Università degli Studi di Parma

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica, Elettronica e delle Telecomunicazioni

anno accademico 2014-2015

Fisica 1



Prof. Enrico Onofri, titolare del corso

Dr. Emilia Liviotti, esercitazioni

5 marzo 2015

Scalari e vettori

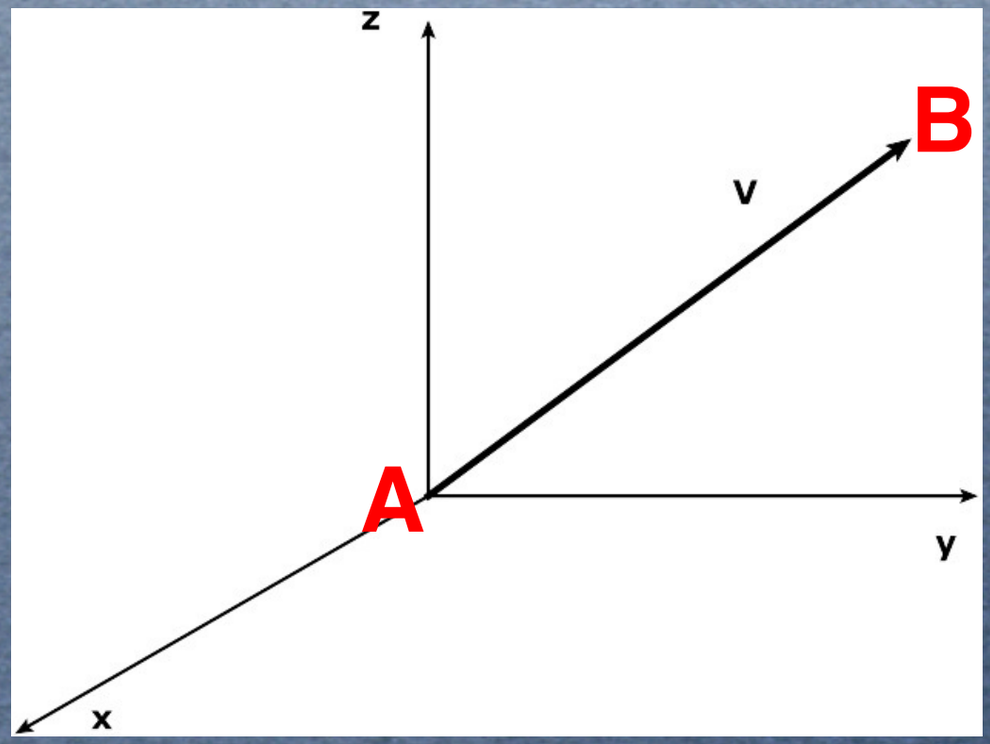
In fisica tutte le grandezze vengono catalogate in base alle loro proprietà di trasformazione rispetto a cambiamenti di sistemi di riferimento spazio-temporali.

Gli oggetti più semplici sono quelli invarianti, cioè quelli che assumono lo stesso valore in tutti i sistemi di riferimento. Vengono denominati SCALARI. Esempi sono temperatura, pressione, peso, lunghezza[1)], volume, etc. Uno scalare è espresso attraverso un numero reale ed ogni osservatore assegna lo stesso numero alla grandezza fisica, a meno degli errori della misura.

1) Dal 1905 la situazione è cambiata. Il concetto di lunghezza di un segmento NON è più un invariante ma cambia a seconda del sistema di riferimento! Questo fatto non è rilevante per la Fisica che si occupa di moti con velocità molto inferiori a quella della luce.

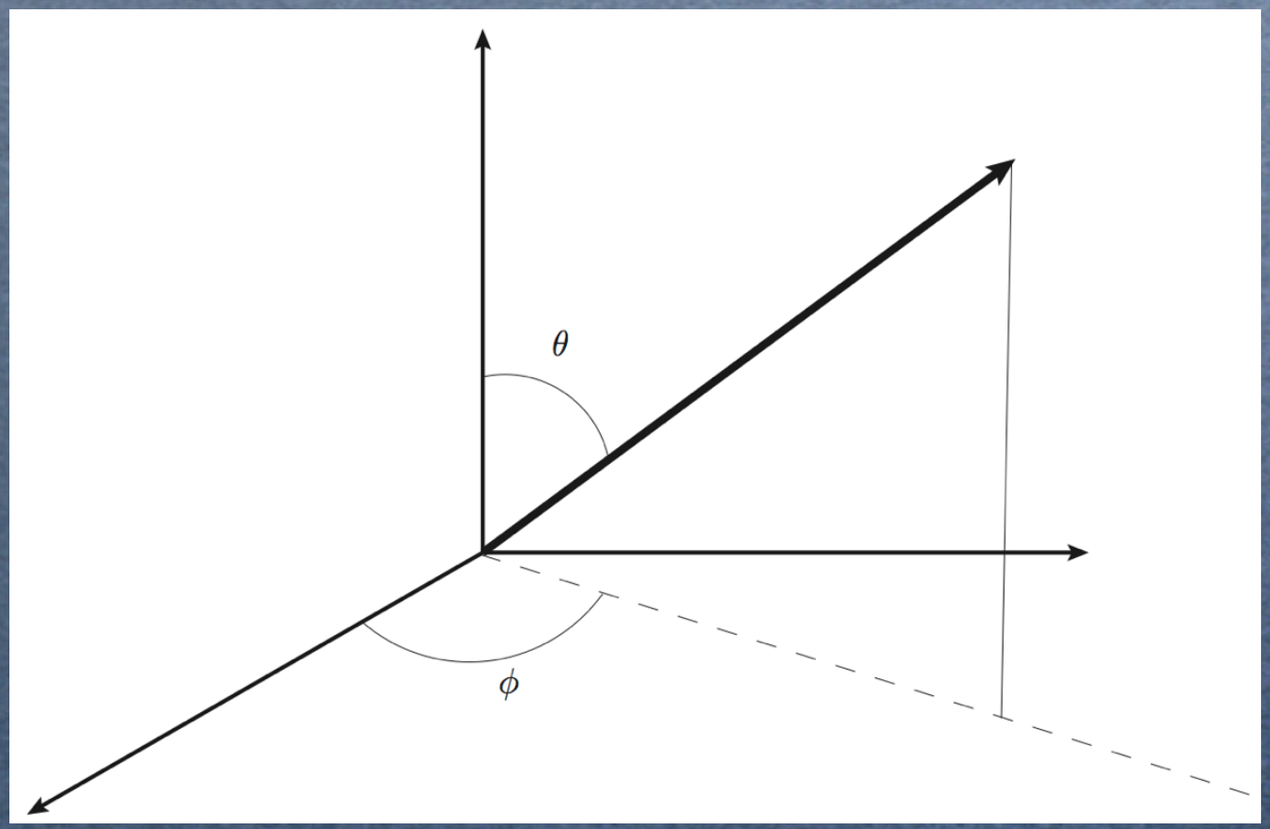
Vettori

La struttura di vettore è utilizzata per rappresentare oggetti che siano dotati di una direzione nello spazio e di una lunghezza. Il caso tipico è quello dello spostamento nello spazio. Il movimento da un punto A a un punto B è rappresentato da un vettore che ha direzione A→B e lunghezza data dalla distanza tra A e B.

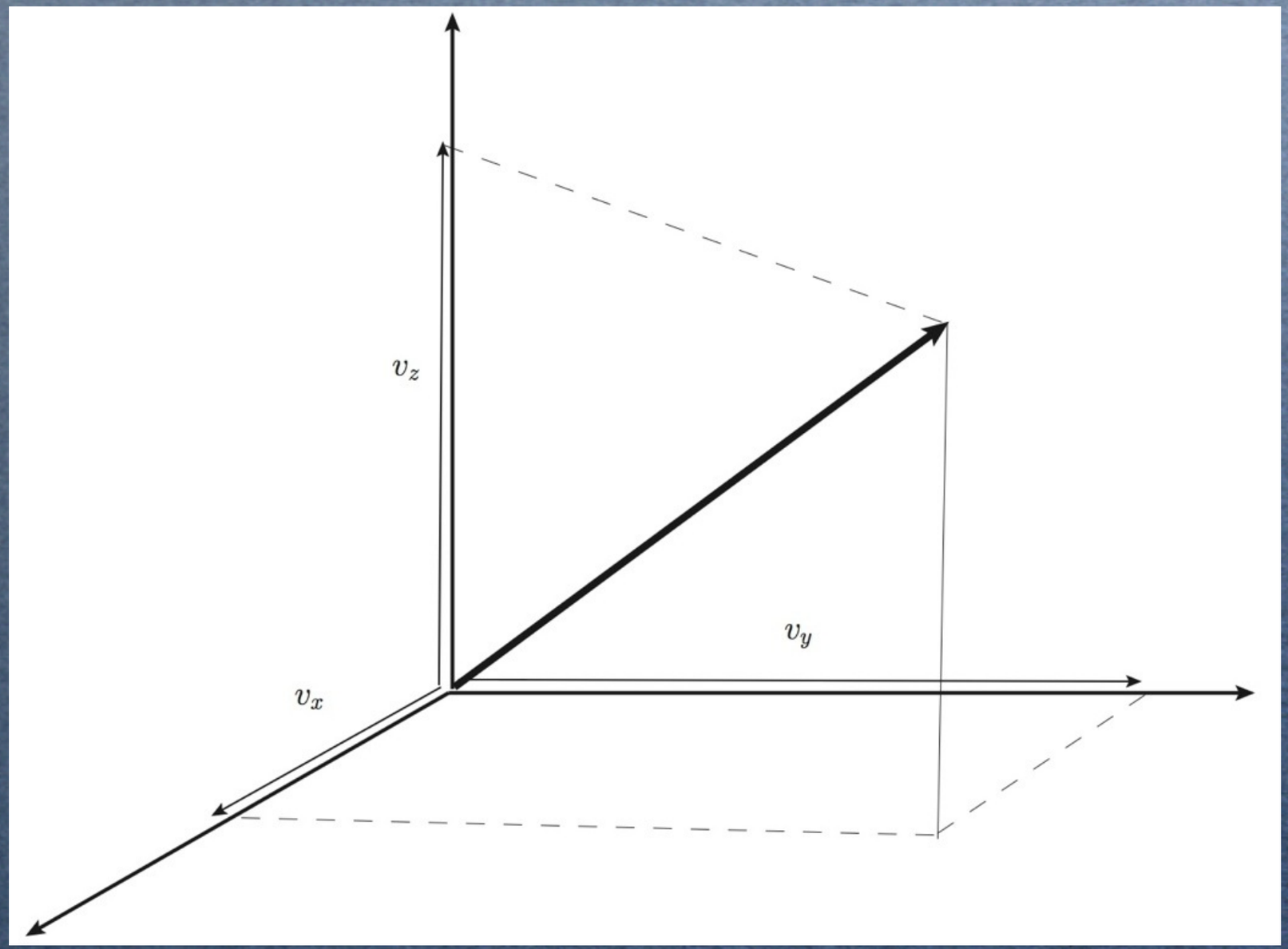


Come si rappresenta un vettore, a parte la rappresentazione grafica ?

Un vettore è individuato dalla sua lunghezza e dalla sua direzione. Quest'ultima si può caratterizzare tramite due angoli Θ, ϕ, equivalenti a latitudine e longitudine sulla superficie terrestre.



Oppure, più convenientemente, si rappresenta un vettore attraverso le sue proiezioni lungo gli assi di un riferimento cartesiano



Se un altro osservatore vuole descrivere il vettore ma si riferisce a un diverso riferimento cartesiano, le componenti saranno diverse ma l'oggetto è lo stesso. Si dice allora che un oggetto è un vettore se le sue componenti si trasformano da un riferimento all'altro secondo la relazione precisa

$$\begin{pmatrix} v'_x \\ v'_y \\ v'_z \end{pmatrix} = \mathcal{R} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

dove R è l'operazione matematica che descrive una rotazione di assi, come si impara nei corsi di geometria. Tutti i vettori soddisfano a questa relazione.

Ad esempio, se la trasformazione di riferimento corrisponde a una rotazione nel piano x-y, R è data semplicemente da

$$\begin{pmatrix} v'_x \\ v'_y \\ v'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

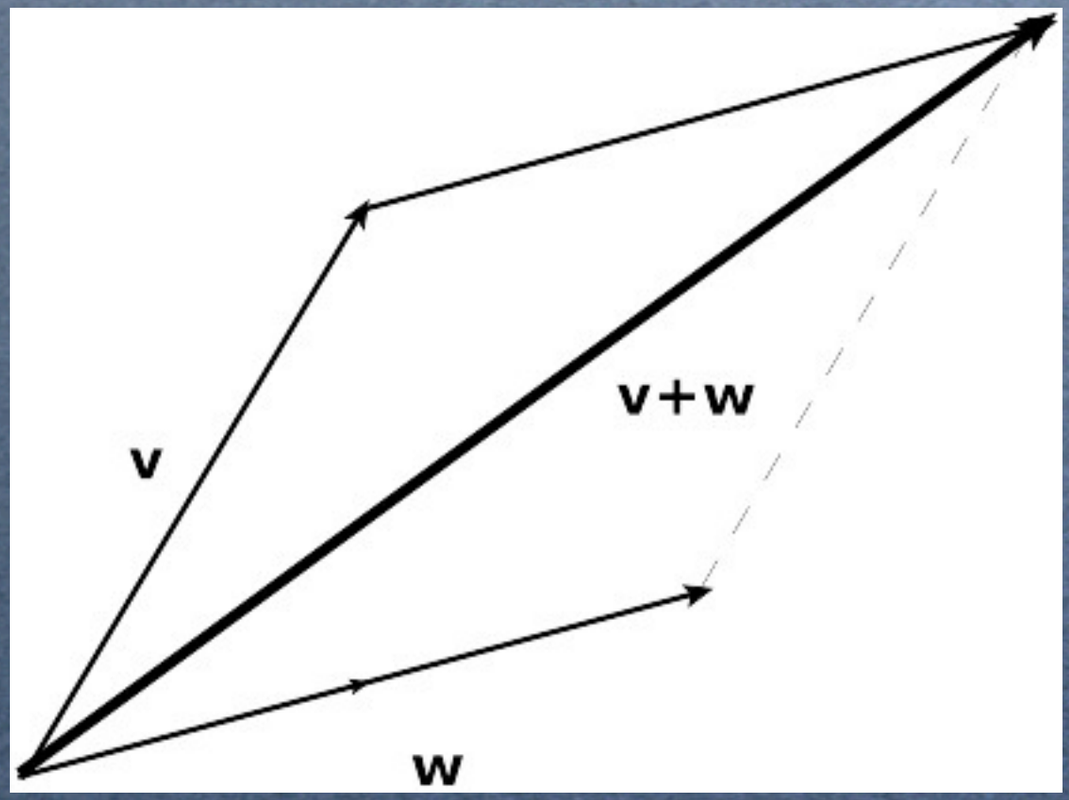
dove si intende che la matrice si applica al vettore "colonna" secondo la regola della moltiplicazione "righe x colonne", in questo caso

$$v'_x = \cos(\alpha)\, v_x - \sin(\alpha)\, v_y$$
$$v'_y = \sin(\alpha)\, v_x + \cos(\alpha)\, v_y$$
$$v'_z = v_z$$

I vettori sono impiegati per rappresentare spostamenti, velocità, accelerazione, forze, etc.

Altre grandezze fisiche hanno bisogno di un concetto più generale, quello di tensore, ma ne parleremo al momento opportuno. Nella teoria di Einstein, la Relatività, si introducono anche oggetti più generali che corrispondono a grandezze che si trasformano in modo lineare sotto trasformazioni di riferimento in moto (trasformazioni di Lorentz). Anche di questo parleremo a tempo debito...

Sui vettori è definita in modo naturale l'operazione di somma. Questa corrisponde graficamente a spostare uno dei vettori in modo che la sua base coincida con il vertice del secondo, senza cambiarne l'orientazione



Si dice che si esegue un trasporto parallelo di w e la somma dei vettori coincide con la diagonale del parallelogramma.

La somma si esprime in modo banale in termini delle componenti:

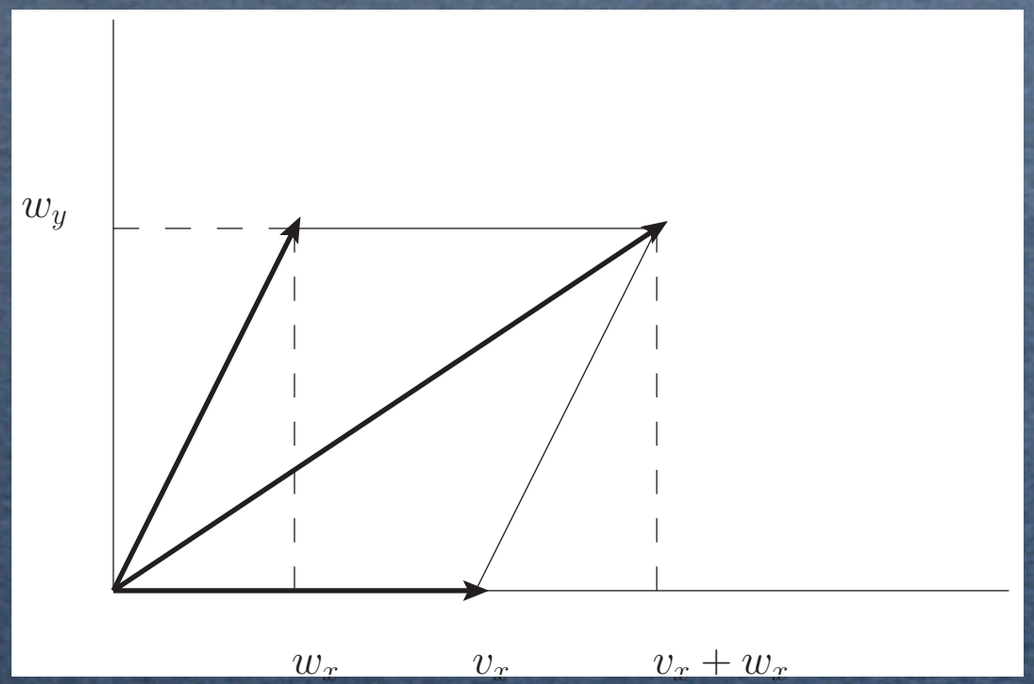
$$(v+w)_x = v_x + w_x$$
$$(v+w)_y = v_y + w_y$$
$$(v+w)_z = v_z + w_z$$

Definita la base di vettori unitari (versori)
i, j, k
di componenti rispettivamente
i=(1,0,0), j=(0,1,0), k=(0,0,1)
è chiaro che si potrà
esprimere ogni vettore come combinazione lineare dei versori della base:

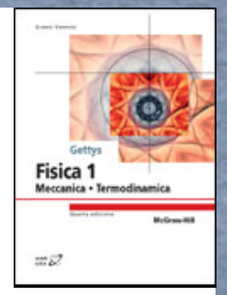
$$v = v_x \boldsymbol{i} + v_y \boldsymbol{j} + v_z \boldsymbol{k}$$

Dimostriamo la formula precedente utilizzando le rotazioni: poniamo v nella direzione x e w nel piano x,y - cosa che possiamo fare liberamente, o meglio possiamo liberamente utilizzare il sistema di riferimento che più ci sembra conveniente!

Dunque in questo sistema di riferimento risulta evidente che



$$(v+w)_x = v_x + w_x$$
$$(v+w)_y = v_y + w_y$$
$$(v+w)_z = v_z + w_z$$



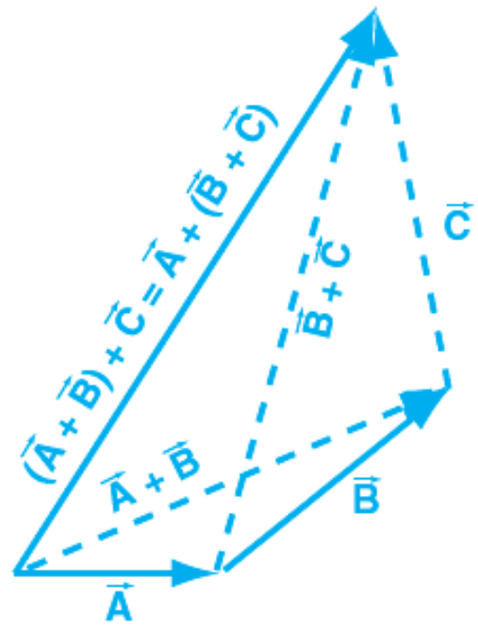


Figura 2.6
I vettori possono essere raggruppati e sommati in qualsiasi ordine.

Copyright © 2011 – The McGraw-Hill Companies srl

Ma una relazione tra vettori $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}$ *se è vera in un sistema di riferimento lo è in qualunque altro sistema!*

QED

Altre operazioni sui vettori: se prendiamo la somma

$\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}$

questa sarà un vettore con la stessa direzione di $\boldsymbol{v}$ *e lunghezza doppia.* $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}+\ldots+\boldsymbol{v}$ *(n volte) sarà un vettore con la stessa direzione di* $\boldsymbol{v}$ *e lunghezza n volte maggiore. In generale si definisce*

$r\,\boldsymbol{v}$

con r reale un vettore con direzione uguale a $\boldsymbol{v}$ *e lunghezza moltiplicata per r.*

INTERVALLO

Struttura di spazio vettoriale

Uno spazio vettoriale è un insieme *V* di oggetti x, y, z, ...
su cui sono definite due operazioni:
Somma: x+y $\in$ *V* ***per ogni*** **x e y $\in$ *V*** **(commutativa)**
Prodotto per numeri reali: r x $\in$ *V* ***per ogni*** **x $\in$ *V***
e r $\in$ ***R.***

Esiste un unico vettore 0 tale che x+0=0+x=x.
*Inoltre per ogni vettore x esiste un elemento di **V** indicato con -x tale che x+(-x)=0.*

Questa struttura astratta si applica ai vettori in 3 dimensioni, ma è in grado di generalizzazione a un numero qualunque di dimensioni.

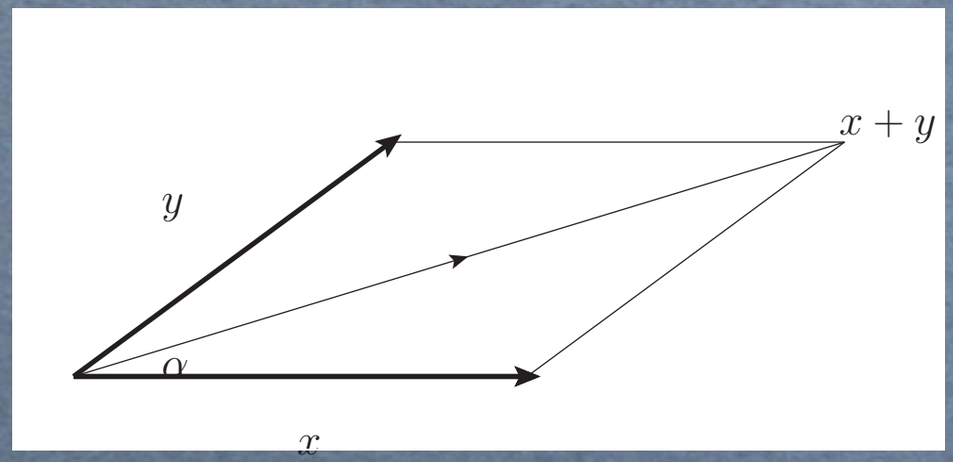
È importante per le applicazioni alla Fisica considerare altre operazioni sui vettori, oltre alla somma

1. **Prodotto scalare**
2. **Prodotto vettoriale**

Vediamo il primo: il prodotto scalare viene definito per una qualunque coppia di vettori:

x.y

come *il prodotto delle lunghezze dei due vettori e del coseno dell'angolo da loro formato*



Il prodotto scalare permette di generalizzare il teorema di Pitagora: la lunghezza della somma di due vettori è data dal teorema di Pitagora se i vettori sono ortogonali (x.y=0) ossia

$|x+y|=\sqrt{(x^2+y^2)}$.

$x^2=x.x$

Se invece i due vettori NON sono ortogonali si ha

$|x+y|^2 = x^2+y^2+2\ x.y$

e quindi:

$$(x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2 + (x_3 + y_3)^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 = 2(x_1\, y_1 + x_2\, y_2 + x_3\, y_3)$$

Abbiamo perciò una formula generale del prodotto scalare in termini di componenti!

$$x \cdot y = x_1\, y_1 + x_2\, y_2 + x_3\, y_3$$

Il prodotto scalare è invariante se ruotiamo entrambi i vettori senza modificarne l'angolo. Infatti

$$x'_i = \sum_{j=1}^{3} R_{ij}\, x_j \qquad y'_i = \sum_{j=1}^{3} R_{ij}\, y_j$$

$$x' \cdot y' = \sum_i \sum_j R_{ij} x_j \sum_k R_{ik} y_k \quad \textit{ma} \quad \sum_i R_{ij}\, R_{ik} =$$

Ortogonalità ⇒

$$1(j = k)$$

$$0(j \neq k)$$

QED

In definitiva:

Il prodotto scalare tra due vettori, diciamo u e v, si definisce come il prodotto delle lunghezze |u||v| con il coseno dell'angolo formato dai due vettori. Caso per caso può essere conveniente utilizzare altre rappresentazioni equivalenti:

- $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$
- u.v = prodotto di |u| per la proiezione di u lungo v
- u.v = prodotto di |u| per la proiezione di v lungo u

Il prodotto scalare è simmetrico nei due fattori:

u.v = v.u

Vedremo all'opera il prodotto scalare quando parleremo di LAVORO di una FORZA

Prodotto vettoriale

La seconda operazione che si definisce su coppie di vettori è il loro **prodotto vettoriale** u x v. La notazione varia in letteratura, sono presenti sia $u \times v$ che $u \wedge v$.

La definizione è la seguente: *il prodotto vettore $u \times v$ è un vettore che ha direzione ortogonale al piano formato da u e v e lunghezza pari al prodotto $|u||v| \sin \alpha$ dove α è l'angolo formato dai due vettori*. C'e` da risolvere però un'ambiguità. Se la direzione è fissata rimane il verso da definire. Ad es. u=(1,0,0), v=(0,1,0): il prodotto u × v sarà in direzione "z" di lunghezza 1 ma in quale verso, ↑ oppure ↓ ? Qui è necessaria una convenzione sulla orientazione dello spazio.

Si dice che tre vettori, nell'ordine, u, v e w formano una "terna sinistrorsa" se, riferendosi alla propria mano sinistra, u può essere fatto coincidere con il pollice, v con il medio e w con l'indice (nella posizione naturale della mano senza contorsioni ...). Secondo questa convenzione cioè nel caso precedente si avrà

$$(1,0,0) \times (0,1,0) = (0,0,1)$$



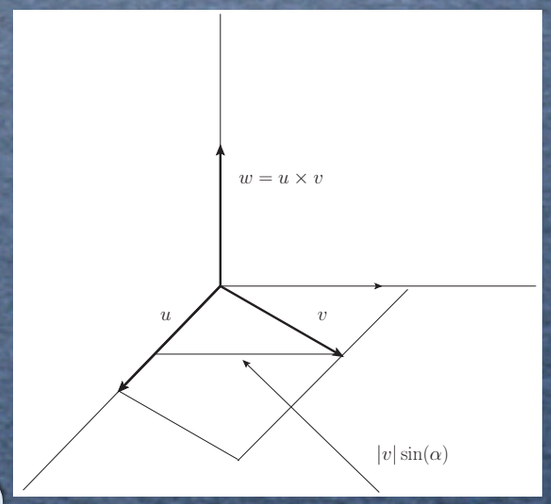
Altri modo di rappresentare il prodotto vettore, tra loro equivalenti...

Il prodotto w = u x v rispetta il concetto di vettore, ossia se ruotiamo u e v attraverso una rotazione rigida nello spazio, anche w risulta ruotato con la medesima rotazione. Quindi se vogliamo calcolare rapidamente u x v possiamo sempre orientare gli assi in modo che u sia lungo l'asse x, v sia nel piano x-y con componenti positive e di conseguenza u x v sarà diretto lungo l'asse z. In componenti si avra`

u=(|u|,0,0)

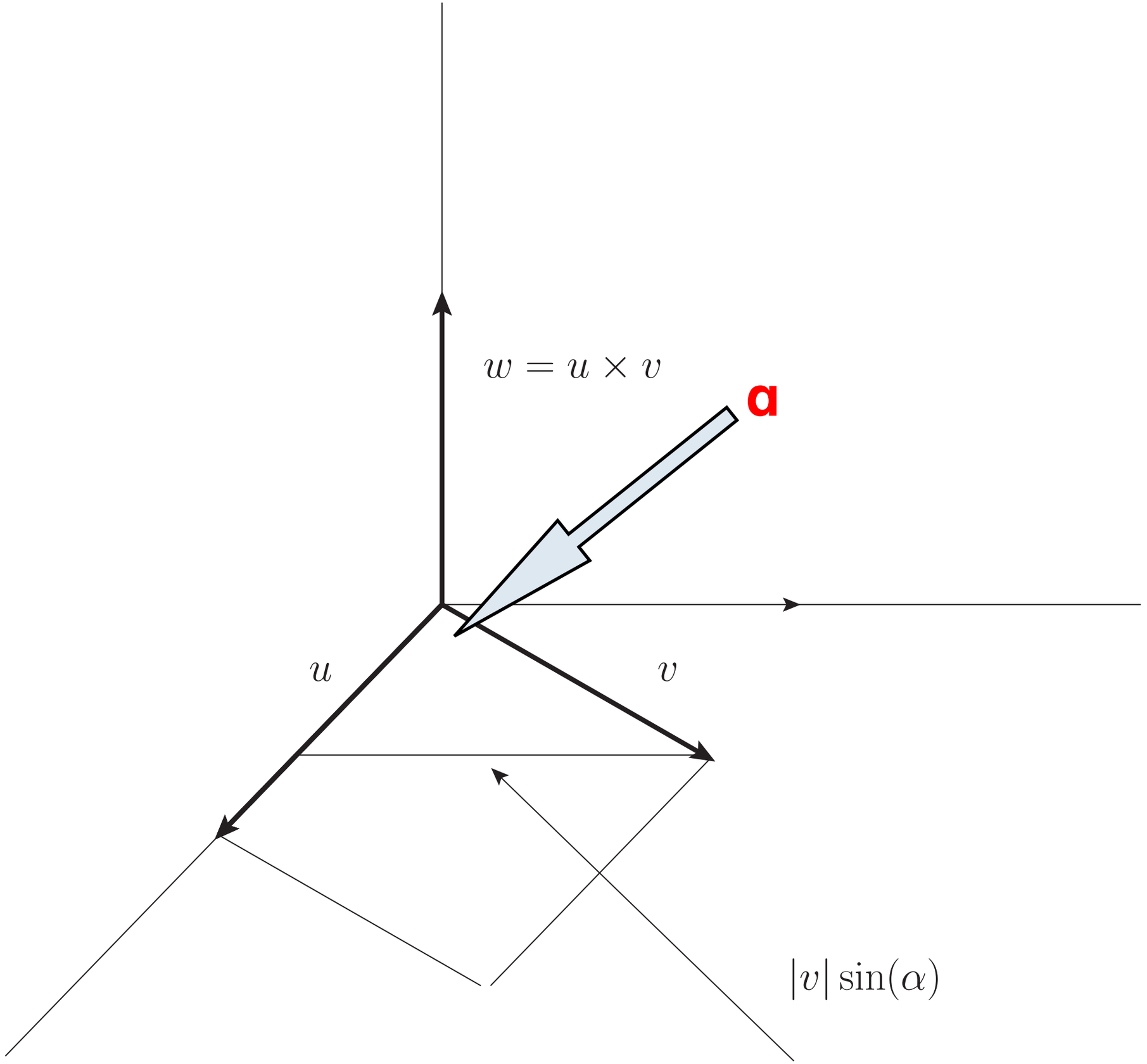
v=(v1,v2,0)

w=(0,0,|u|v2)



next

si noti che la lunghezza di u x v coincide con l'area del parallelogramma formato da u e v!


$w = u \times v$
a
u
v
$|v| \sin(\alpha)$

Infine c'è una rappresentazione del prodotto vettore in termini delle componenti:

$$\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

dove i, j, k sono i versori che definiscono il sistema di riferimento cartesiano e l.l indica il determinante.
Dunque:

$$\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v} = (u_2 v_3 - u_3 v_2)\boldsymbol{i} + (u_3 v_1 - u_1 v_3)\boldsymbol{j} + (u_1 v_2 - u_2 v_1)\boldsymbol{k}$$

e questa è di solito la rappresentazione più conveniente!

Un altro significato geometrico del prodotto vettore
Consideriamo tre vettori a,b,c e costruiamo il prodotto

$$V = a \cdot b \times c$$

In termini di componenti si ha

$$V = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Il significato di V è quello di volume del parallelepipedo avente a, b e c come spigoli! Inoltre risulta evidente che si può scrivere equivalentemente

$$a \cdot b \times c = c \cdot a \times b = a \times b \cdot c$$

Un altra espressione che compare spesso in meccanica è

$$a \times b \times c$$

Qui c'è una sorpresa. **L'espressione NON è ben definita!** Il fatto è che il prodotto vettore oltre a essere

NON-COMMUTATIVO

è anche

NON-ASSOCIATIVO

nel senso che il doppio prodotto deve specificare quale delle due operazioni di esegue per prima:

$a \times (b \times c)$ oppure $(a \times b) \times c$?

Approfondiremo questi fatti nelle Esercitazioni ma a titolo di esempio:

$$i \times (j \times j) = 0, \quad (i \times j) \times j = k \times j = -i$$

FINE

della seconda lezione

5 marzo 2015