Fisica 1



Prof. Enrico Onofri, titolare del corso

Dr. Emilia Liviotti, esercitazioni

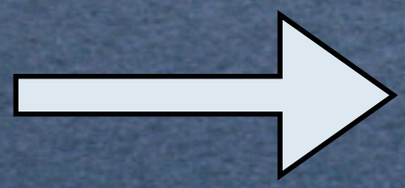
5 marzo 2015

Dalla lezione precedente: prodotto scalare e prodotto vettore.

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

$$\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

V = a . b × c



$$V = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Analisi con i vettori

Ora dobbiamo considerare vettori come funzioni di una o più variabili. In particolare funzioni del tempo.

In Meccanica i vettori vengono utilizzati nella descrizione del movimento dei corpi puntiformi, ossia quei corpi di cui possiamo tralasciare in prima istanza le dimensioni intrinseche. È una questione di scala: se dobbiamo descrivere il movimento di un pallone sul campo di calcio, il fenomeno è descritto prima di tutto assegnando un vettore al centro geometrico della sfera. È chiaro che nelle dispute su pallone dentro o fuori entrerà anche il raggio della sfera. Ma ora ci occupiamo della sola posizione del centro geometrico.

Il movimento viene descritto dal fatto che la posizione evolve nel tempo. ed è individuata da una funzione

$t \rightarrow (x(t), y(t), z(t))$

che può essere descritta da una curva nello spazio fisico a tre dimensioni.

Alle funzioni che definiscono le componenti del vettore si applicano tutte le proprietà che caratterizzano in analisi matematica le funzioni di una variabile reale, in questo caso il tempo t.

Come esempio prendiamo un punto materiale che segue la traiettoria

$$x(t) = R\cos(\omega t), y(t) = R\sin(\omega t), z(t) = vt$$

dove ω è una quantità di dimensione 1/T, detta "frequenza circolare" o semplicemente frequenza,
R è una lunghezza e v una velocità. Il moto descrive ovviamente una circonferenza nel piano x-y cui si sovrappone uno spostamento costante in direzione z. La curva che ne risulta è detta una "elicoide". Vediamo come appare utilizzando Matlab:

QuickTime Player File Edit View Share Window Help Rx: 0.0KB/s Tx: 0.0KB/s (3:36) U.S. Fri Mar 8 15:41

MATLAB R2013a

HOME PLOTS APPS FIGURE VIEW Search

/ ▸ Users ▸ eonofri ▸ Dropbox ▸ Fisica1 ▸ problemi ▸

Command Window

fx >>

Figures - Figure 1

Figure 1

Property Editor

La velocità è definita a partire dalla posizione X(t)
attraverso l'operazione matematica di **DERIVATA**.
Questa è più precisamente la **VELOCITÀ istantanea**,
mentre si dice **VELOCITÀ media** il semplice rapporto
tra spostamento X(t) e il tempo impiegato, dunque

vel-media = X(t)/t

(quella misurata in autostrada dal "tutor")
mentre quella indicata dal tachimetro è

vel-istant = dX(t)/dt

Si può pensare alla velocità istantanea come alla
velocità media su un intervallo molto piccolo di tempo,
al limite per questo intervallo che si fa tendere a 0.

La derivata del vettore X(t) si definisce come il vettore che ha come componenti le derivate delle componenti di X(t).
Per esempio nel caso dell'elicoide

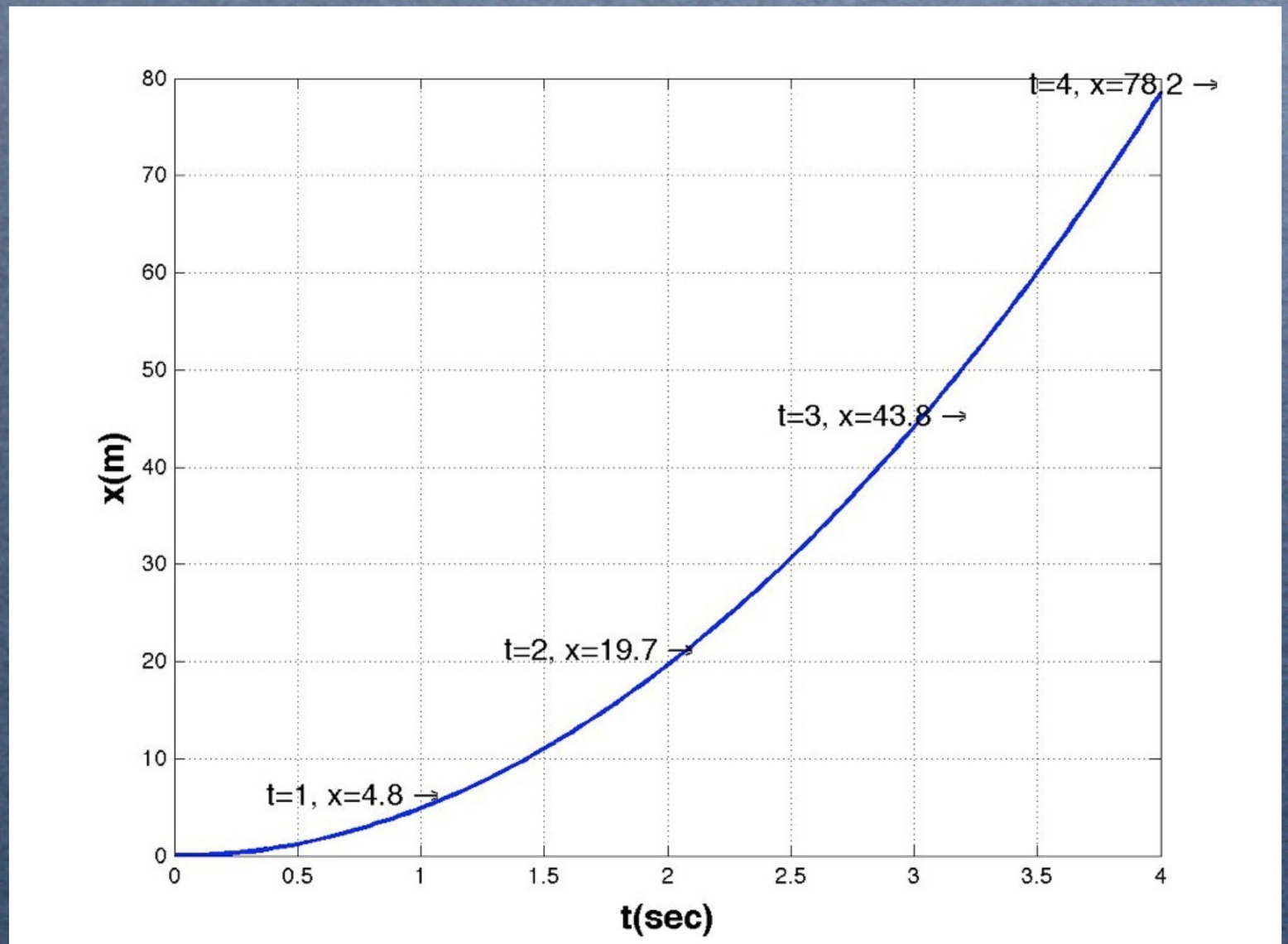
$$x(t) = R\cos(\omega t), v_x(t) = \frac{d\,x(t)}{dt} = -R\omega\sin(\omega t)$$

$$y(t) = R\sin(\omega t), v_y(t) = \frac{d\,y(t)}{dt} = R\omega\cos(\omega t)$$

$$z = v\,t, v_z(t) = \frac{d\,z(t)}{dt} = v$$

Ripartiamo da esempi più semplici. Consideriamo il moto in una sola dimensione, ad es.

$x(t) = \frac{1}{2} g t^2$



Si tratta di un moto accelerato uniformemente, in quanto la velocità cresce linearmente:

$$x(t) = \frac{1}{2}gt^2 \rightarrow v(t) = \frac{dx}{dt} = gt$$

È il moto descritto da Galileo quale moto dei gravi. L'accelerazione, definita come derivata della velocità rispetto al tempo risulta costante:

dv/dt = d(gt)/dt = g

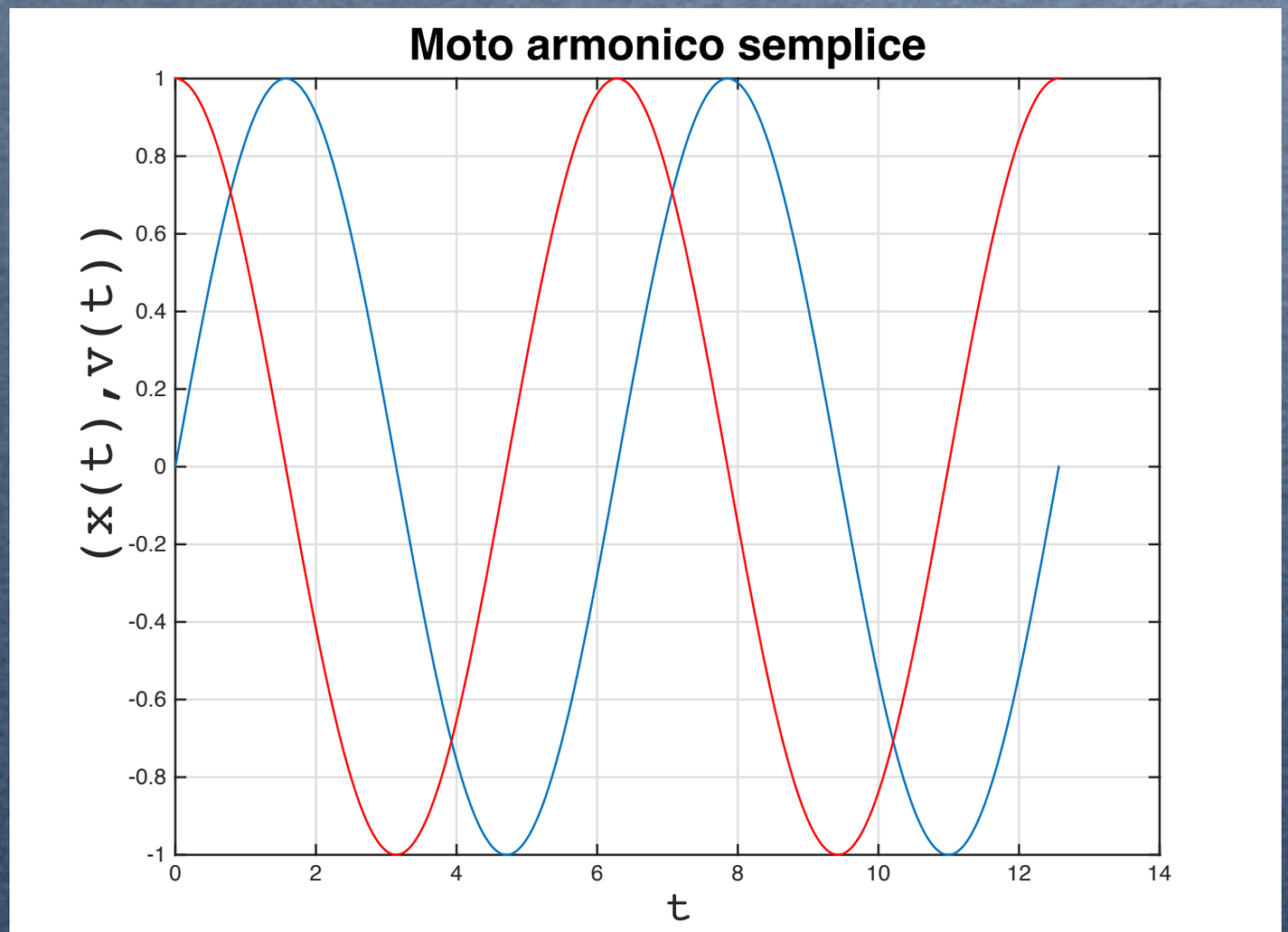
Naturalmente il moto più semplice in assoluto è quello a velocità costante:

$x(t) = v\,t,\ dx/dt = v$

in particolare lo stato di quiete, v=0

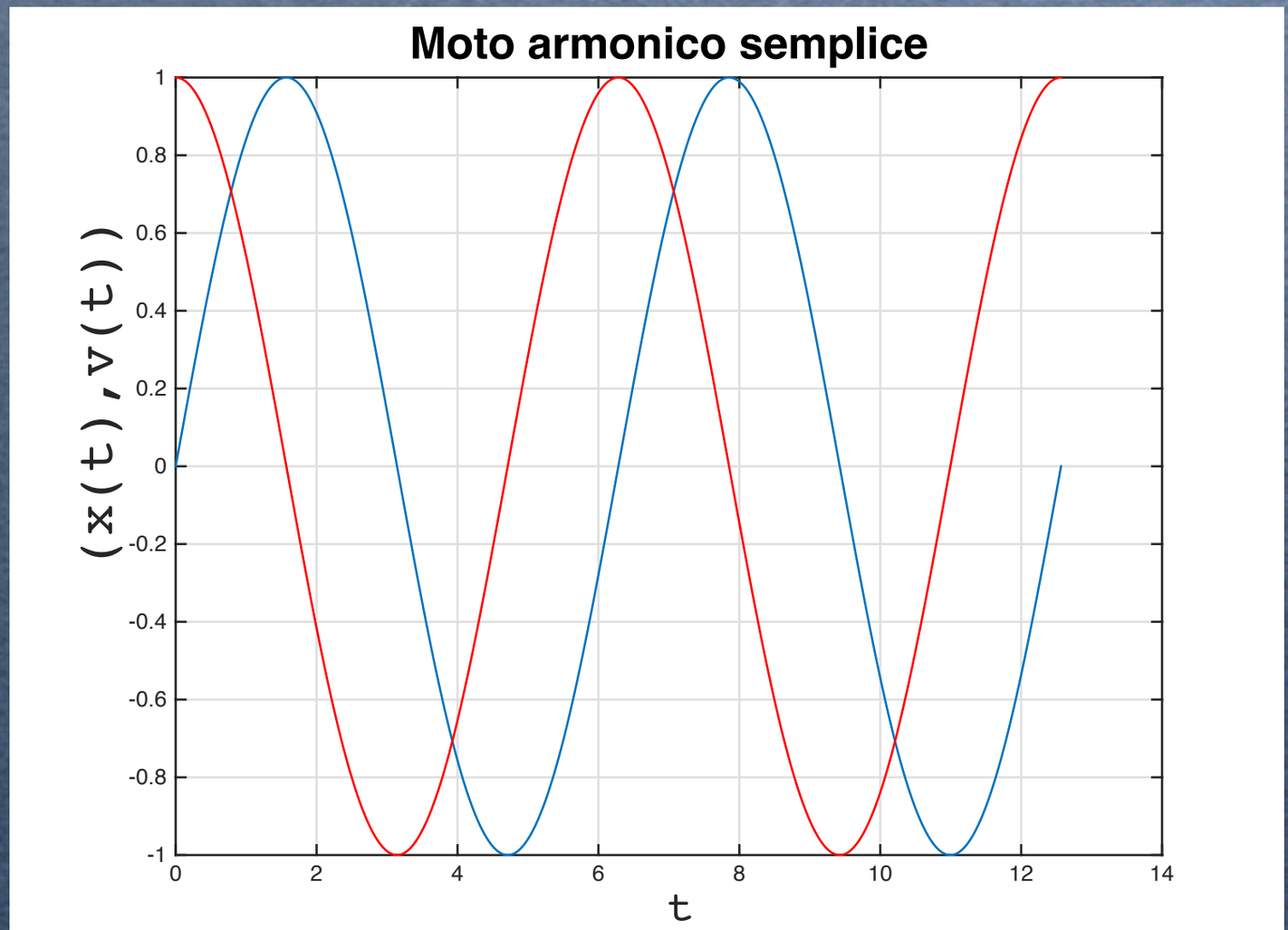
Il moto si intende riferito a un fissato sistema di riferimento. Il concetto di velocità è sempre relativo al riferimento. Ad es. in un ascensore in caduta libera in seguito a un guasto gli oggetti sono fermi rispetto alla cabina ma compiono un moto accelerato rispetto all'edificio.

Per visualizzare il moto si usano i diagrammi cartesiani. La posizione in funzione del tempo descrive una curva x(t) e la velocità coincide con il coefficiente angolare della tangente alla curva:



12 marzo 2015

Nell'esempio precedente si nota che nei punti in cui la tangente alla curva che descrive $x(t)$ risulta orizzontale, questo corrisponde ai punti in cui il moto si arresta e $v(t)=0$; là dove la curva $x(t)$ è maggiormente inclinata si osserva che $v(t)$ raggiunge il suo massimo valore.



SISTEMI di RIFERIMENTO

In meccanica è possibile riferirsi a un qualunque sistema di riferimento. Tra questi sono identificati in modo particolare i cosiddetti SISTEMI INERZIALI, quelli che si trovano in moto rettilineo uniforme rispetto alle stelle fisse. Un sistema vincolato saldamente alla superficie terrestre NON è strettamente parlando un sistema inerziale, per via del moto (non uniforme) della Terra. Ma in pratica, entro le dovute approssimazioni, può considerarsi tale. Torneremo su questo punto in seguito

Moto circolare uniforme

Abbiamo già incontrato questo tipo di moto nell'esempio iniziale, se ci restringiamo alla sola coppia di coordinate x-y e ignoriamo la z.

$$x(t) = R\cos(\omega t), v_x(t) = \frac{d\,x(t)}{dt} = -R\omega\sin(\omega t)$$

$$y(t) = R\sin(\omega t), v_y(t) = \frac{d\,y(t)}{dt} = R\omega\cos(\omega t)$$

Il punto materiale descrive una circonferenza di raggio R e l'angolo rispetto a una direzione fissa varia linearmente nel tempo. La velocità è tangente alla circonferenza, infatti il prodotto scalare x.v si annulla.

$$x(t)v_x(t) + y(t)v_y(t) = R^2\omega\left(\cos(\omega t)(-\sin(\omega t)) + \sin(\omega t)\cos(\omega t)\right) = 0$$

E l'accelerazione? Derivando la velocità rispetto al tempo si trova

$$\frac{dv_x(t)}{dt} = -R\omega^2\cos(\omega t) = -\omega^2\, x(t)$$

$$\frac{dv_y(t)}{dt} = -R\omega^2\sin(\omega t) = -\omega^2\, y(t)$$

Dunque in un moto circolare uniforme l'accelerazione è diretta lungo il vettore di posizione e punta verso il centro della circonferenza. Si dice che il moto è caratterizzato da una accelerazione centripeta. Il modulo della accelerazione centripeta è

$$a_c = \omega^2 r = v^2/r\ .$$

Fino a questo momento abbiamo considerato vari tipi di movimenti per un punto materiale, facendo astrazione da quali agenti possano causare questi moti. Si dice che abbiamo considerato la

CINEMATICA

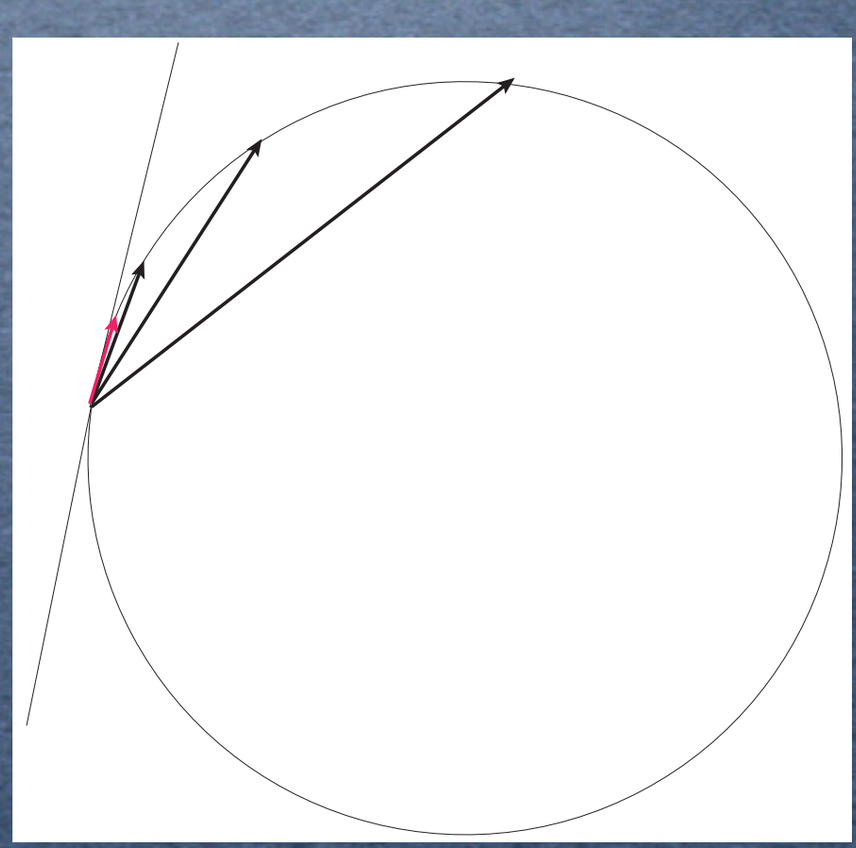
cioè la geometria descrittiva del movimento. Il capitolo più interessante sarà la

DINAMICA

quella parte della meccanica che si occupa di studiare le cause del moto, analizzarne le leggi fisiche e sfruttare questa conoscenza per **predire il moto sulla base delle informazioni a disposizione**.

(Una legge come quella che pone un limite alla velocità in autostrada NON è una legge fisica, piuttosto appartiene alla normativa dei comportamenti umani. Noi ci occupiamo qui solo delle leggi fisiche)

Abbiamo constatato che nel moto circolare la velocità è tangente alla traiettoria. Questa è una proprietà generale e discende dalla definizione di velocità come derivata del vettore di posizione. Infatti la definizione stessa di tangente a una curva passa attraverso la considerazione della derivata del punto sulla curva:



Infatti il rapporto incrementale

$$\frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}$$

al limite per tempi sempre più vicini coincide con la direzione tangente

Accelerazione tangenziale e accelerazione centripeta

Conviene introdurre quella che i Geometri chiamano "ascissa curvilinea": su di una data curva il punto può essere individuato dalla distanza da un punto fissato come origine - non "la distanza in linea d'aria" ma la vera distanza percorsa lungo la curva. Utilizzando i differenziali possiamo definire

$$s(t) = \int \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} \equiv \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}\, dt$$

dove x(t), y(t), z(t) sono fissate dall'equazione della traiettoria: ovviamente ds/dt=|v|

Ora prendiamo la derivata di X(t) rispetto al tempo e la esprimiamo in termini di s(t):

$$\frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt} = \frac{d\boldsymbol{x}(t)}{ds}\frac{ds}{dt} = |v(t)|\tau(s)$$

τ(s) = dx(t)/ds è un vettore di lunghezza uno, tangente alla traiettoria.

|v(t)|=ds/dt è il modulo della velocità. Derivando ulteriormente abbiamo l'espressione per la accelerazione:

$$\frac{d^2\boldsymbol{x}(t)}{dt^2} = \frac{d|v(t)|}{dt}\boldsymbol{\tau} + |v(t)|^2\frac{d\boldsymbol{\tau}(s)}{ds}$$

Il primo termine rappresenta l'accelerazione tangenziale, il secondo l'accelerazione centripeta: infatti **dτ(s)/ds** è ortogonale a τ(s) (dimostrarlo!). La formula mostra un fatto intuitivo: se procediamo a velocità costante ma in curva il moto è accelerato con accelerazione diretta verso il centro della curva,come nel caso circolare uniforme.

Si può affermare qualcosa di più preciso: la derivata

$d\tau/ds$

costituisce un vettore normale alla traiettoria: la sua lunghezza dipende dalla curvatura. Si dimostra che

$$d\tau/ds = n/\rho$$

dove ρ è il raggio di curvatura e **n è il versore normale alla traiettoria.** Questo conferma l'esperienza secondo cui l'accelerazione centripeta affrontando una curva è data da

$$v^2/\rho$$

cioè è tanto più grande quanto più è alta la velocità (in modo quadratico!) e tanto più stretta è la curva.

prossimamente

- Dalla cinematica alla dinamica, ossia dalla descrizione del movimento alle **leggi fisiche** che governano il movimento
- **Le tre leggi di Newton alla base della Meccanica Classica**
- **Fondamenti matematici: cosa dovete sapere delle "equazioni differenziali" e vivere tranquilli**
- Esempi di soluzione delle equazioni di Newton e ricostruzione della descrizione del movimento nel caso del punto materiale

Le leggi della Dinamica

Newton: 1686 Principi Matematici della Filosofia Naturale

Vi sono enunciate le tre leggi fondamentali della Dinamica.

NON sono assiomi di un sistema logico-formale, come quello di Euclide. Infatti i termini che entrano nella formulazione delle leggi sono lasciati alla interpretazione del lettore e per molti anni c'è stato un grosso lavoro di sistemazione logica.

Vediamo...

PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.

Autore *J S. NEWTON, Trin. Coll. Cantab. Soc.* Matheseos Professore *Lucasiano*, & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR.
S. PEPYS, *Reg. Soc.* PRÆSES.
Julii 5. 1686.

LONDINI,

Jussu *Societatis Regiæ* ac Typis *Josephi Streater.* Prostat apud plures Bibliopolas. *Anno* MDCLXXXVII.



Legge N.1

Ogni corpo continua nel suo stato di riposo o di moto uniforme lungo una linea retta fino a che sia costretto a mutare il suo stato da forze su di esso esercitate.

Note: l'affermazione sottintende che ci si riferisce allo stato di moto rispetto a un sistema inerziale. Le "forze" che possono modificare lo stato di moto non sono definite. Il significato è da intendere come modifica radicale del principio aristotelico secondo cui era necessaria una forza per mantenere in moto un corpo. La visione aristotelica è quella intuitiva, mentre quella di Newton tiene conto della critica galileiana.

Legge N.2

Il cambiamento nel moto è proporzionale alla forza impressa e avviene nella direzione della retta in cui la forza è applicata.

In termini moderni si traduce in:

forza = massa x accelerazione

ma la formulazione più precisa è quella di intendere per "cambiamento del moto" la derivata del prodotto massa x velocità

Legge N.3

Ad ogni azione si oppone un azione uguale e contraria.

Si deve intendere che le forze che si esercitano tra due corpi sono uguali di intensità e direzione ma verso opposto. Un esempio è dato dalla forza gravitazionale che si esercita tra due corpi celesti. Alla lettera: la Terra mi attrae verso il suo centro con la forza pari al mio peso, ma a mia volta io attraggo la Terra con la stessa forza di verso opposto. La Terra ovviamente non subisce alcun effetto misurabile ma ciò è dovuto al rapporto tra le masse coinvolte, dell'ordine di 10^{23}!

Prossima lezione

Lunedi 16.3

Avviso

Lunedí 16:30 Dr. Liviotti Esercitazioni