione nella 6ª lezione nel caso in cui venga applicata una forza periodica al primo pendolo.

È facile prevedere che se la frequenza della forza esterna è vicina a una delle due frequenze dei modi normali di oscillazione, il doppio pendolo verrà ad assumere un moto molto simile al corrispondente modo normale. In altri termini la forza esterna "eccita" uno dei modi normali se si trova in risonanza, ossia la sua frequenza differisca di poco da quella di uno dei modi normali.

Nel filmato: la frequenza coincide con quella del 2^0 modo, quello in cui i pendoli oscillano in opposizione di fase.

QuickTime Player File Edit View Window Help Rx: 0,0KB/s Tx: 0,0KB/s 23% U.S. Extended Sun 20 Apr 20:35 enrico.onofri

MATLAB R2014a

HOME PLOTS APPS FIGURE VIEW Search Documentation

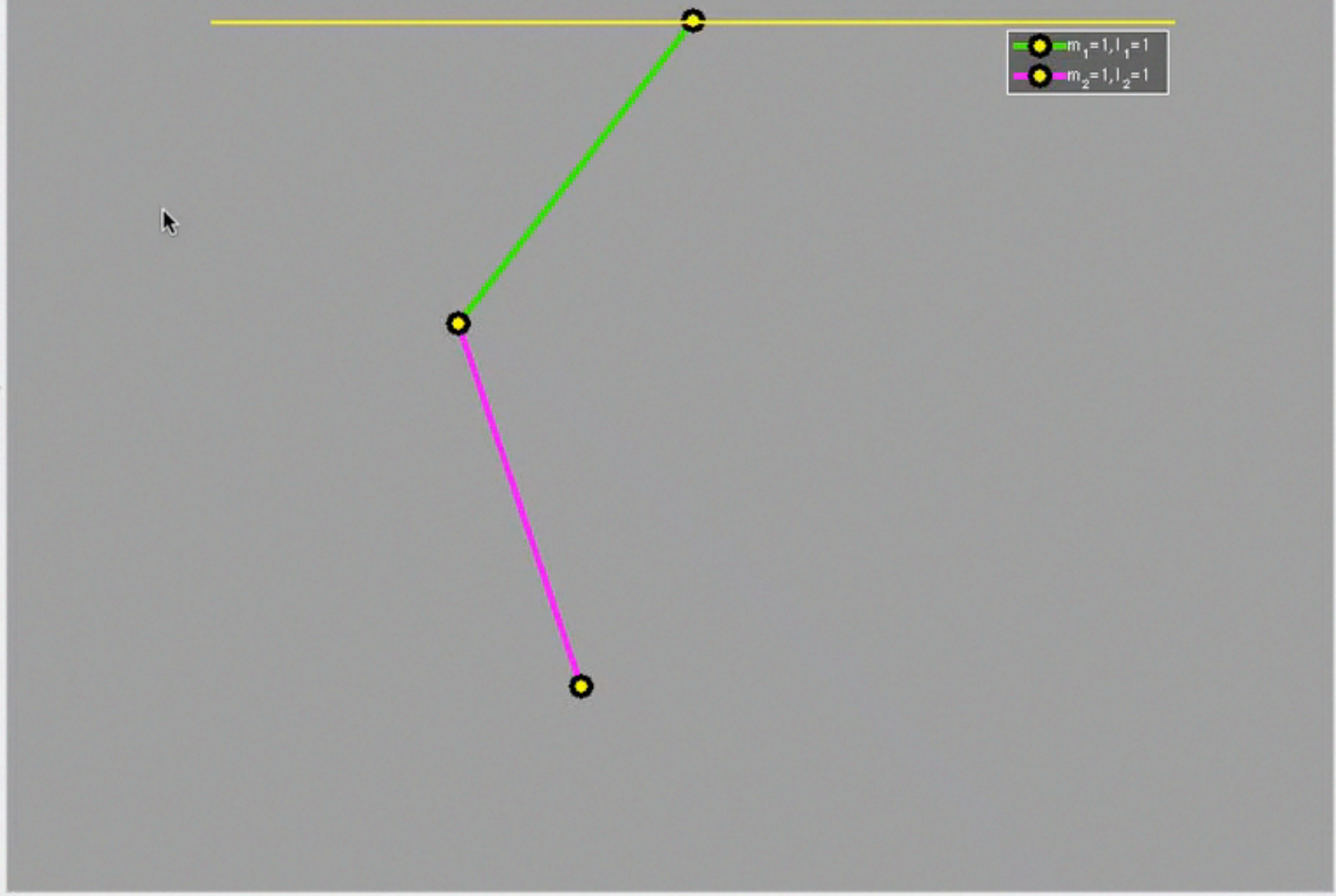
/ ▸ Users ▸ eonofri ▸ Lezioni ▸ 2014 ▸ Fis1-2014 ▸ Esercizi ▸ matlab ▸

Command Window

```
    T  = str2num(setup{1});
>> [t, theta, setup,theta0] = doppiopend_forzato
Om =
  -19.6000    9.8000
   19.6000  -19.6000
ans =
    2.3960
    5.7844
>> [t, theta, setup,theta0] = doppiopend_forzato
Om =
  -19.6000    9.8000
   19.6000  -19.6000
ans =
    2.3960
    5.7844
>> [t, theta, setup,theta0] = doppiopend_forzato
Om =
  -19.6000    9.8000
   19.6000  -19.6000
ans =
    2.3960
    5.7844
>> print -depsc forzato
>> print -depsc forzato-2
>> print -depsc forzato-2
>> clf
>> display_pend(theta(120000:10:end,:),setup)
>> display_pend(theta(0:10:10000,:),setup)
Subscript indices must either be real positive
integers or logicals.
>> display_pend(theta(1:10:10000,:),setup)
```

Figures – Figure 3

Figure 1 Figure 2 Figure 3



Busy

QuickTime Player File Edit View Window Help Rx: 0,0KB/s Tx: 0,0KB/s 24% U.S. Extended Sun 20 Apr 20:33 enrico.onofri

MATLAB R2014a

HOME PLOTS APPS FIGURE VIEW Search Documentation

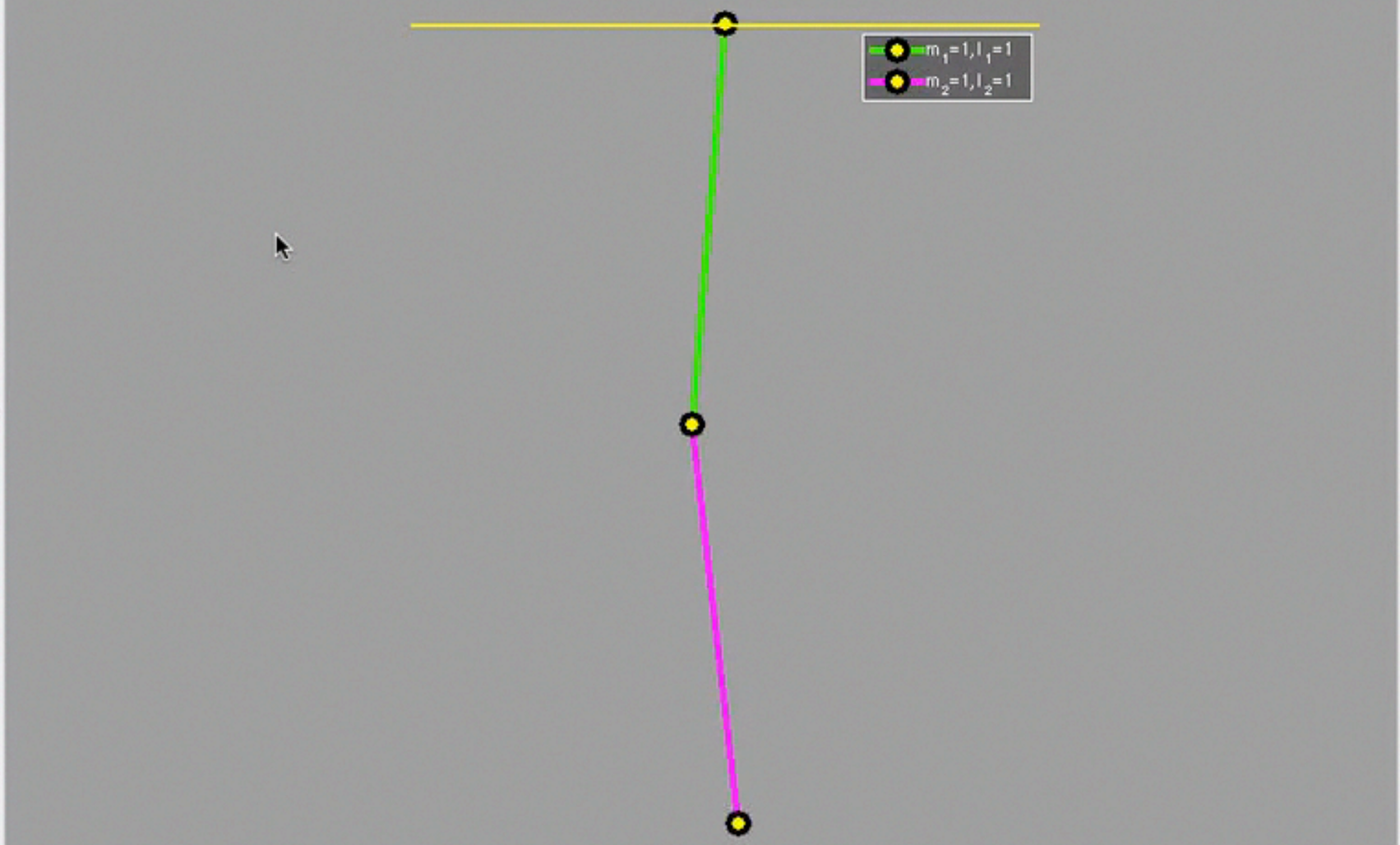
/ ▸ Users ▸ eonofri ▸ Lezioni ▸ 2014 ▸ Fis1-2014 ▸ Esercizi ▸ matlab ▸

Command Window

```
    5.7844
>> [t, theta, setup,theta0] = doppiopend_forzato
Index exceeds matrix dimensions.
Error in doppiopend_forzato (line 47)
   T  = str2num(setup{1});
>> [t, theta, setup,theta0] = doppiopend_forzato
Om =
  -19.6000    9.8000
   19.6000  -19.6000
ans =
    2.3960
    5.7844
>> [t, theta, setup,theta0] = doppiopend_forzato
Om =
  -19.6000    9.8000
   19.6000  -19.6000
ans =
    2.3960
    5.7844
>> [t, theta, setup,theta0] = doppiopend_forzato
Om =
  -19.6000    9.8000
   19.6000  -19.6000
ans =
    2.3960
    5.7844
>> print -depsc forzato
>> print -depsc forzato-2
>> print -depsc forzato-2
>> clf
>> display_pend(theta(120000:10:end,:),setup)
```

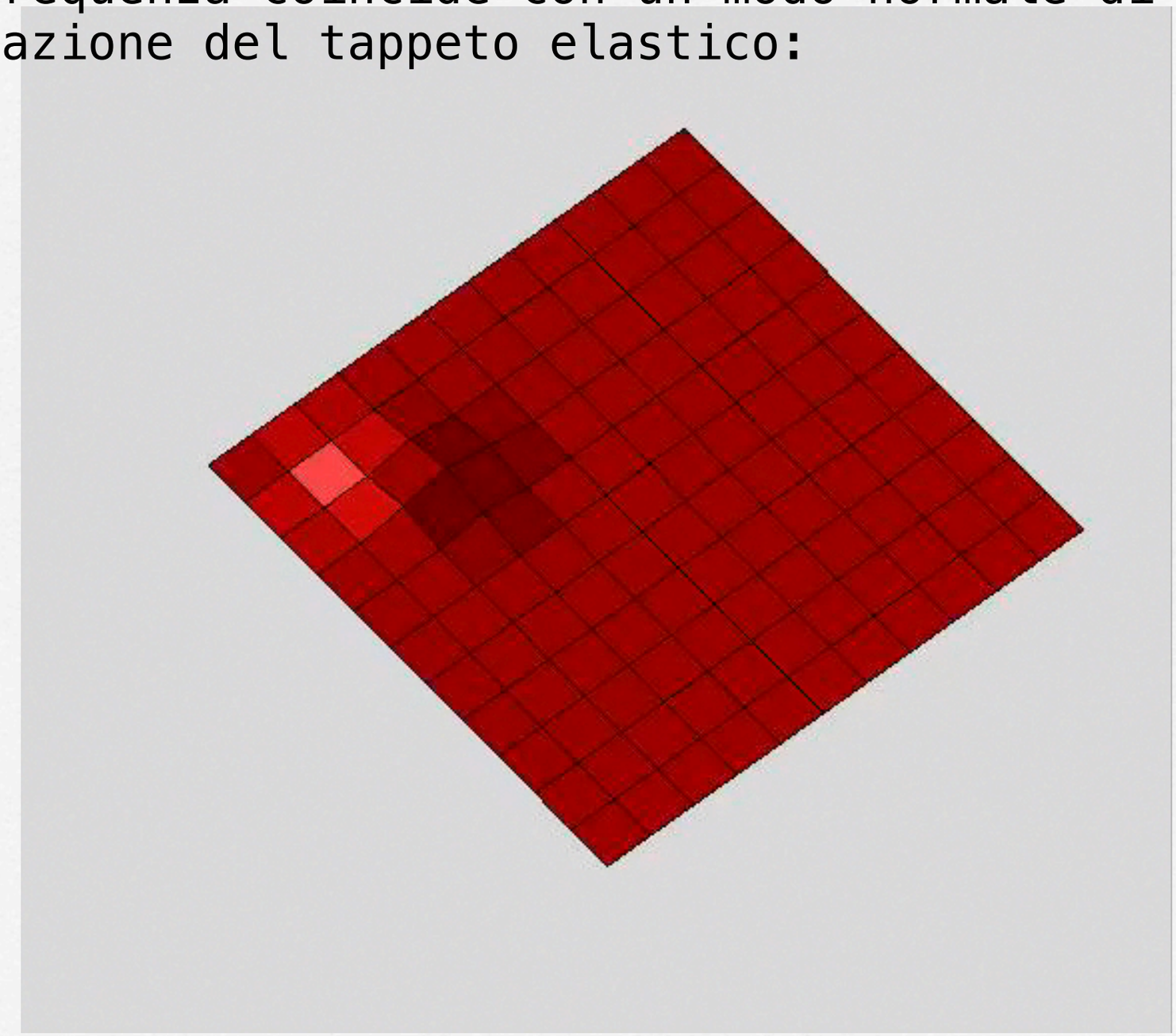
Figures – Figure 2

Figure 1 Figure 2

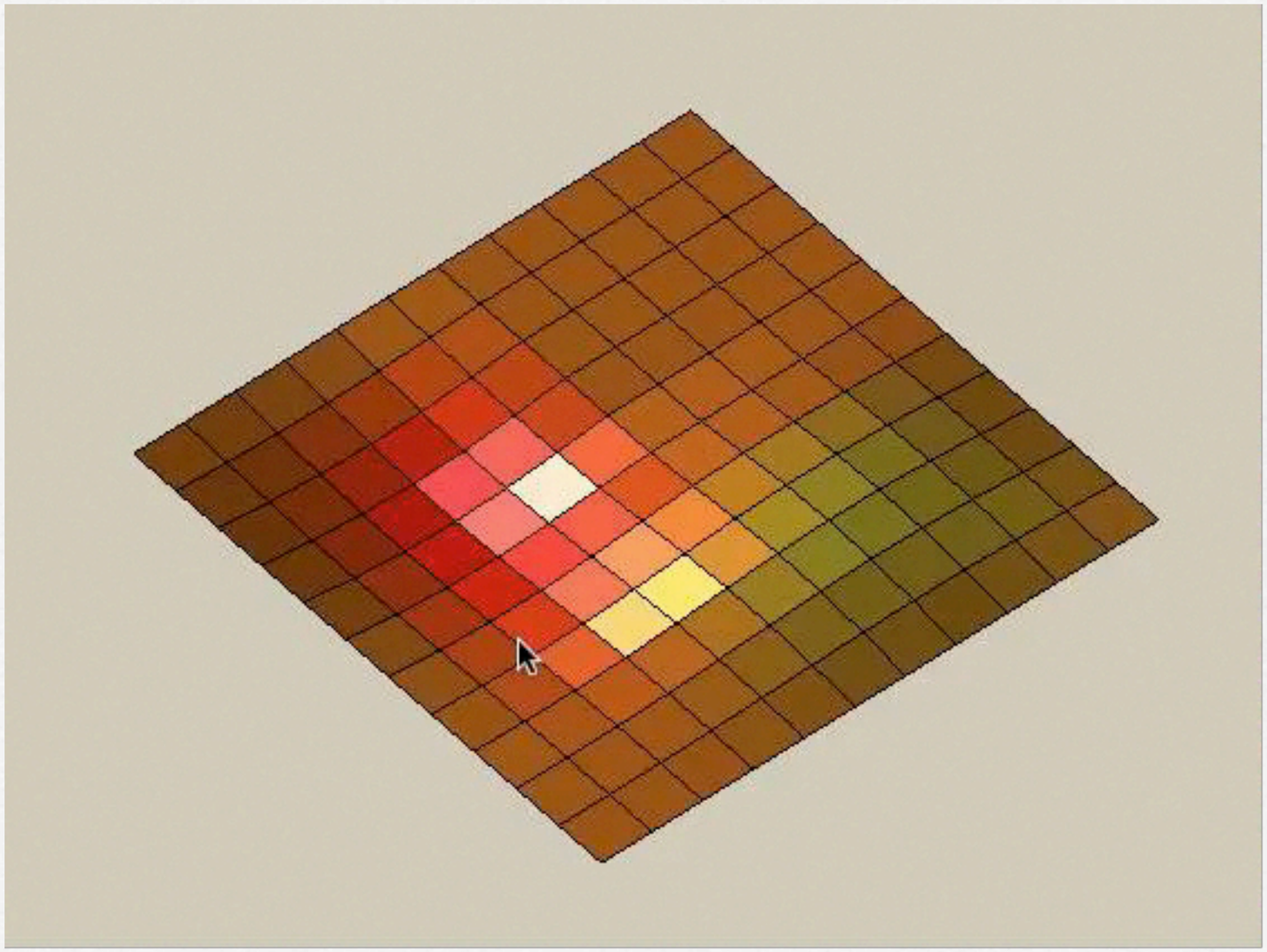


Busy

Un caso di risonanza per un tappeto elastico: c’e` una forza periodica applicata in alto a sinistra e la frequenza coincide con un modo normale di vibrazione del tappeto elastico:



Eccolo qua:

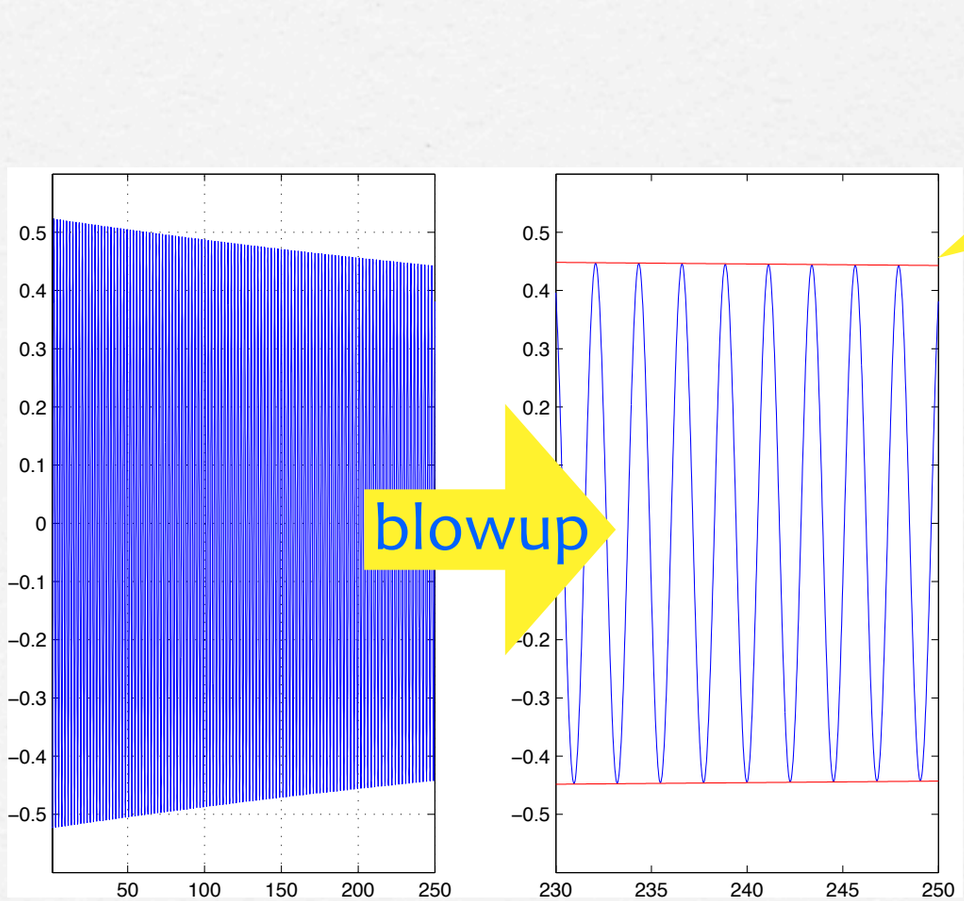


Ultimi argomenti di oggi:

- variazione lenta dei parametri
- risonanza parametrica
- fenomeni di sincronizzazione

Consideriamo il caso in cui in un sistema meccanico uno o più parametri cambino (lentamente) nel tempo. L'esempio più ovvio e studiato è quello di un pendolo la cui lunghezza varia nel tempo. In questo caso l'energia totale non è conservata nel tempo. Si veda la simulazione seguente ottenuta con matlab:

Su dropbox trovate il codice *pendolo_plot.m* con cui potete fare esperimenti. Se $l(t) = 1+\lambda t$ con λ piccola e positiva si trova il fenomeno seguente:



L'andamento $l(t)^{-3/4}$ non è riconoscibile immediatamente, ma ci si può aiutare utilizzando una scala logaritmica.

Il risultato si può interpretare alla luce della "approssimazione adiabatica" che prevede che il rapporto $E(t)/\omega(t)$ rimanga approssimativamente costante. Infatti dato che $\omega(t)=l(t)^{-1/2}$, $E \propto l(t)\ \vartheta_0^{\,2}$ *ne segue* $\vartheta_0 \propto l(t)^{-3/4}$ *come osservato*. Si osservi che il principio $E(t) \propto \omega(t)$ *permette di dedurre il corretto comportamento del pendolo senza risolvere alcuna equazione del moto!*

Risonanza parametrica

Il fenomeno consiste nell'amplificazione del moto periodico di un oscillatore in presenza di una variazione periodica di un parametro.

Un esempio familiare dall'infanzia (!) è quello dell'altalena. Senza spingersi sul terreno, ma semplicemente piegando il tronco e le gambe periodicamente un bambino è in grado di fare oscillare l'altalena. In modo più schematico possiamo considerare un pendolo con lunghezza variabile *l(t) con dipendenza periodica dal tempo*.

19 maggio 2015

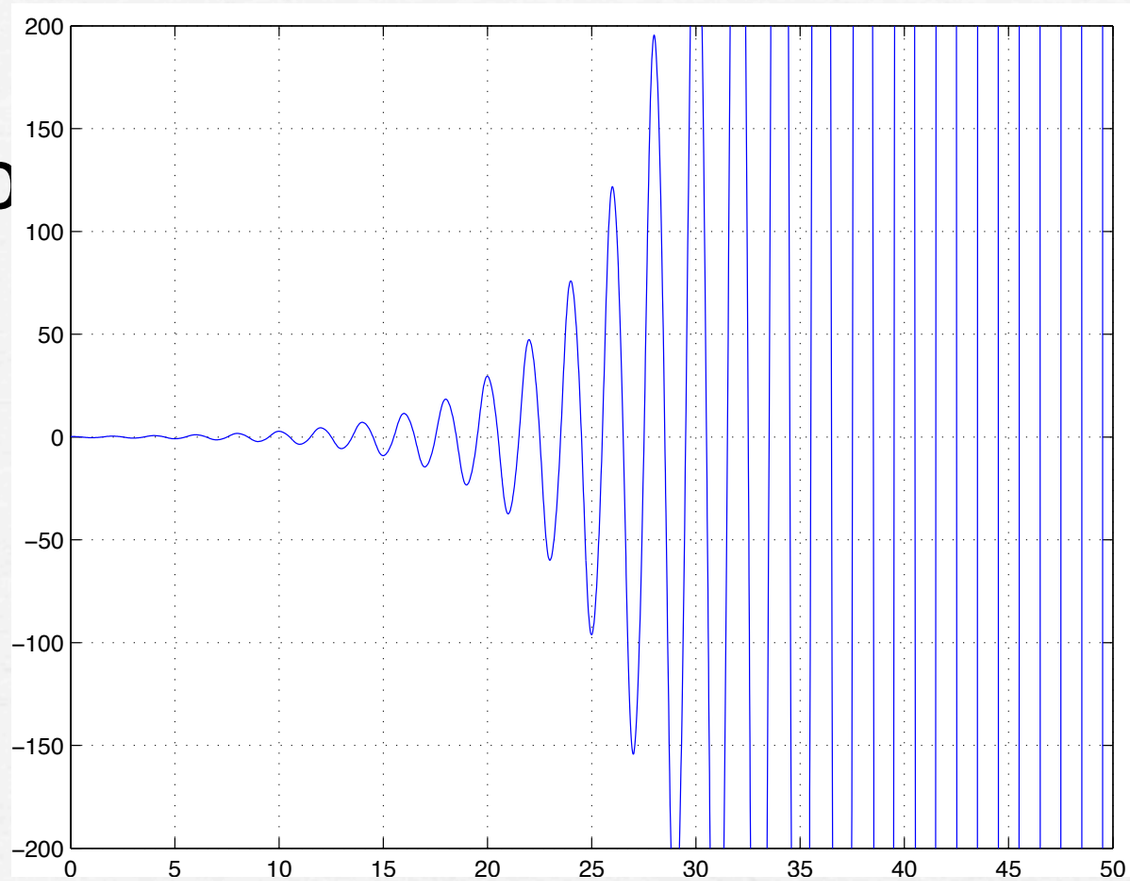
Nel caso di dipendenza periodica dal tempo della lunghezza del pendolo si trovano due regimi: uno *stabile* in cui il pendolo descrive oscillazioni periodiche e uno *instabile* in cui il pendolo, in assenza di attrito, tende ad aumentare l'ampiezza delle oscillazioni. La teoria è stata sviluppata alla fine dell'800 per risolvere problemi di meccanica celeste e trova ancora oggi applicazioni, ad es. in Fisica Quantistica. Per chi fosse curioso di apprendere i dettagli

☛ *Landau-Lifshitz, "Meccanica"*.

Questo esperimento numerico si riferisce all'equazione del pendolo con

$$l(t)=l(0)(1 + a \sin(\omega t))$$

e valori particolari dei parametri. Sul testo di LL si trova l'algoritmo per prevedere il regime di parametri in cui il sistema sviluppa instabilità. Prima o poi potrebbe venire utile...



$$x'' + 2\eta x' + \left(\omega^2 + \eta^2\right) x = f(t)$$

In[7]:=
```
DSolve[x''[t] + 2 η x'[t] + (ω^2 + η^2) x[t] == 0, x[t], t]
```
Out[7]=
$$\left\{\left\{x[t] \to e^{t(-\eta - i\omega)} C[1] + e^{t(-\eta + i\omega)} C[2]\right\}\right\}$$

In[40]:=
```
DSolve[x''[t] + 2 η x'[t] + (ω^2 + η^2) x[t] == Cos[Ω t], x[t], t]
```
Out[40]=
$$\left\{\left\{x[t] \to e^{t(-\eta - i\omega)} C[1] + e^{t(-\eta + i\omega)} C[2] + \left(\eta^2 \cos[t\Omega] + \omega^2 \cos[t\Omega] - \Omega^2 \cos[t\Omega] + 2\eta\Omega \sin[t\Omega]\right) \Big/ \left(\left(\eta^2 - 2i\eta\omega - \omega^2 + \Omega^2\right)\left(\eta^2 + 2i\eta\omega - \omega^2 + \Omega^2\right)\right)\right\}\right\}$$

Soluzioni dell' equazione omogenea

In[8]:=
```
x1[t_] = e^(-η t + I ω t); x2[t_] = e^(-η t - I ω t);
```

Wronskiano

In[9]:=
```
W[t_] = x1'[t] x2[t] - x1[t] x2'[t] // Simplify
```
Out[9]=
$$2i e^{-2t\eta}\omega$$

In[]:=
```
X[t_] = Simplify[
  Integrate[Cos[Ω τ] / W[τ] (x1[t] x2[τ] - x2[t] x1[τ]), {τ, 0, t}]]
```
Out[10]=
$$-\frac{1}{2\omega} i \left(\left(-e^{-t(\eta - i\omega)}(\eta - i\omega) + (\eta - i\omega)\cos[t\Omega] + \Omega \sin[t\Omega]\right) \Big/ \left((\eta - i\omega)^2 + \Omega^2\right) - \left(-e^{-t(\eta + i\omega)}(\eta + i\omega) + (\eta + i\omega)\cos[t\Omega] + \Omega \sin[t\Omega]\right) \Big/ \left((\eta + i\omega)^2 + \Omega^2\right)\right)$$

In[41]:=
$$-\frac{1}{2\omega} i \left(\frac{-0(\eta - i\omega) + (\eta - i\omega)\cos[t\Omega] + \Omega \sin[t\Omega]}{(\eta - i\omega)^2 + \Omega^2} - \frac{0(\eta + i\omega) + (\eta + i\omega)\cos[t\Omega] + \Omega \sin[t\Omega]}{(\eta + i\omega)^2 + \Omega^2}\right);$$

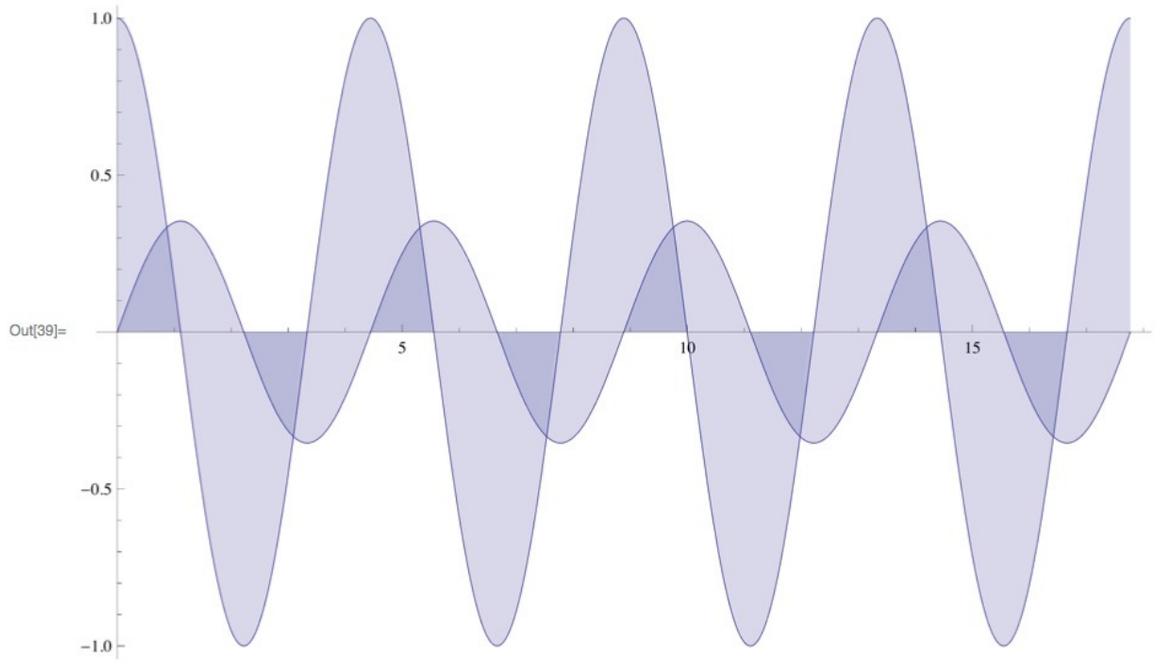
In[16]:=
```
Y[t_] = Simplify[%]
```
Out[16]=
$$\frac{\left(\eta^2 + \omega^2 - \Omega^2\right)\cos[t\Omega] + 2\eta\Omega \sin[t\Omega]}{\eta^4 + \left(\omega^2 - \Omega^2\right)^2 + 2\eta^2\left(\omega^2 + \Omega^2\right)}$$

Soluzione :

$$X(t) = \left(\left(\eta^2 + \omega^2 - \Omega^2\right)\cos[t\Omega] + 2\eta\Omega \sin[t\Omega]\right) \Big/ \left(\left(\Omega^2 + \eta^2 - \omega^2\right)^2 + 4\eta^2\omega^2\right)$$

Quando $\Omega^2 = \eta^2 + \omega^2$, cioe` coincide con la frequenza di oscillazione in assenza della forza esterna, il moto e` sfasato di $\pi / 4$ rispetto a f (t)

In[39]:=
```
Plot[{Cos[Ω t], Y[t]} /. {ω → 1, η → 1, Ω → √2}, {t, 0, 8 π / √2}, Filling → Axis]
```
Out[39]=



Questioni di oscillazioni forzate e risonanze di vario tipo sono centrali nella progettazione di opere pubbliche. Non auguro a nessuno di voi a trovarsi nella situazione di contemplare il proprio ponte comportarsi cosí:



非線形問題解決集団
池口研究室
NONLINEAR DYNAMICAL SYSTEM

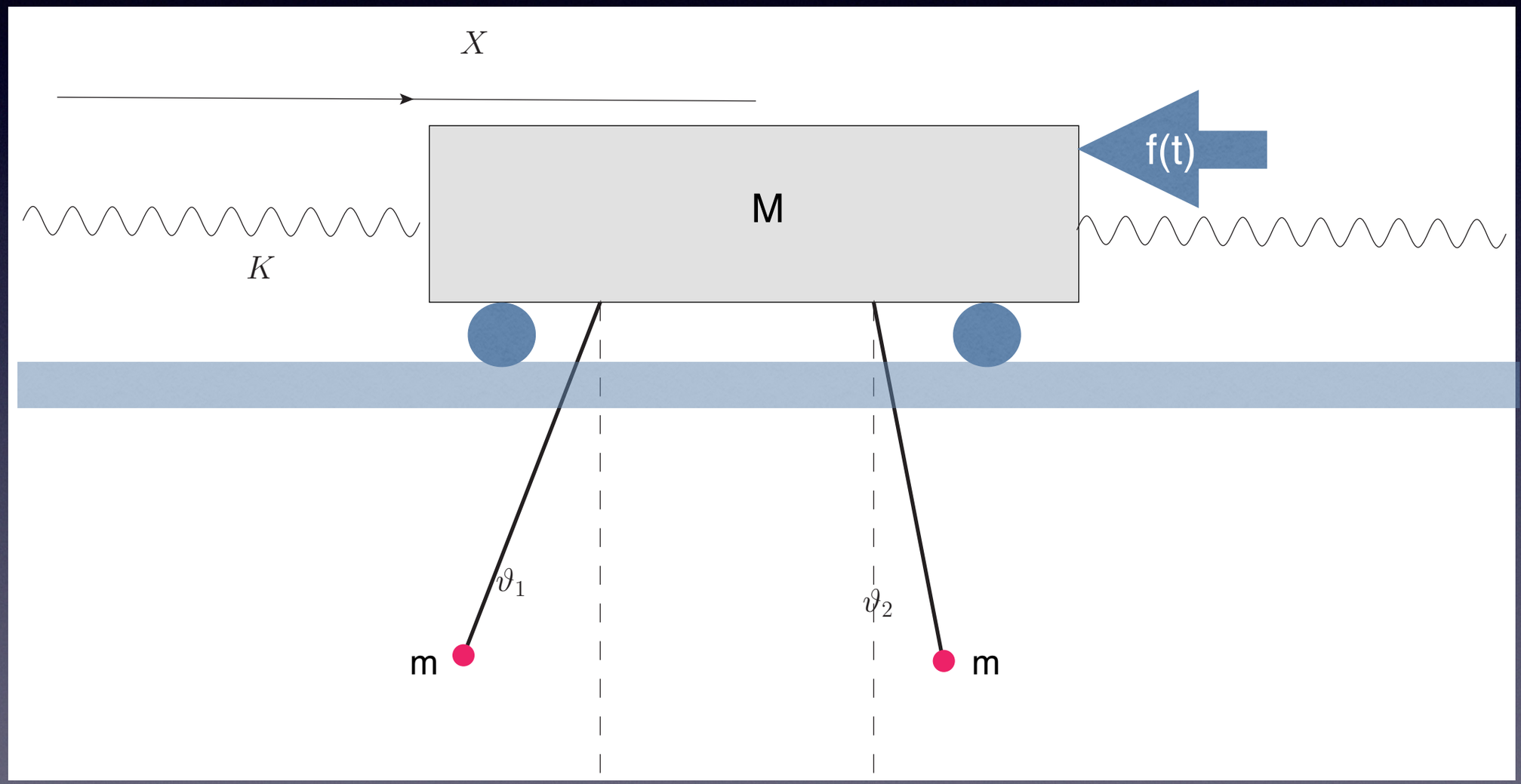
メトロノーム同期 (32個)

Synchronization of thirty two metronomes

2012年09月14日，池口研究室前廊下にて撮影

Filmed at Ikeguchi Laboratory, on September 14, 2012.

- Un modello ultra-semplificato:

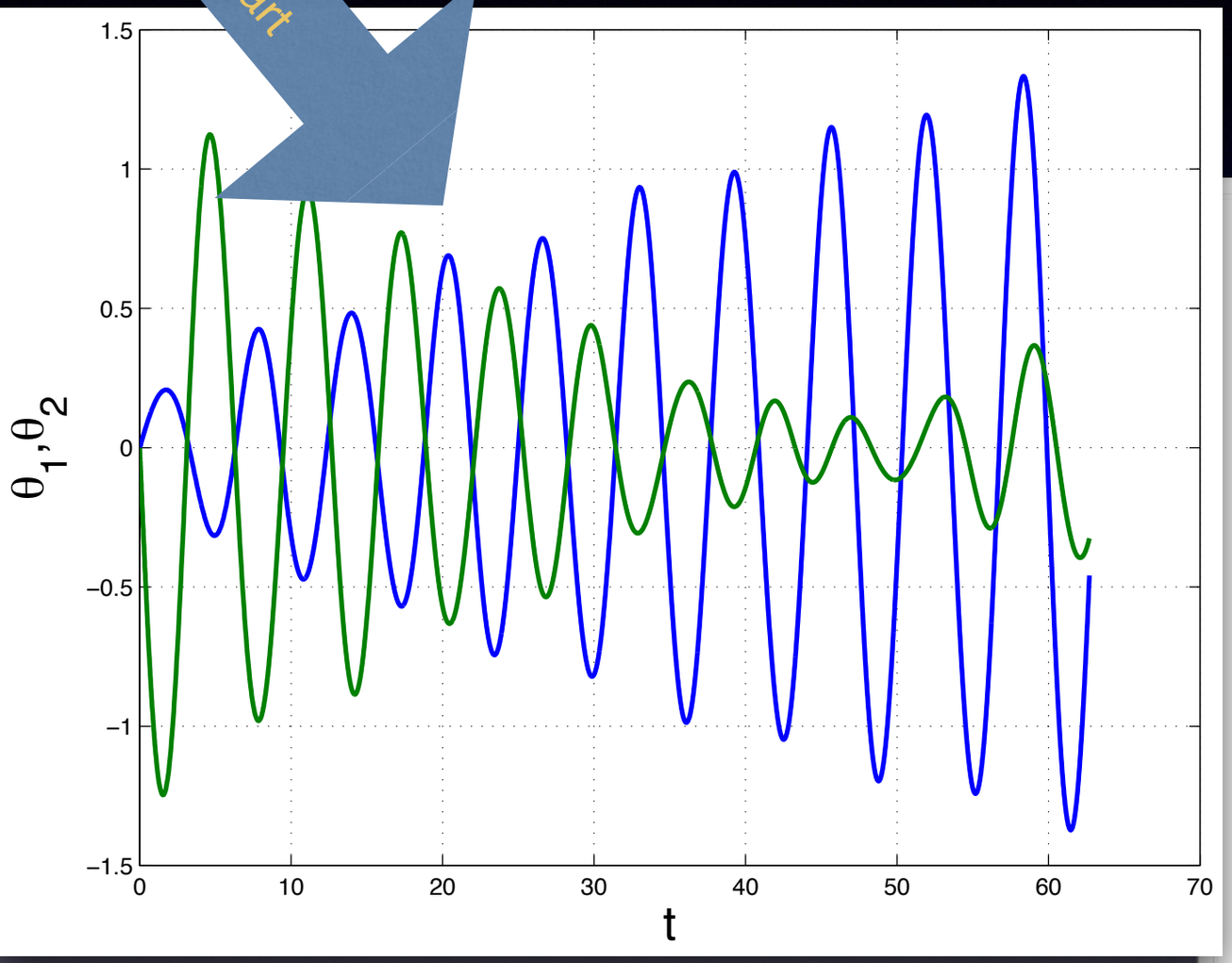


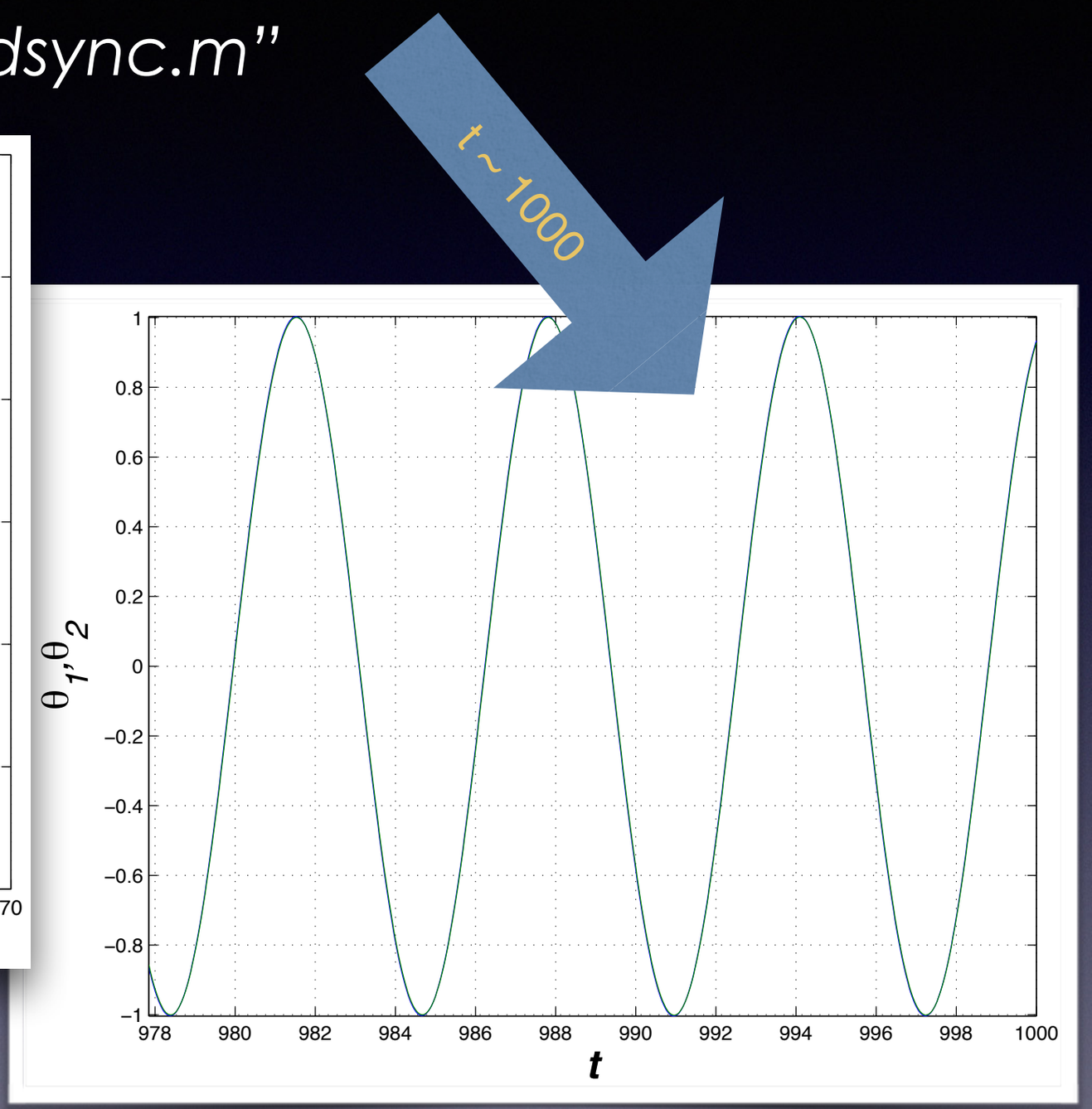
- Le equazioni del moto:

$$\ddot{X} = f(t) + \left(-2K\,X + gm(\vartheta_1 + \vartheta_2)\right)/(M - 2m)$$
$$\ddot{\vartheta}_1 = -\frac{g}{\ell}\,\vartheta_1 - \ddot{X}/\ell - \eta\,\dot{\vartheta}_1$$
$$\ddot{\vartheta}_2 = -\frac{g}{\ell}\,\vartheta_2 - \ddot{X}/\ell - \eta\,\dot{\vartheta}_2$$

Sotto l’azione della forza di eccitazione f(t) e dell’attrito dinami
i due pendoli sono debolmente accoppiati attraverso il sostegno
Si fanno partire i pendoli a caso impartendo una velocità casua
Dopo un tempo che varia a seconda dei parametri in gioco i pendoli tendono a oscillare in fase, come i metronomi dell’esperimento giapponese!

- Questi dati sono ottenibili con il codice matlab "*doppiopendsync.m*"





Libri di testo per l'argomento
"oscillazioni elastiche"

- Gettys: Cap.14
- Serway-Jewett: Parte 2, Cap.15
- Focardi: Cap. 5.10
- Mazzoldi: Cap. 9

FINE

della XII lezione

Prossima lezione giovedì
21 maggio
ore 10:30