Università degli Studi di Parma

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica, Elettronica e delle Telecomunicazioni

a. a. 2014-2015

Fisica 1

Prof. Enrico Onofri,
titolare del corso

Dr. Emilia Liviotti,
esercitazioni

4 giugno 2015

La descrizione fisico-matematica del moto dei fluidi

Quali sono le “coordinate” da utilizzare per descrivere la cinematica/dinamica dei fluidi?

Non è pensabile seguire il movimento di tutte le molecole che compongono un fluido $O(10^{23})$. Si è imparato nel corso dello sviluppo della teoria e degli esperimenti a individuare la grandezza più rilevante adatta a descrivere il comportamento di un fluido perfetto:

il campo di velocità

In ogni punto dello spazio dove è presente il fluido si assegna il valore $v(x,y,z,t)$ della velocità della particella di fluido che al tempo t si trova nel punto generico (x,y,z).

Ciò significa che $v(x,y,z,t)$ *si riferisce istante per istante a particelle differenti del liquido.* In particolare anche se v non dipende dal tempo questo non implica che l'accelerazione delle particelle del fluido sia zero! Oltre a $v(x,y,z,t)$ le grandezze rilevanti che entrano nella descrizione del fluido sono la densità ρ e la pressione p.

Cosí come la meccanica del punto e dei sistemi di punti materiali è basata sulle equazioni di Newton che prendono la forma matematica di equazioni differenziali in cui le incognite sono le coordinate $\{x_\alpha(t), y_\alpha(t), z_\alpha(t)\}$ in funzione del tempo, nella “fluidodinamica“ le equazioni dinamiche sono equazioni differenziali in cui entrano però 4 variabili indipendenti. Si tratta di *equazioni alle derivate parziali.*

Questo fatto accomuna la fluidodinamica alla teoria dell'elettromagnetismo e quindi risulta conveniente affrontare il formalismo matematico nel contesto dei fluidi che risultano essere più intuitivi rispetto ai campi elettromagnetici (☛ *Fisica2*). Un primo risultato importante è costituito dal

TEOREMA DI GAUSS

Il teorema della divergenza di Gauss

Sia V una porzione di spazio contornata da una superficie S, ad es. V = sfera di raggio R e S = superficie sferica, V = cubo di spigolo L, S = unione delle sei facce quadrate di lato L, etc.

Consideriamo ora un campo vettoriale v definito all'interno di V, tipicamente il campo di velocità di un fluido. Il ***flusso*** di ***v attraverso*** S è definito dall'integrale di superficie

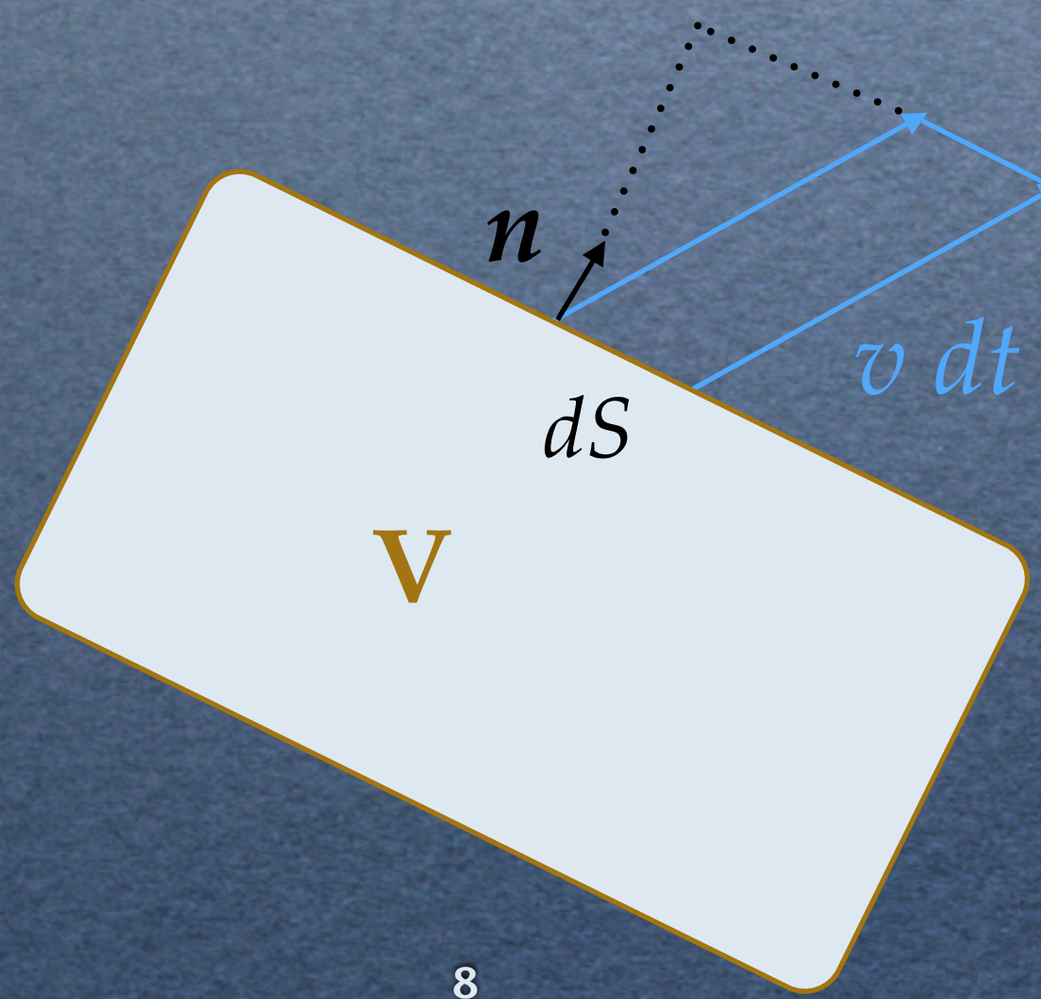
$$\Phi_S(\vec{v}) = \oiint \vec{v} \cdot \hat{n}\, dS$$

Se v è il campo di velocità di un fluido, il flusso rappresenta la quantità di fluido che esce dalla superficie, per densità uguale a uno.

Significato del “flusso”

$$v \cdot n \; dt \; dS$$

rappresenta il volume di fluido che attraversa la superficie
tempo dt attraverso la porzione di superficie dS.



In generale, detta ρ la densità, si ha

$$\frac{d}{dt}\iiint \rho\, dV = -\oiint \rho\, \vec{v}\cdot\hat{n}\, dS$$

che esprime matematicamente l'affermazione secondo cui ***la variazione nel tempo della massa di fluido all'interno di V coincide con l'afflusso di fluido dall'esterno***. Qui il versore n è ortogonale alla superficie e diretto verso l'esterno, quindi un flusso positivo rappresenta una diminuzione della massa all'interno di V, da cui il segno "-".

Ora, il teorema di Gauss afferma che

$$\oiint \rho\, \vec{v}\cdot\hat{n}\, dS = \iiint \nabla\cdot(\rho\,\vec{v})\, dV$$

La definizione di $\nabla \cdot \vec{f}$ è la seguente

$$\nabla \cdot \vec{f} = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z}$$

e viene denominata la "*divergenza*" del campo *f*. Dato che il volume V è arbitrario, possiamo considerare il caso in cui V è un volumetto infinitesimo attorno al punto x: il teorema di Gauss ci dice allora che

$$\frac{d}{dt} \iiint \rho \, dV = \iiint \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dV = - \iiint \nabla \cdot (\rho \, \vec{v}) \, dV$$

e infine

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \, \vec{v}) = 0$$

nota come "equazione di continuità".

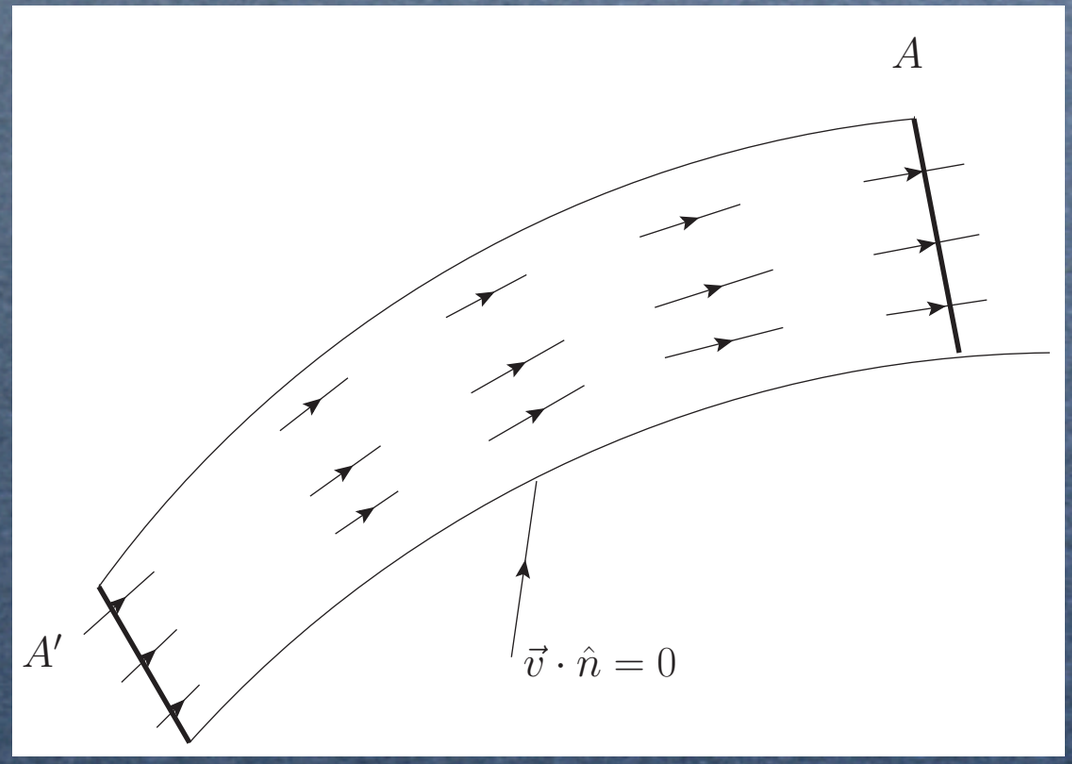
Consideriamo un liquido perfetto, con ρ costante (liquido incomprimibile). L'equazione di continuità afferma che $\nabla \cdot (\rho \vec{v}) = \rho \nabla \cdot \vec{v} = 0$ **e il teorema di Gauss ci permette di concludere che**

$$\iint \rho \vec{v} \cdot \hat{n} \, dS = 0$$

Se prendiamo un liquido che fluisce all'interno di un tubo di sezione variabile, concludiamo che il prodotto

$v\,A$ è *costante dove* A è l'area della superficie ortogonale al flusso del fluido e la velocità è costante su A. *Questa è una proprietà puramente "cinematica" cioè non dipende dalla legge di Newton.*

L’argomento è semplice: la velocità è ortogonale al vettore normale sulle pareti del condotto, e quindi il flusso prende contributi solo dalle due estremità A e A’. Dal momento che il flusso è nullo il contributo in A deve uguagliare in modulo quello in A’:



La dinamica entra quando consideriamo l'effetto combinato di pressione e gravità. Iniziamo con la statica per un liquido di densità ρ in quiete all'interno di un contenitore e soggetto alla gravità. La forza totale esercitata dalla pressione è data da

$$\vec{F} = -\oiint p\,\hat{n}\,dS$$

infatti la pressione esercita una forza ***p dS*** in direzione normale alla superficie (verso l'interno).

Possiamo utilizzare il teorema di Gauss per trasformare l'integrale in una forma utile. Si ha ad es. per F_x

$$F_x = -\oiint p\,\hat{n}_x\,dS = -\oiint (p,0,0)\cdot\hat{n}\,dS =$$
$$-\iiint \nabla\cdot(p,0,0)\,dV = -\iiint \frac{\partial p}{\partial x}\,dV$$

e quindi in generale

$$\vec{F} = -\oiint p\,\hat{n}\,dS = -\iiint \nabla p\,dV$$

ossia *l'effetto della pressione che agisce sulla superficie del liquido equivale a una forza pari al gradiente della pressione che agisce su ogni porzione dV del fluido*. Nel caso statico, questa forza deve equilibrare il peso e di conseguenza

$$\nabla p = \rho\,\vec{g}$$

dove g è l'accelerazione di gravità. Questa relazione ci dice che la pressione nel liquido aumenta con la profondità secondo la relazione $dp/dz = -\rho\,g$ (per l'acqua questo corrisponde a una atmosfera ogni *dieci* metri circa: $10^3\,Kg/m^3 \times 9.81\,m/s^2 \times 10\,m \approx 10^5\,Pa$). Si può anche calcolare $0.76\,m \times 13.6 \approx 10\,m$ (perchè ?).

La legge del moto (Euler)

Consideriamo ora una qualunque porzione di liquido in moto, caratterizzato da un campo di velocità punto per punto $v(x,y,z,t)$. Per questa massa deve valere la legge di Newton. Dobbiamo valutare la variazione nel tempo del momento lineare

$$P = \iiint_V \rho \, \vec{v}(x,y,z,t) \, dx \, dy \, dz$$

Dobbiamo però tenere in conto il fatto che il volume V si sposta nel corso del movimento (si immagina di seguire tutte le particelle che costituiscono il fluido, inizialmente contenute in V).

Il momento lineare varia per due motivi: c'è la variazione punto per punto della velocità, dunque il primo contributo della variazione del momento lineare è dato da

$$\rho dV \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$$

per ogni elemento dV di liquido. In secondo luogo c'è il contributo che viene dalla superficie:



per ogni elemento di superficie dS c'è una variazione di momento lineare aggiuntiva $(\rho\, v.n\, dt\, dS)\, v$ dovuto al fatto che la porzione di liquido si sposta rispetto a V.

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \oiint \rho\vec{v}(\vec{v}\cdot\hat{n})\,dS$$

Trasformiamo questo secondo contributo con Gauss: la componente *x* è *data da*

$$\frac{dp_x}{dt} = \oiint \rho v_x(\vec{v}\cdot\hat{n})\,dS$$

$$= \iiint dV\,\rho\nabla\cdot(v_x\,\vec{v})$$

Utilizziamo l'identità $\nabla\cdot(f\,\vec{v}) = \nabla f\cdot\vec{v} + f\nabla\cdot v$

per $f{=}v_x$ e teniamo conto che *ρ è costante e v ha divergenza zero*. Segue

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \iiint \rho\,dV\,\vec{v}\cdot\nabla\,\vec{v}$$

Mettendo tutto insieme si trova per la variazione complessiva del momento lineare

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \iiint \rho \, dV \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \right)$$

L'equazione di Newton ci dice di uguagliare questa grandezza alla forza totale che agisce sul liquido, la forza di pressione e quella di gravità. Dato che V è arbitrario possiamo semplicemente identificare le funzioni sotto segno di integrale e alla fine otteniamo l'*equazione di Euler*:

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \right) = -\nabla p + \rho \vec{g}$$

L’equazione è non-lineare e questo rende il compito di risolvere l’equazione del moto per il liquidi ben più ardua di quello dei sistemi di punti. Ma d’altronde stiamo affrontando il problema del moto per un numero infinito di punti materiali – non dovrebbe sorprendere che incontriamo difficoltà! C’è uno sviluppo ulteriore che permette di trattare il caso di un flusso stazionario in termini semplici. Si parte dall’identità

$$\frac{1}{2}\nabla v^2 = \vec{v} \wedge \mathrm{rot}\, \vec{v} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}$$

Il significato di “rot” è dato dalle relazioni

$$\mathrm{rot}\vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \end{pmatrix} \Longrightarrow \boldsymbol{rot\, v = 0} \text{ se e solo se } v = grad\, \phi$$

Il teorema di Stokes

Il significato del "rotore" è chiarito da un secondo teorema fondamentale della Fisica-Matematica (Stokes). Consideriamo una curva chiusa e calcoliamo la "circuitazione" del campo vettoriale v:

$$\oint v \cdot dx$$

La circuitazione è diversa da zero se il campo vettoriale è orientato prevalentemente nella direzione del vettore tangente alla curva. Nel caso che v sia dato dal gradiente di una funzione $f(x)$ la sua circuitazione è zero. Se il campo vettoriale rappresenta un campo di forze la circuitazione misura ***il lavoro eseguito dal campo quando il punto di applicazione della forza descrive una curva chiusa***. Dunque circuitazione nulla equivale alla affermazione che il campo di forze è conservativo.

Il teorema di Stokes ci permette di legare il concetto di campo conservativo a quello di campo a rotore nullo:

$$\oint v \cdot dx = \iint rot\ v\ dS$$

dove l'integrale di destra va calcolato su una superficie che abbia la curva chiusa come contorno. *Rotore nullo* è quindi equivalente a "campo conservativo". Per il campo di velocità questo concetto viene denominato *"moto laminare del fluido"*

Se *rot v = 0* il moto del liquido si dice "laminare". In pratica non sono presenti vortici(si veda la Lez.5 a pag. 24 per il ruolo del rotore per definire un campo di forze conservativo).

Ne segue inserendo questo risultato nell'equazione di Euler:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \vec{v} \wedge \mathrm{rot}\, \vec{v} + \tfrac{1}{2} \nabla v^2 = -\nabla p/\rho - g \nabla z$$

Ora, se 1) *il flusso è stazionario*, cioè la velocità in ogni punto non cambia nel tempo e se 2) *il flusso è laminare, ossia rot v=0*, allora l'equazione di semplifica enormemente e raggiungiamo l'equazione di Bernoulli!

$$\nabla\left(\tfrac{1}{2}v^2 + p/\rho + gz\right) = 0$$

D.Bernoulli

ossia

$$\tfrac{1}{2}v^2 + p/\rho + gz = \text{costante}$$

Questa relazione è piena di informazioni sulla dipendenza reciproca di quota (z), pressione (p) e velocità (v) avendo presente anche il fatto che la velocità risulta, per l'equazione di continuità, inversamente proporzionale all'area del condotto. I dettagli su casi particolari li trovate sul libro di testo.

DANIELIS BERNOULLI Joh. Fil.
Med. Prof. Basil.
ACAD. SCIENT. IMPER. PETROPOLITANÆ, PRIUS MATHESEOS SUBLIMIORIS PROF. ORD. NUNC MEMBRI ET PROF. HONOR.

HYDRODYNAMICA,

SIVE

DE VIRIBUS ET MOTIBUS FLUIDORUM COMMENTARII.

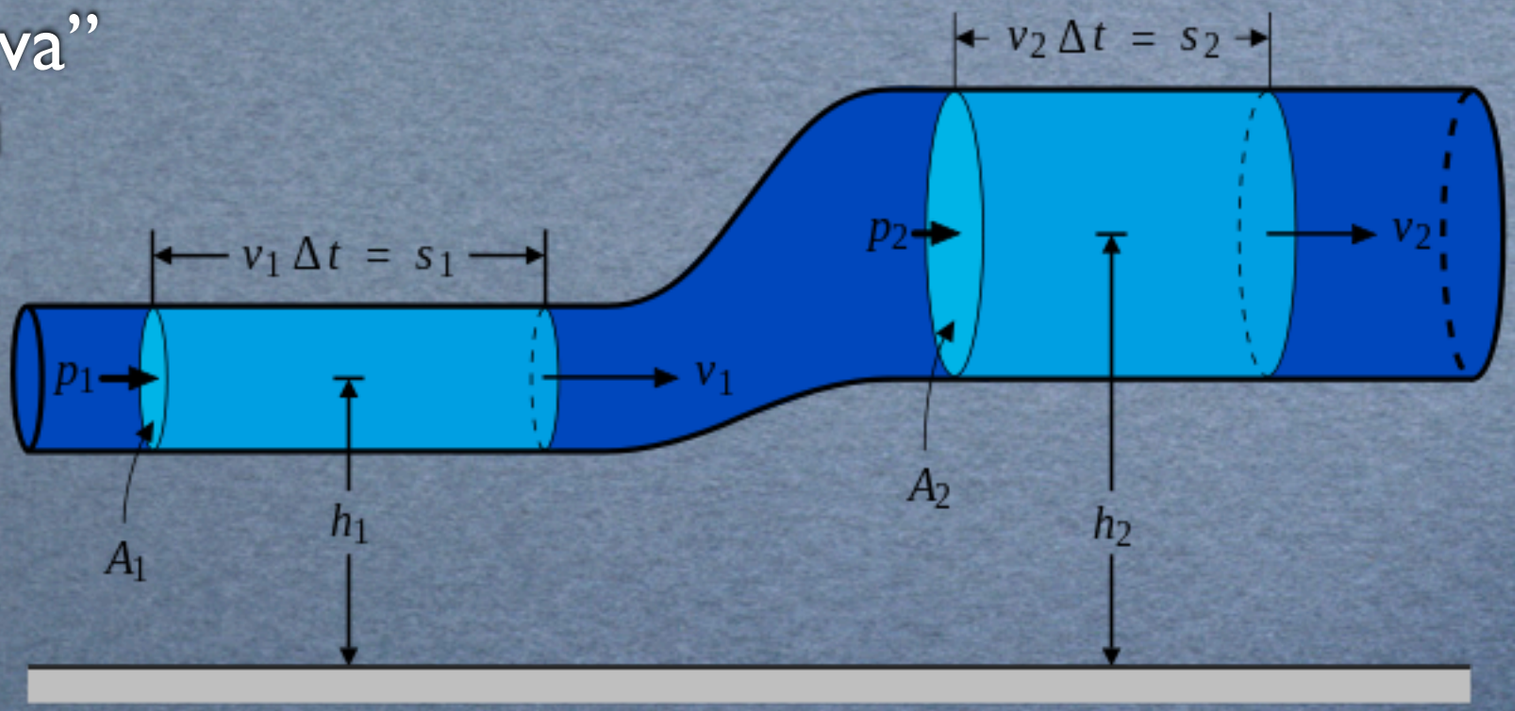
OPUS ACADEMICUM

AB AUCTORE, DUM PETROPOLI AGERET, CONGESTUM.



ARGENTORATI,
Sumptibus JOHANNIS REINHOLDI DULSECKERI,
Anno M D CC XXXVIII.
Typis Joh. Henr. Deckeri, Typographi Basilienſis.

Una deduzione "intuitiva" della legge di Bernoulli



La porzione di liquido compresa tra A_1 e A_2 si sposta verso destra; A_1 si trova dopo un tempo Δt spostata di $v_1\,\Delta t$ e l'altra sezione di fluido di $v_2\,\Delta t$. Il risultato è lo stesso che spostare la porzione di fluido P_1 in P_2. Calcoliamo il lavoro effettuato dalla pressione e la variazione di energia.

Si ha $dV = v_2 A_2 dt = v_1 A_1 dt$, *la porzione di fluido* passa dalla quota h_1 alla quota h_2; ciò comporta un lavoro

$$\rho dV\, g\, (h_2\text{-}h_1)$$

Il lavoro deve uguagliare quello fornito dalla pressione

$$p1\, dV - p2\, dV$$

e il bilancio deve comprendere anche la variazione nella energia cinetica

$$\tfrac{1}{2}\rho\, dV(v_2^2 - v_1^2)$$

dunque Bernoulli!

$\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g h + p = \text{costante}$

o equivalentemente

$$v^2/2g + h + p/\rho g = \text{costante}$$

questa è l'altezza raggiungibile nel campo gravitazionale avendo velocità v

questa è la differenza di quota che corrisponde a una differenza di pressione p

Dimostrazione della identità $\frac{1}{2}\nabla v^2 = \vec{v} \wedge \mathrm{rot}\, \vec{v} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}$

$$(\vec{v} \wedge \mathrm{rot}\vec{v})_x = v_y(\mathrm{rot}\vec{v})_z - v_z(\mathrm{rot}\vec{v})_y$$

$$= v_y\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) + v_z\left(\frac{\partial v_z}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial z}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\partial v_y^2}{\partial x} - \left(v_y\frac{\partial}{\partial y}\right)v_x - \left(v_z\frac{\partial}{\partial z}\right)v_x + \frac{1}{2}\frac{\partial v_z^2}{\partial x}$$

Ora si aggiunge e si toglie $\frac{1}{2}\frac{\partial v_x^2}{\partial x} = \left(v_x\frac{\partial}{\partial x}\right)v_x$

e i vari termini si combinano a dare $\frac{1}{2}\frac{\partial v^2}{\partial x} - (\vec{v}\cdot\nabla)\,v_x$

Ugualmente si procede per le componenti y e z.

Cenni al teorema di Gauss

Una dimostrazione completa del teorema di Gauss per qualunque superficie orientabile è compito per un matematico! Ci limitiamo a esaminare i casi particolari di un parallelepipedo rettangolo e di un triedro rettangolo. Componendo poi queste figure solide in modo da costruirne altre più complicate si estende la validità del teorema.

1. Parallelepipedo rettangolo di lati L_1, L_2, L_3. L'integrale

$$\int_0^{L_1} dx \int_0^{L_2} dy \int_0^{L_3} dz \, \frac{\partial f_x}{\partial x}$$

che costituisce un pezzo dell'integrale della divergenza di f si può calcolare integrando per parti:

$$\int_0^{L_1} dx \int_0^{L_2} dy \int_0^{L_3} dz \, \frac{\partial f_x}{\partial x} = \int_0^{L_2} dy \int_0^{L_3} dz \, (f_x(L_1, y, z) - f_x(0, y, z))$$

Il primo termine è immediatamente $\Rightarrow \int dy\, dz\, \vec{f} \cdot \hat{e}_1$
che rappresenta il flusso attraverso la faccia a x=L_1 mentre il secondo termine è il flusso uscente dalla faccia a x=0. Le stesse considerazioni si applicano a $\partial f_y/\partial y$ e $\partial f_z/\partial z$. So far so good!

Parimenti semplice è il caso del triedro rettangolo *(0<x<1, 0<y<1, 0<z<1, x+y+z<1)*. Anche in questo caso si utilizza l'integrazione per parti e si trova il risultato previsto dal teorema di Gauss. Combinando parallelepipedi e triedri i flussi attraverso le facce interne si cancellano e resta il flusso sulla unione delle facce esterne, mentre il contributo della divergenza si accumula e fornisce l'integrale su tutto il volume.

Fine della XIV lezione

Avviso: oggi "sportello" Prof. Liviotti

ore 16:30

Prossima lezione

8 giugno 9:00