Università degli Studi di Parma

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica, Elettronica e delle Telecomunicazioni

anno accademico 2014-2015

Fisica 1



Prof. Enrico Onofri, titolare del corso

Dr. Emilia Liviotti, esercitazioni

12 marzo 2015

Le leggi della Dinamica

Newton: 1686 Principi Matematici della Filosofia Naturale

Vi sono enunciate le tre leggi fondamentali della Dinamica.

NON sono assiomi di un sistema logico-formale, come quello di Euclide. Infatti i termini che entrano nella formulazione delle leggi sono lasciati alla interpretazione del lettore e per molti anni c'è stato un grosso lavoro di sistemazione logica.
Vediamo...

PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.

Autore *J S. NEWTON, Trin. Coll. Cantab. Soc.* Matheſeos Profeſſore *Lucaſiano*, & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR.
S. PEPYS, *Reg. Soc.* PRÆSES.
Julii 5. 1686.

LONDINI,

Juſſu *Societatis Regiæ* ac Typis *Joſephi Streater.* Proſtat apud plures Bibliopolas. *Anno* MDCLXXXVII.



Legge N.1

Ogni corpo continua nel suo stato di riposo o di moto uniforme lungo una linea retta fino a che sia costretto a mutare il suo stato da forze su di esso esercitate.

Note: l'affermazione sottintende che ci si riferisce allo stato di moto rispetto a un sistema inerziale. Le "forze" che possono modificare lo stato di moto non sono definite. Il significato è da intendere come modifica radicale del principio aristotelico secondo cui era necessaria una forza per mantenere in moto un corpo. La visione aristotelica è quella intuitiva, mentre quella di Newton tiene conto della critica galileiana.

Legge N.2

Il cambiamento nel moto è proporzionale alla forza impressa e avviene nella direzione della retta in cui la forza è applicata.

In termini moderni si traduce in:

forza = massa x accelerazione

ma la formulazione più precisa è quella di intendere per "cambiamento del moto" la derivata del prodotto massa x velocità

Questa coincide con l'espressione precedente solo se la massa è costante nel tempo.

Osservazione importante: se non fossimo in grado di definire a priori le forze che agiscono sul corpo, la legge diventerebbe una mera definizione della forza e risulterebbe di scarsa utilità. Per trarre profitto dalla seconda legge dobbiamo essere in grado di caratterizzare le forze in gioco attraverso una teoria precisa. Ad es. la teoria di Newton riguardo la forza di attrazione gravitazionale. Oppure la forza elettrostatica tra cariche e la forza di Lorentz esercitata sulle cariche da un campo magnetico: dunque prima di tutto è necessaria una teoria delle forze in gioco.

Legge N.3

Ad ogni azione si oppone un azione uguale e contraria.

Si deve intendere che le forze che si esercitano tra due corpi sono uguali di intensità e direzione ma verso opposto. Un esempio è dato dalla forza gravitazionale che si esercita tra due corpi celesti. Alla lettera: la Terra mi attrae verso il suo centro con la forza pari al mio peso, ma a mia volta io attraggo la Terra con la stessa forza di verso opposto. La Terra ovviamente non subisce alcun effetto misurabile ma ciò è dovuto al rapporto tra le masse coinvolte, dell'ordine di 10^{23}!

Critica delle leggi di Newton

La prima legge è già in Galileo, e Newton lo riconosce nei suoi scritti. Essenzialmente si tratta del "**principio di inerzia**" che viene incluso nel principio di Galileo dell'invarianza delle leggi fisiche rispetto al cambiamento di sistema di riferimento inerziale. Impareremo a comprenderlo man mano che considereremo dei casi particolari. La principale obiezione: ***il lancio di un oggetto nell'esperienza quotidiana porta sempre all'arresto del moto dell'oggetto, ossia la nostra esperienza quotidiana è che invece è richiesta una forza per mantenere un moto qualunque corpo*** (un'auto, una bicicletta, un pallone da calcio, etc.).

Il lancio di un oggetto nell'esperienza quotidiana porta sempre all'arresto del moto dell'oggetto, ossia la nostra esperienza quotidiana è che è richiesta una forza per mantenere un moto qualunque corpo...

La risposta, che era già in Galileo, è che ***la perdita di velocità è addebitabile alla presenza di attrito che costituisce una forza che si oppone al movimento***. In effetti se ci mettiamo in condizioni di ridurre l'attrito (pattini su di una superficie ghiacciata, moto su cuscinetti di ghiaccio secco, etc.) si può facilmente constatare che il moto si mantiene molto più a lungo e si è autorizzati ad estrapolare le conclusioni riguardo cosa succede in totale mancanza di attrito.

Moto in assenza (quasi perfetta) di attrito



Vediamo come analizzare il moto di una slitta su un pendio ghiacciato

Diciamo che la massa della slitta sia m e l'attrito opposto dal ghiaccio sia proporzionale alla velocità della slitta. Allora la seconda equazione di Newton ci dice che l'accelerazione lungo il pendio sarà data dalla differenza tra la forza dovuta al peso e la forza di attrito, divisa per la massa della slitta:

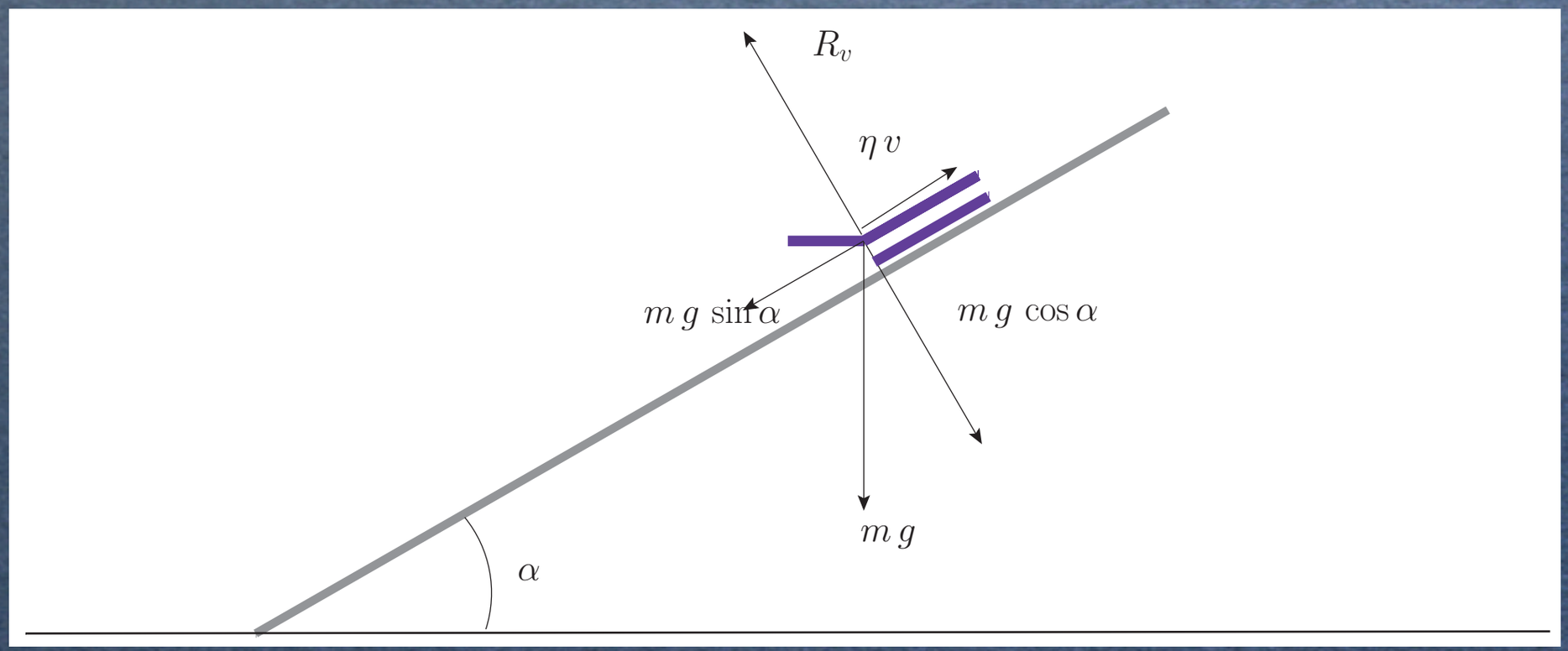
$$a = (mg\sin\alpha - \eta v)/m = g\sin\alpha - \frac{\eta}{m}v$$

la forza peso (**mg**) agisce verso il basso; essa può essere decomposta in una componente che agisce nella direzione della pista e la direzione ortogonale. Quest'ultima è neutralizzata dalla forza esercitata dal ghiaccio sulla slitta. Dunque la forza che agisce sul moto della slitta è data dalla combinazione peso-attrito.

L'equazione di Newton si scrive cosí, indicando con s la distanza lungo il pendio (l'ascissa curvilinea...)

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = m\,g\,\sin\alpha - \eta\frac{ds}{dt}$$

Si tratta di una "equazione differenziale" in cui s(t) svolge il ruolo di incognita



Soluzione

Cominciamo a dire che l'equazione NON contiene s(t) ma solo le sue derivate. Se scriviamo v=ds/dt, possiamo riscrivere l'equazione

$$dv/dt = g \sin\alpha - \eta\, v /m$$

In assenza di attrito (η=0) avremmo semplicemente

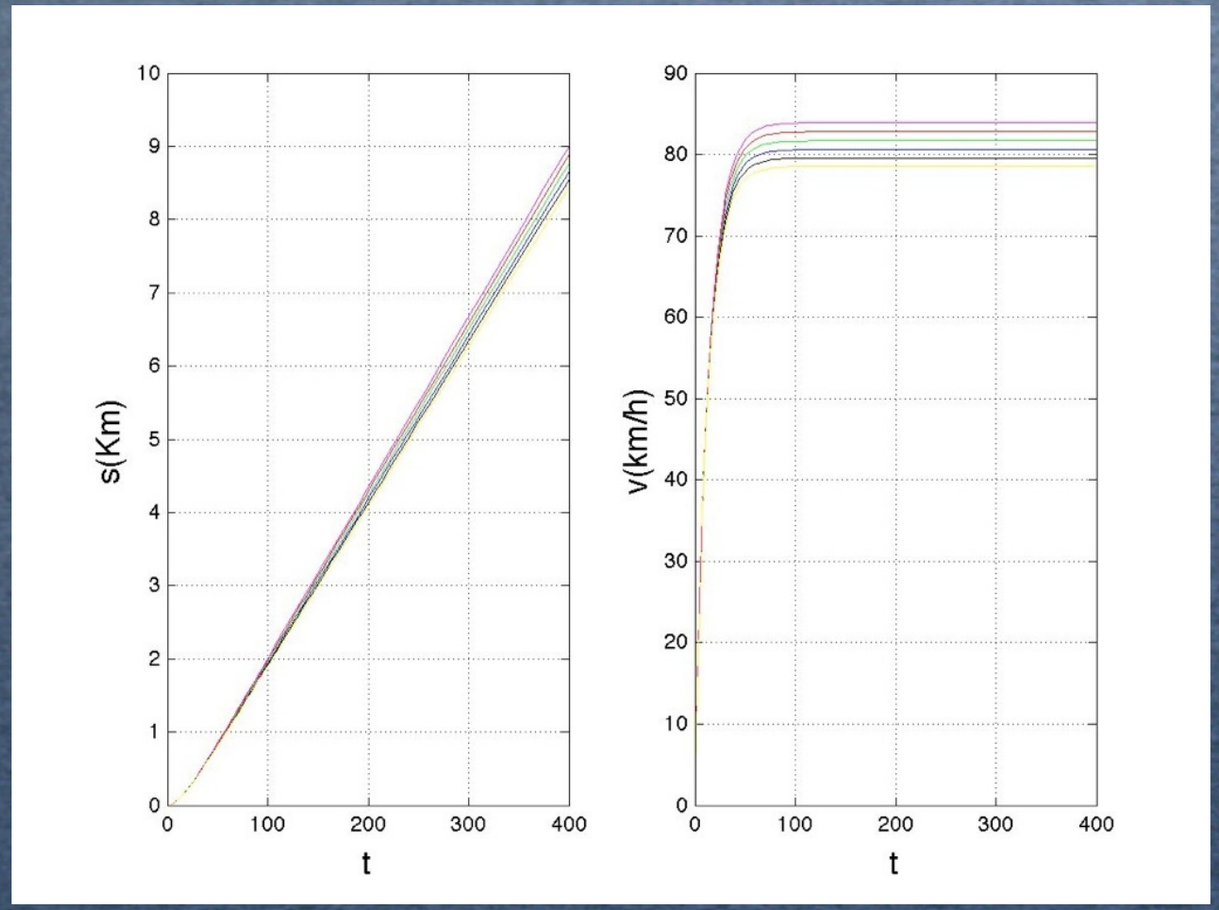
$$v=g\, t \sin\alpha$$

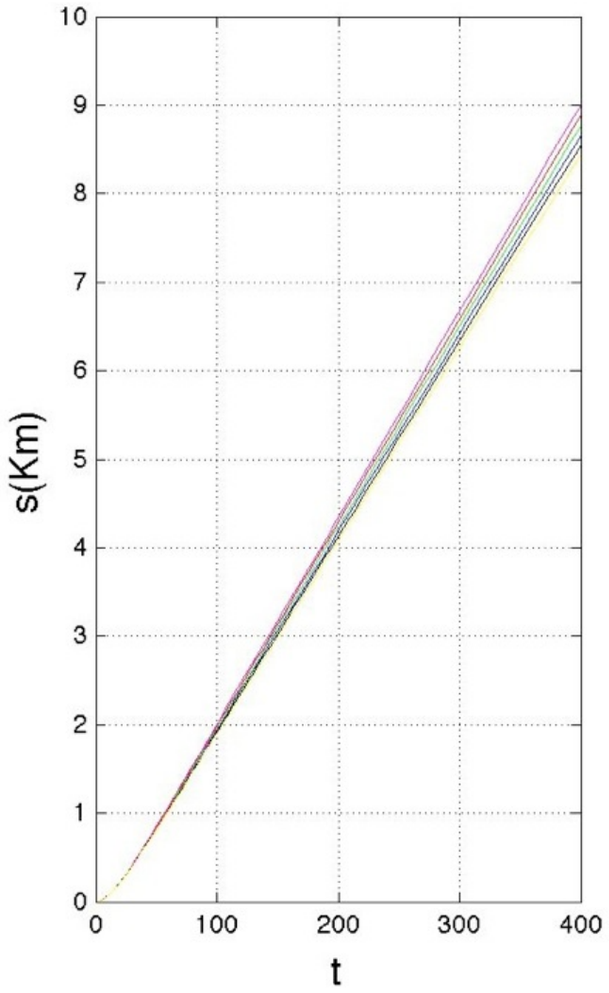
ma l'attrito deve farsi sentire prima o poi, perchè una velocità che cresce senza limiti non avrebbe senso. L'equazione in presenza di attrito ha come soluzione

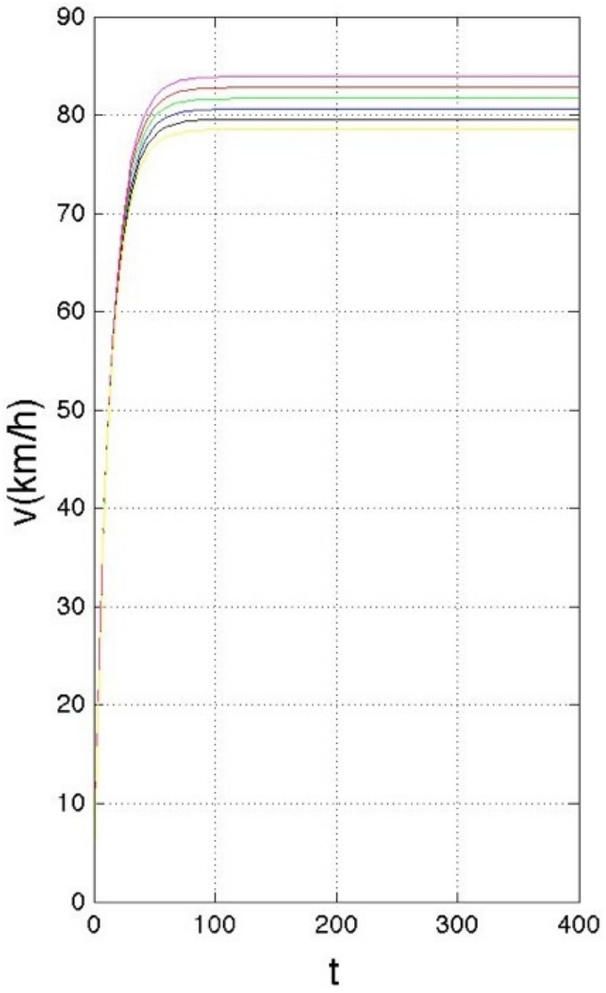
$$v(t) = \frac{m\, g \sin\alpha}{\eta}\left(1 - e^{-\eta\, t/m}\right)$$

Come si legge la soluzione?
Come si trova la soluzione?

Cominciamo dalla prima domanda: se disegnamo un diagramma della soluzione per valori ragionevoli dei parametri in gioco si trova







Ossia: la velocità si attesta su un velocità limite che dipende, a parità di altre condizioni, dal coefficiente di attrito, anzi è molto sensibile al suo valore. Nell'esperimento numerico η varia da .73 a .78 e la velocità limite da 78 a 88 km/h.

Come si trova la soluzione:

1) calcolo numerico: vedi slittaq.m in ~/matlab

2) dall'analisi matematica: l'equazione per v(t) è una equazione differenziale lineare del primo ordine. Si risolve innanzitutto l'equazione omogenea:

$$dv/dt = - \eta\, v\, /m$$

che ha come soluzione

$$v(t) = K\, exp(-\eta\, t\, /m)$$

con K costante arbitraria. A questo punto si cerca una soluzione della forma

$$v(t) = K(t)\, exp(-\eta\, t\, /m)$$

e si trova.....

lavagna!

$$-\underline{K\,\eta\,/m\;exp(-\eta\;t\;/m)} + dK/dt\;\;exp(-\eta\;t\;/m) =$$
$$g\;sin\alpha - \underline{K\,\eta\,/m\;exp(-\eta\;t\;/m)}$$

Il primo e l'ultimo termine si cancellano, e rimane

$$dK/dt\;exp(-\eta\;t\;/m) = g\;sin\alpha$$

ossia

$$dK/dt = g\;sin\alpha\;exp(\eta\;t\;/m)$$

Ma questa relazione si risolve subito per K attraverso un integrale:

$$K(t) = g\ sin\alpha \int exp(\eta\ t\ /m)\ dt = g\ sin\alpha\ m/\eta\ exp(\eta\ t\ /m)$$

La soluzione generale dell'equazione è pertanto

$$v(t)=K\ exp(-\eta\ t\ /m)+g\ m\ sin\alpha/\eta$$

K è ancora a disposizione. Noi abbiamo bisogno della soluzione tale che

$$v(t=0)=0$$

il che fissa K:

$$K=-gm/\eta\ sin\alpha$$

da cui la formula che abbiamo visto prima.

Riassumiamo: il moto della slitta sotto l'azione della gravità è regolato dalla forza peso che accelera verso il basso (m g sinα) e dall'attrito che si oppone al moto (è in realtà un complesso di effetti (l'attrito dell'aria e l'attrito dei pattini sul ghiaccio) che abbiamo rappresentato con una semplice formula - η v. I tecnici che curano la preparazione per le discese sanno che per vincere bisogna migliorare l'aerodinamica, la forma e la natura dei pattini, etc. e questo si può fare in laboratorio attraverso modelli, calcoli etc. Noi abbiamo considerato un problema ultra semplificato, ma che cattura l'aspetto principale del moto.

La velocità limite è proporzionale a $mg \sin\alpha/\eta$
il che ci dice che a parità di pendenza si vince aumentando il peso e combattendo l'attrito.
OVVIO! D'accordo, ma il tutto è conseguenza dell'equazione di Newton. Ci deve essere del vero...

$$dv/dt = g \sin\alpha - \eta\, v\, /m$$

3) *"non conosco la teoria delle equazioni differenziali..."*

Vorrei darvi un'idea di come catturare le proprietà salienti della soluzione senza assumere alcuna conoscenza specifica.

a) La slitta parte da v=0, dunque in un periodo iniziale l'accelerazione è vicina al valore in assenza di attrito e quindi il moto sarà per un pò un moto uniformemente accelerato

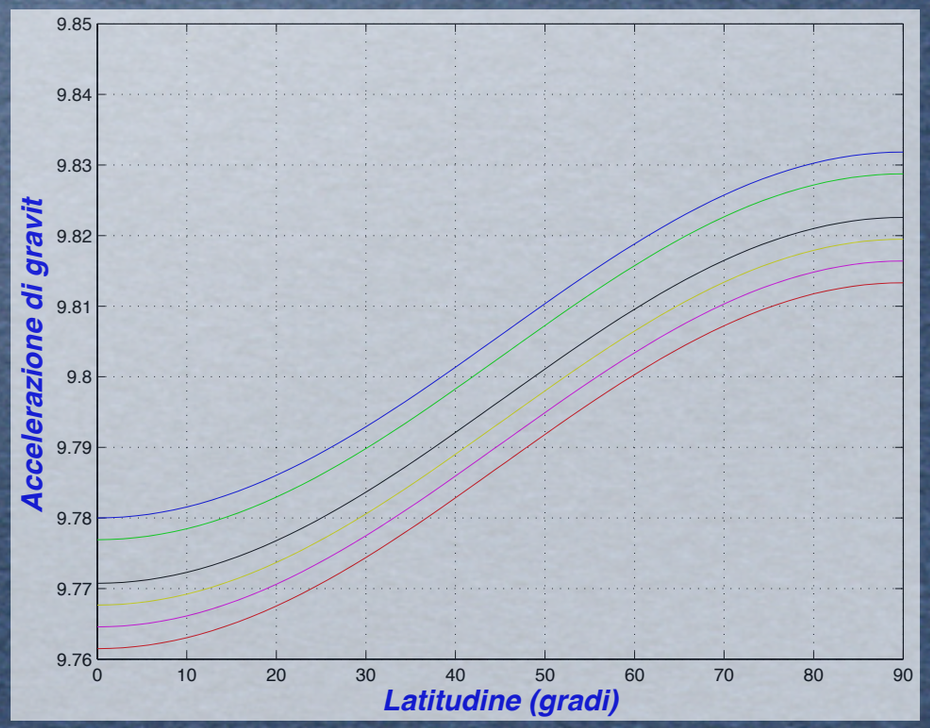
b) man mano che la slitta prende velocità tuttavia il termine di attrito si fa sentire sempre di più e quindi l'accelerazione sarà via via minore fino a quando il valore di $\eta\, v\, /m$ raggiunge $g \sin\alpha$ e in questa situazione l'accelerazione si annulla. In realtà l'accelerazione sarà sempre positiva, ma diventerà piccola a ritmo esponenziale. C'e` quindi da prevedere un intervallo di tempo di velocità crescente fino a quando ci si assesta sulla velocità limite che *si legge sull'equazione senza risolverla*!

Facciamo il punto

Perchè *peso= m g?*

Perchè l'esperienza mostra che l'accelerazione nella caduta di un grave è sempre la stessa, indipendentemente dalla massa del corpo e dunque il peso è proporzionale alla massa per un fattore uguale per tutti i corpi (al livello del mare $g \approx 9.8\ m/s^2$ e presenta deboli variazioni con la latitudine).

16.3.2015



Le leggi di Newton sono universali
Si applicano al moto dei corpi sulla terra e al moto dei corpi celesti
Dire che sono universali non significa dire che sono DEFINITIVE
Addentrandosi nelle regioni a scala cosmica oppure nel dominio atomico sappiamo che le leggi devono essere modificate.
Tuttavia sono un punto di partenza sicuro.
Vedremo ora le leggi in azione nel campo della
“Meccanica celeste”
ossia nello studio del moto dei pianeti dove si manifestano nella loro piena gloria.
Nella dinamica dei corpi sulla terra il quadro si complica per via delle forze di attrito, della natura non inerziale del sistema di riferimento, della complessità dei fenomeni.

La legge di Newton della Gravitazione universale

Per studiare il moto dei pianeti nel sistema solare si applica la legge F=ma al sistema di punti materiali costituito dai pianeti (trascurando temporaneamente i corpi meno massivi - i satelliti, gli asteroidi, le comete, etc)
Il problema principale consiste nel conoscere i dati iniziali (posizione e velocità) di tutti i pianeti nel sistema solare, ma questi dati ci vengono forniti dagli Astronomi.

16.3.2015

La grande scoperta di Newton

La Luna "cade" verso la Terra con la stessa legge dei gravi. L'argomento utilizza un satellite ipotetico che descrive un'orbita intorno alla Terra radente la superficie e si chiede qual'è l'accelerazione del satellite?

Il calcolo è basato esclusivamente sulla cinematica e sulla III legge di Kepler!

Dati a disposizione:

Luna: distanza $R=384000\ km$;

periodo di rivoluzione intorno alla Terra $T=27.32\ d$

Il satellite avrebbe invece

$R_0=6380\ km$

e il periodo è determinato dalla III legge:

$$T_0 = T\,(R_0/R)^{3/2}$$

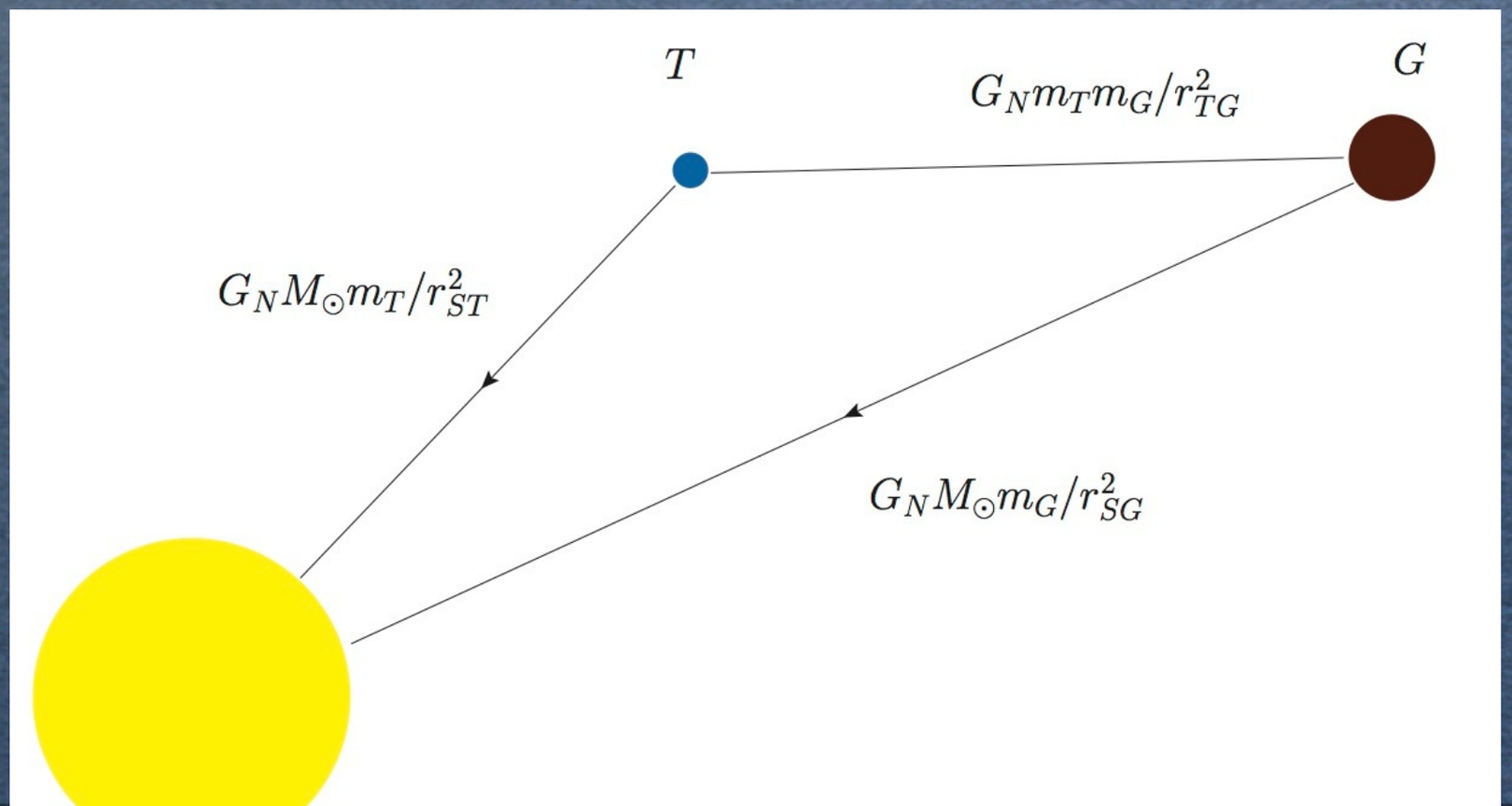
Qual'è l'accelerazione del satellite? Dobbiamo calcolare l'accelerazione centripeta che sappiamo coincidere con v^2/R, dunque

$$a = (2\pi R_0/T_0)^2/R_0 = (2\pi)^2\, R_0/T_0^2 = (2\pi)^2 (R^3/T^2)/R_0^2$$

$$\ldots = 9.8\ m\ s^{-2}\ !!!$$

$a \propto R^{-2}$!

Le equazioni del moto sono individuate in base alla legge di gravitazione, anche questa dovuta a Newton: **tutti i corpi si attraggono mutuamente con una forza che è inversamente proporzionale al quadrato della distanza ed è proporzionale tramite una costante universale al prodotto delle masse dei due corpi. La forza di attrazione gravitazionale tra due corpi ha poi la direzione della retta che li congiunge.**



16.3.2015

Un aspetto estremamente importante delle forze gravitazionali: abbiamo formulato la legge di gravitazione inserendo le masse dei corpi celesti. *In linea di principio le costanti che entrano nella forza gravitazionale potrebbero essere del tutto indipendenti dalle masse che entrano nella seconda legge di Newton.* Talvolta si parla di "**massa inerziale**" e di "**massa gravitazionale**" ma tutta l'evidenza punta al fatto che esiste una stretta proporzionalità tra le due masse e quindi in pratica si possono identificare.

Questo fatto ha come conseguenza che, ad esempio, la traiettoria di un satellite artificiale intorno alla Terra NON dipende dalla sua massa - (l'alternativa sarebbe che un satellite a più stadi che si frammenti nei suoi componenti dovrebbe modificare la sua orbita...e ciò è assolutamente escluso dall'esperienza)[1].
Quindi ci sono evidenze assolutamente convincenti su questo fatto. Di più: l'equivalenza massa Grav./massa Inerziale è alla base della teoria di Einstein della Gravitazione sotto forma del "Principio di Equivalenza".
STOP! Torniamo a questioni più concrete!

[1] Esperimenti: Eötvös, precisione 5×10^{-9}. Dicke, 3×10^{-11}.

Table 2.2. *Tests of the weak equivalence principle*

Experiment	Reference	Method	Substances tested	Limit on $\|\eta\|$
Newton	Newton (1686)	Pendula	Various	10^{-3}
Bessel	Bessel (1832)	Pendula	Various	2×10^{-5}
Eötvös	Eötvös, Pekar, and Fekete (1922)	Torsion balance	Various	5×10^{-9}
Potter	Potter (1923)	Pendula	Various	2×10^{-5}
Renner	Renner (1935)	Torsion balance	Various	2×10^{-9}
Princeton	Roll, Krotkov, and Dicke (1964)	Torsion balance	Aluminum and gold	10^{-11}
Moscow	Braginsky and Panov (1972)	Torsion balance	Aluminum and platinum	10^{-12}
Munich	Koester (1976)	Free fall	Neutrons	3×10^{-4}
Stanford	Worden (1978)	Magnetic suspension	Niobium, Earth	10^{-4}
Boulder	Keiser and Faller (1979)	Flotation on water	Copper, tungsten	4×10^{-11}
Orbital[a]	Worden (1978)	Free fall in orbit	Various	$10^{-15} - 10^{-18}$[a]

[a] Experiments yet to be performed.

Le equazioni del moto che descrivono il sistema solare assumono perciò questa forma:

$$m_\alpha \frac{d^2\vec{x}_\alpha}{dt^2} = -\frac{G_N M_\odot m_\alpha}{r_\alpha^3}\vec{x}_\alpha - \Sigma_{\beta\neq\alpha}\frac{G_N m_\beta m_\alpha}{r_{\alpha\beta}^3}(\vec{x}_\alpha - \vec{x}_\beta)$$

attrazione del Sole

attrazione degli altri pianeti

L'indice α assume i valori da 1 a 9 in corrispondenza ai nove pianeti. Sulla destra compare la forza di attrazione del Sole più la forza di attrazione esercitata dagli altri pianeti

Queste equazioni sono state studiate da generazioni di Matematici, Fisici, Astronomi. Dopo due secoli di sforzi eroici Henry Poincaré ha dimostrato che una soluzione analitica ... non esiste. Ai nostri giorni si utilizza il calcolo automatico e si possono esplorare i prossimi milioni di anni alla ricerca di eventuali anomalie nel moto dei pianeti.

Il caso più semplice dove si può calcolare la soluzione in modo analitico è quello di un unico pianeta. In gergo si chiama “il problema dei due corpi”, mentre già il problema dei tre corpi non è alla portata del calcolo esatto.

Il problema dei due corpi

Lo studio del singolo pianeta ci permette di introdurre alcuni concetti importanti. Il primo è quello di

MOMENTO ANGOLARE

Se x(t) rappresenta il vettore di posizione del pianeta rispetto al sistema di riferimento il cui centro è fissato nel centro del Sole, l'equazione del moto è

$$m\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = -\frac{G_N M_\odot m}{r^3}\vec{x}$$

dove indichiamo con *r* la lunghezza di *x*. La massa del pianeta si cancella e non entra nella soluzione. Ora definiamo il momento angolare come

$$\vec{M} = m\vec{x} \wedge \vec{v}$$

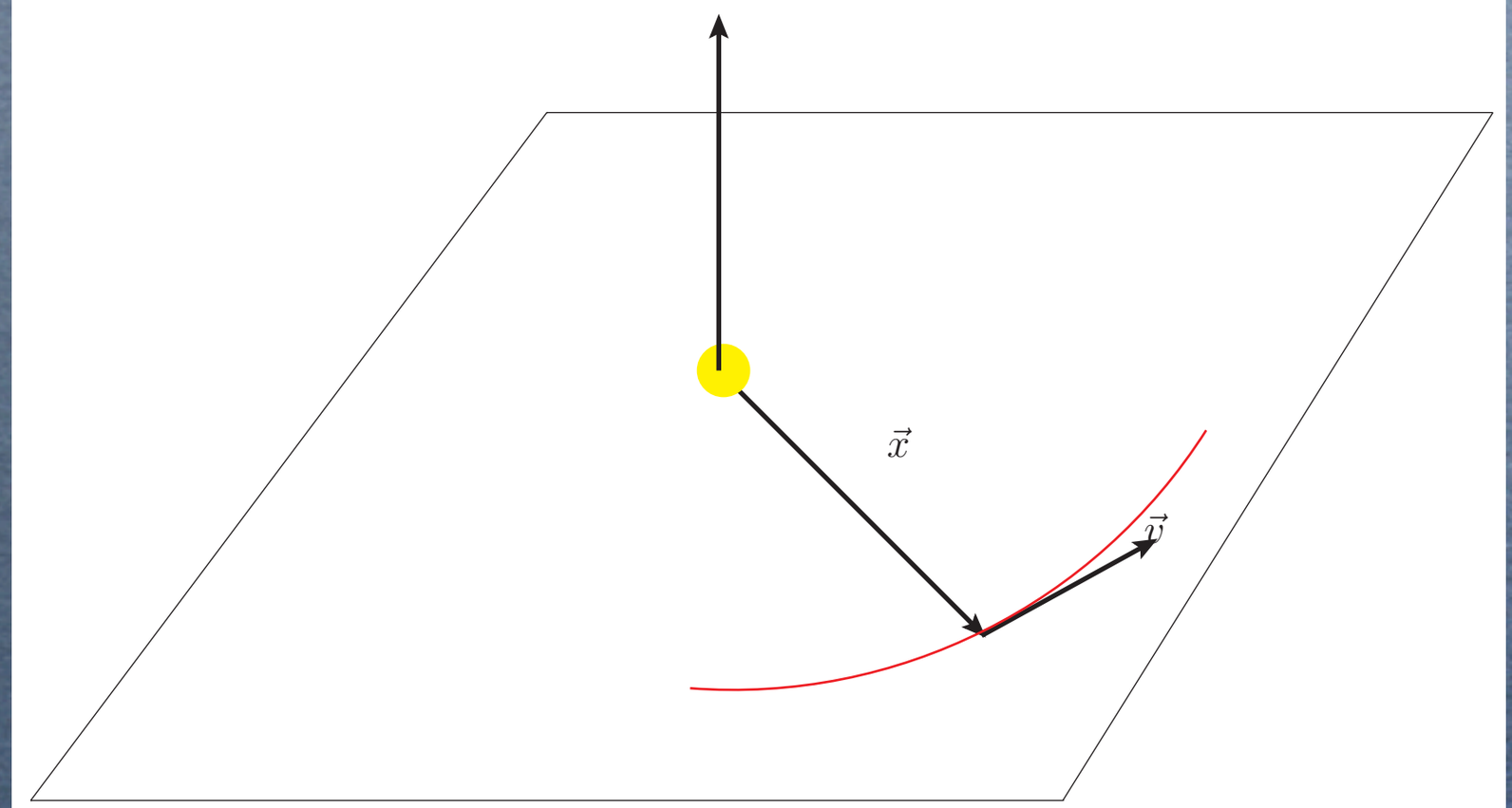
$$\vec{M} = m\vec{x} \wedge \vec{v}$$

Si tratta di un vettore che ha direzione ortogonale sia al vettore posizione che al vettore velocità. Calcoliamo la derivata di M rispetto al tempo:

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = m\frac{d\vec{x}}{dt} \wedge \vec{v} + m\vec{x} \wedge \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Il primo termine si annulla perchè $v \wedge v = 0$. Il secondo termine anche si annulla perchè la forza è diretta lungo x ! Ne segue che il vettore M è costante nel tempo. Si dice che il momento angolare "*si conserva*". Ma ciò implica che x e v si mantengono ortogonali durante il moto a un vettore fisso nello spazio. Dunque il moto avviene in un piano e ciò semplifica notevolmente il calcolo.

$$\vec{M} = m\vec{x} \wedge \vec{v}$$



Scegliamo il riferimento in modo che l'asse z coincida con la direzione del momento angolare. Possiamo restringere i vettori x e v al piano x-y. L'equazione del moto diventa

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -G_N M_\odot x/r^3$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -G_N M_\odot y/r^3$$

dove $r=\sqrt{x^2+y^2}$. Non risolveremo ora questo sistema di equazioni differenziali in generale in quanto abbiamo bisogno di altri concetti e risultati che ci permetteranno di arrivarci con tutta facilità. Intanto però possiamo controllare che una classe di soluzioni sono già a disposizione: le traiettorie circolari per le quali

$$(x,y) = (r\ cos\ \omega t,\ r\ sin\ \omega t)$$

Inserendo quest'espressione nelle equazioni troviamo

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2\, x = -G_N M_\odot x/r^3$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\omega^2\, y = -G_N M_\odot y/r^3$$

Le equazioni sono soddisfatte perciò se

$$\omega^2 = G_N M_\odot/r^3$$

ossia ritroviamo la terza legge di Keplero!

$$\frac{(2\pi)^2 r^3}{T^2} = G_N M_\odot$$

Proprietà fondamentali delle equazioni differenziali

Un'equazione differenziale è costituita da una relazione matematica che lega tra loro una o più funzioni con le loro derivate. Genericamente

$$F(f_\alpha, f'_\alpha, \ldots, f^{(n)}_\alpha) = 0$$

Le derivate, indicate con l'apice, sono eseguite rispetto alla variabile indipendente, in meccanica rispetto al tempo "*t*".

Le equazioni di Newton sono di questa forma, e l'ordine di derivazione è 2. Quindi sono "equazioni differenziali del secondo ordine". Il teorema fondamentale riguardo le ED afferma che sotto alcune condizioni di continuità dei termini che formano l'equazione, ESISTE ed È UNICA la soluzione se vengono specificati i valori delle funzioni incognite e delle loro derivate fino all'ordine n-1; nel caso della meccanica è quindi necessario conoscere i valori iniziali delle posizioni e delle velocità per tutti i corpi che compongono il sistema. Ad es. nel caso del sistema solare, posizioni e velocità ad un determinato istante per tutti i pianeti, satelliti, asteroidi, comete, polvere interplanetaria,... cosa evidentemente impossibile.

È evidente che i corpi più piccoli hanno scarsa influenza sul moto dei pianeti, perciò il calcolo delle orbite si può effettuare restringendosi a quei corpi che abbiano una massa non inferiore, ad es., a quella della Luna (~1/81 della massa terrestre).

Ovviamente, un conto è sapere che esiste una soluzione e che essa è unica, un altro è costruire la soluzione. Inoltre è importante considerare il fatto che le condizioni iniziali non sono MAI conosciute con accuratezza infinita. È quindi responsabilità di chi calcola le soluzioni sincerarsi quale sia l'impatto sulla soluzione dell'incertezza sui dati a propria disposizione...ma questo non sarà un vostro problema in questo corso introduttivo!

Fine della quarta lezione

Prossima lezione: martedí 17.3 ore 14:45