Università degli Studi di Parma

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica, Elettronica e delle Telecomunicazioni

anno accademico 2013-2013

# Fisica 1

Prof. Enrico Onofri,
titolare del corso

Dr. Emilia Liviotti,
esercitazioni

16 marzo 2015

# Prima di proseguire

Abbiamo utilizzato il termine “forza” come introdotto dalla legge di Newton. Il concetto richiede qualche approfondimento. Come si misura una forza? Quali sono le unità di misura piû comuni? Quali sono le forza agenti in natura?

Dobbiamo distinguere tra le forze “fondamentali” e quelle che incontriamo nel mondo che ci circonda e la cui natura è spesso oscura.

A livello fondamentale le forze sono di quattro tipi:

1. forze gravitazionali
2. forze elettromagnetiche
3. forze “deboli” (o interazioni deboli)
4. forze “nucleari” (o interazioni forti)

A livello di esperienza quotidiana abbiamo a che fare solo con le prime due, anche se le ultime sono responsabili della struttura dell materia e quindi ci interessano molto da vicino. Le forze “deboli” sono alla base del decadimento radioattivo; le forze nucleari tengono legato il nucleo atomico e agiscono a distanze dell’ordine di $10^{-5}$ rispetto al raggio atomico!

Le forze gravitazionali, di cui abbiamo già parlato, reggono la dinamica del sistema solare, si manifestano come forza peso alla superficie di un pianeta e in conclusione è la forza con cui abbiamo a che fare più frequentemente. Conviene ricordare che, come scoperto da Newton, la forza peso coincide con la forza di attrazione gravitazionale e cioè l'accelerazione di gravità g è esprimibile in termini di costante di Newton G, del raggio terrestre e della massa della Terra (*Esercizio n.3*).

Le forze elettromagnetiche (⇒ Fisica2!) a livello atomico tengono legati gli atomi e le molecole, si manifestano attraverso la radiazione luminosa, infrarossa, X, γ, insomma caratterizzano fortemente la Natura come la conosciamo a livello macroscopico ed entrano a tutti i livelli nella moderna tecnologia, nonché entrano nella forza muscolare che ha carattere chimico/biologico, ma è riconducibile all'elettromagnetismo.

# UNITÀ

Nel S.I. la forza è un'unità derivata e si misura in termini di

$M\,L\,T^{-2}$

ossia $m\,Kg\,s^{-2}$

A questa unità si dà (giustamente) il nome di

***newton***

1 newton è la forza che imprime un'accelerazione di 1 $m/s^2$ ad una massa di 1 Kg

Un'altra unità utilizzata in pratica è quella del

kilogrammo-peso

equivalente alla forza peso cui è soggetta una massa di 1 Kg.

Evidentemente **1 Kgp = 9.8 newton**

Proseguiamo: introdurremo ora concetti base della meccanica . Le loro proprietà sono conseguenza delle leggi di Newton e permettono di orientarsi nella molteplicità dei fenomeni legati al movimento dei corpi.

# MOMENTO LINEARE

# MOMENTO ANGOLARE

# LAVORO

# ENERGIA

## Momento lineare
(quantità di moto)

Si definisce momento lineare p di un punto materiale di massa m il prodotto della massa per la velocità: $p = m v$. Si tratta quindi di una grandezza derivata, ma importante per numerose considerazioni interessanti.

Innanzitutto il momento lineare entra naturalmente nelle equazioni del moto che possono essere scritte direttamente come

$$dp/dt = F$$

il che non costituisce un grande vantaggio...ancora...

Tuttavia consideriamo un sistema di punti di materiali (ad esempio i pianeti del sistema solare). Le equazioni del moto le abbiamo incontrate nella lezione n. 4. Immaginiamo di sommare tra loro tutte le equazioni, includendo anche il Sole (quindi α e β corrono da 1 a 10 e l'indice 1 corrisponde al Sole)

$$\Sigma_\alpha m_\alpha \frac{d^2\vec{x}_\alpha}{dt^2} = -\Sigma_{\alpha\neq\beta} \frac{G_N m_\beta m_\alpha}{r^3_{\alpha\beta}} (\vec{x}_\alpha - \vec{x}_\beta)$$

La somma di sinistra è uguale alla derivata del momento lineare totale $P = \Sigma_\beta p_\beta$ .
Il membro di destra si annulla!

Un sistema di punti materiali si dice “isolato” se le uniche forze attive nel sistema sono forze che si esercitano tra i punti e che quindi, in base alla terza legge di Newton, sono a due a due uguali ed opposte. La terza legge ci dice quindi che il momento lineare totale di un sistema isolato è costante nel tempo.

Una considerazione simile vale per il momento angolare totale del sistema di punti:

$$M = \Sigma_\beta \, x_\beta \wedge p_\beta$$

Si noti che M è definito rispetto a uno specifico sistema di riferimento. Vedremo poi come cambia M sotto trasformazioni di riferimento. Ancora

$$d/dt \, M = \Sigma_\beta \, v_\beta \wedge p_\beta + \Sigma_\beta \, x_\beta \wedge F_\beta$$

Il primo termine $\mathbf{v}\wedge\mathbf{p}$ si annulla perchè velocità e momento sono paralleli. Il secondo si può riformulare così:

$$dM/dt = \Sigma_\beta x_\beta \wedge \Sigma_\varrho F_{\beta\varrho}$$

dove $F_{\beta\varrho}$ indica la forza esercitata sul punto β dal punto ρ.

La terza legge di Newton ci dice che

$$F_{\beta\varrho} = -F_{\varrho\beta}$$

ne segue che possiamo manipolare l'espressione per la derivata del momento angolare totale così

(qui si scambiano le lettere ρ e β)

$$dM/dt = \tfrac{1}{2}(\Sigma_\beta x_\beta \wedge \Sigma_\varrho F_{\beta\varrho} + \Sigma_\varrho x_\varrho \wedge \Sigma_\beta F_{\varrho\beta}) =$$
$$= \tfrac{1}{2}(\Sigma_\beta x_\beta \wedge \Sigma_\varrho F_{\beta\varrho} - \Sigma_\varrho x_\varrho \wedge \Sigma_\beta F_{\beta\varrho})$$
$$= \tfrac{1}{2}\Sigma_\beta \Sigma_\varrho (x_\beta - x_\varrho) \wedge F_{\beta\varrho}$$

***Se le forze tra due corpi si esercitano lungo la linea che li congiunge allora dM/dt=0 !***

Abbiamo allora raggiunto la formulazione dei due principi fondamentali della dinamica dei sistemi di punti materiali:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_{\alpha} \vec{F}_{\alpha}^{\text{ext}}$$

17.3.2015

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \sum_{\alpha} \vec{x}_{\alpha} \wedge \vec{F}_{\alpha}^{\text{ext}}$$

dove $P$ ed $M$ sono il momento lineare totale e il momento angolare totale del sistema; le forze sono quelle “esterne” ossia che agiscono sui punti del sistema, ma sono dovute ad altri agenti, mentre *le forze interne non hanno influenza su P e M*. Un sistema isolato, per il quale le forze esterne sono nulle, possiede perciò due grandezze che vengono conservate inalterate nel moto, momento lineare e momento angolare totali.

A questa proprietà  dei sistemi di masse puntiformi isolati si fa riferimento come

*"conservazione del momento lineare totale"*

**e**

*"conservazione del momento angolare totale"*

17.3.2015

# LAVORO-ENERGIA

Veniamo ora a una grandezza fisica della massima importanza per i sistemi meccanici (e piú in generale per tutta la Fisica). Dobbiamo partire da un concetto preliminare, quello di  LAVORO di una FORZA.

Si dice che una forza produce lavoro quando il punto di applicazione della forza si sposta nella direzione della forza stessa. Più in generale si definisce il lavoro infinitesimo per una forza F e uno spostamento infinitesimo dx la quantità

$$dL = \vec{F} \cdot \vec{dx}$$

La definizione risponde al nostro concetto intuitivo di lavoro (utile). Si pensi a una persona che spinge un pacco sul pavimento: la forza applicata serve a vincere l'attrito e spostare l'oggetto; il lavoro utile è naturale identificarlo con il prodotto **F x spostamento**. Mentre un'eventuale forza perpendicolare al pavimento non corrisponde a un lavoro efficace, quantunque possa avere un effetto utile (ridurre l'attrito). Quello che conta nella misura del lavoro è la componente della forza nella direzione dello spostamento. Se la forza NON fosse costante si definisce il lavoro attraverso la somma di tutti i contributi infinitesimali, e cioè

$$L = \int F \cdot dx$$

Applichiamo la definizione alla caduta dei gravi.

Consideriamo una massa **m** posta all'altezza $z_1$ con velocità $v_1$.
Sotto l'azione della sola gravità la massa subirà in un tempo **t**
uno spostamento passando da $z_1$ a $z_2$

$$z_2 = z_1 + v_1 t - \tfrac{1}{2} g t^2$$

Calcoliamo il lavoro eseguito dalla forza peso ($F = mg$) in direzione verticale verso il basso. La forza è costante, dunque

$$L = mg(z_1 - z_2)$$

Nello stesso tempo la velocità cambia secondo la relazione

$$v_2 = v_1 - g t$$

Si trova una relazione molto semplice se calcoliamo la differenza

$$v_2^2 - v_1^2 = (v_1 - g t)^2 - v_1^2 = -2 g v_1 t + g^2 t^2 \equiv 2g(z_1 - z_2)$$

da cui

$$\tfrac{1}{2} m v_2^2 - \tfrac{1}{2} m v_1^2 = mg (z_1 - z_2) = L$$

*Il lavoro eseguito dalla forza peso coincide con la variazione della quantità* $\frac{1}{2}mv^2$. La massa cioè ha perso quota ma ha guadagnato in velocità e il lavoro della forza peso si è trasformato in **ENERGIA CINETICA**, cioè energia di movimento. Questa stessa variazione di energia di movimento coincide con la variazione di quota misurata da $mg\,(z_1-z_2)$. Si conviene che alla quota $z$ viene assegnata una **ENERGIA POTENZIALE** $m\,g\,z$ e in seguito a una variazione di energia potenziale è associata una variazione uguale e contraria di energia cinetica; infatti dalle relazioni precedenti troviamo

$$\frac{1}{2}\,m\,v_2^2 + m\,g\,z_2 = \frac{1}{2}\,m\,v_1^2 + m\,g\,z_1$$

Ne concludiamo che durante il movimento **la somma di energia cinetica e di energia potenziale rimane costante**. Questa viene definita come **ENERGIA TOTALE** del sistema meccanico. Il lavoro della forza peso coincide con la variazione di energia cinetica e quindi con l'opposto della variazione di energia potenziale. Questi risultati offrono strumenti di calcolo molto efficaci. Per es. se ci chiediamo qual'è la velocità di un grave che cade da **fermo dall'altezza h al suolo** *non è necessario riprendere in mano le equazioni di Newton*, **è sufficiente considerare che**

$$\tfrac{1}{2}m\,v^2 + 0 = 0 + m\,g\,h$$

**e dunque**

$$v^2 = 2\,g\,h$$

# Unità

**Lavoro ed energia hanno la stessa unità di misura, essendo equivalenti. Nel S.I. è automatico definire l'unità di lavoro/energia joule[1] come il lavoro effettuato da una forza di 1 newton con uno spostamento di 1 metro.**

Il nome di Joule sarà incontrato più avanti quando troveremo l'equivalenza tra lavoro/energia e calore. Nel sistema cgs l'unità è l'erg, il lavoro di una forza di un dyn = g cm/s² per lo spostamento di 1 cm; dunque

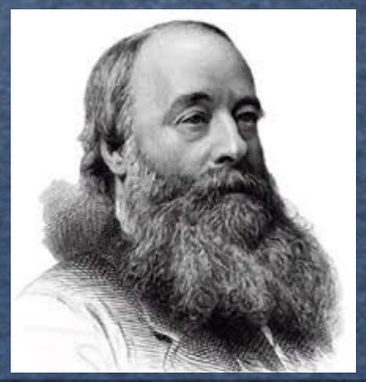
1 erg = 1 cm² g/s².

Tenendo conto dei vari fattori di proporzionalità

1 erg = $10^{-7}$ joule

Per avere un'idea precisa, il joule corrisponde all'energia cinetica di una massa di due Kg in moto alla velocità di un m/s. Un auto da una tonnellata a 100 km/h che energia ha in joule? 385802! Non sarebbe agevole esprimerla in erg!

[1]**in onore di** James Prescott Joule (1818–1889)



La conservazione dell'energia totale

$E = T + V =$

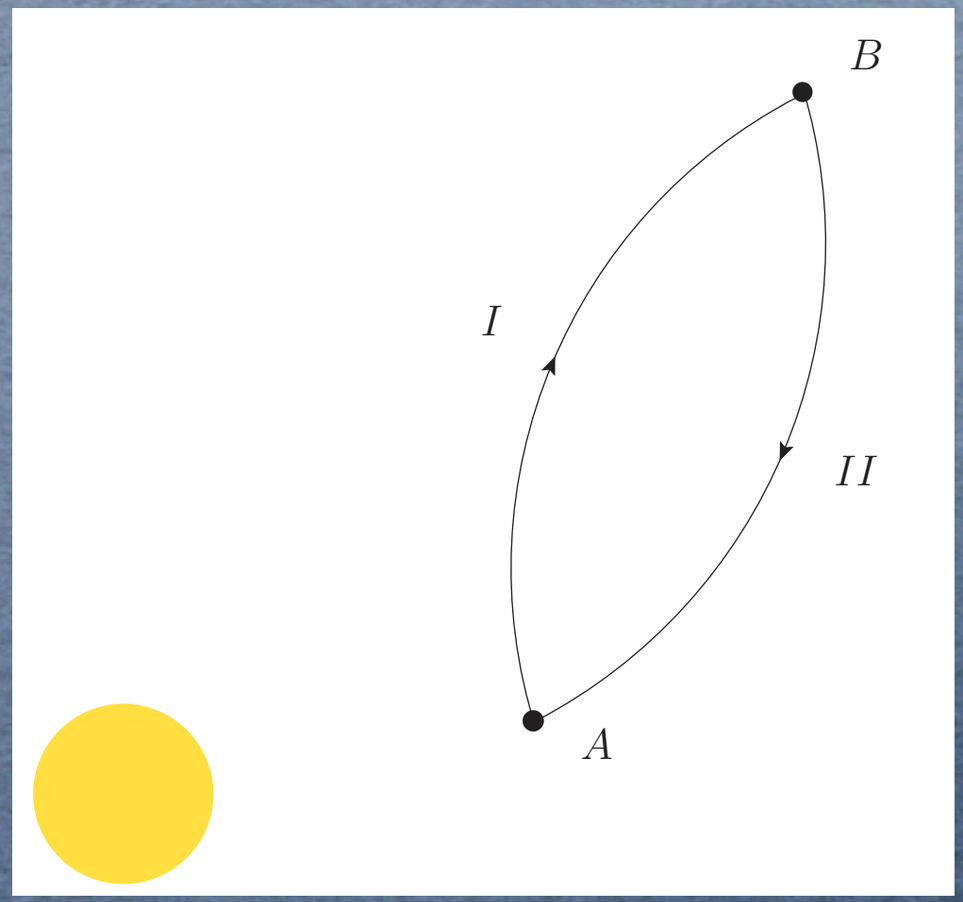
**energia cinetica + energia potenziale**

è uno dei fatti più importanti della meccanica e si estende a tutta la Fisica con le dovute precisazioni. L'abbiamo visto tuttavia solo nel caso della forza peso.

Cosa succede ad es. nel caso della forza gravitazionale che agisce nel sistema solare? Consideriamo due punti A e B in posizione qualunque rispetto al Sole e calcoliamo il lavoro della forza gravitazionale su una massa che si sposta per qualunque motivo da A a B lungo una determinata traiettoria:

Immaginiamo di seguire il cammino I da A a B; il lavoro è dato da

$$L_I = -G_N M_\odot \, m \int_I \frac{\vec{x} \cdot d\vec{x}}{r^3}$$




Per la legge di Newton si ha che il lavoro coincide con l'integrale

$$L_I = m \int_I \frac{d^2\vec{x}}{dt^2} \cdot d\vec{x} = m \int_I \frac{d^2\vec{x}}{dt^2} \cdot \frac{d\vec{x}}{dt}\, dt =$$

$$\tfrac{1}{2} m \int_I \frac{d}{dt} \left(\vec{v} \cdot \vec{v}\right)\, dt = \tfrac{1}{2}(m v_B^2 - m v_A^2)$$

***Cosa succederebbe se il lavoro compiuto dalla forza gravitazionale lungo un diverso cammino II fosse diverso da quello lungo I, per esempio minore***? Un effetto abbastanza peculiare. La massa m potrebbe essere condotta indietro lungo il cammino II  e il lavoro totale sarebbe diverso da zero; ciò implicherebbe che la velocità al ritorno in A sarebbe maggiore di quella con cui si è partiti. Si realizzerebbe cosí un **moto perpetuo e la generazione di energia dal nulla,** qualcosa di contrario a qualunque esperienza. Al di là di questa considerazione tuttavia si può dimostrare in modo formale che **il lavoro è indipendente dal cammino una volta fissati gli estremi e di conseguenza anche la differenza di** $\frac{1}{2} m v^2$ **agli estremi A e B non dipende dal cammino percorso ma è funzione solo diei punti estremi A e B.**

# L'energia potenziale della gravitazione

Calcoliamo allora il lavoro della forza gravitazionale.
Tenendo da parte il coefficiente costante $GMm$ si trova

$$-\int_{I:A\to B}\frac{\vec{x}\cdot d\vec{x}}{|x|^3}=-\int_{I:A\to B}\frac{\frac{1}{2}d(\vec{x}\cdot\vec{x})}{|x|^3}=$$

$$-\int_{I:A\to B}\frac{\frac{1}{2}dr^2}{r^3}=-\int_{I:A\to B}\frac{dr}{r^2}=$$

$$\frac{1}{r(B)}-\frac{1}{r(A)}$$

Così $L = GMm/r(B) - GMm/r(A)$
***indipendentemente dal cammino.***

Mettendo insieme con la formuladi pag. 20 troviamo

$$\frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = GM_\odot m\left(\frac{1}{r(B)} - \frac{1}{r(A)}\right)$$

e quindi

$$\frac{1}{2}mv_A^2 - GM_\odot m\frac{1}{r(A)} = \frac{1}{2}mv_B^2 - GM_\odot m\frac{1}{r(B)}$$

Questo mostra che esiste una grandezza fisica che si mantiene inalterata nel moto da un punto all'altro sotto l'azione della forza gravitazionale: è l'energia meccanica formata dalla somma dell' **ENERGIA CINETICA** del punto materiale con l'**ENERGIA POTENZIALE = -GMm/r**

Quando il lavoro di una forza, o meglio di un **campo di forze**, come quella gravitazionale non dipende dal cammino percorso, si dice che la forza è **conservativa**.

Nel caso gravitazionale si parla di campo di forze in quanto la forza si manifesta e agisce in ogni punto dello spazio. Noi possiamo misurare il suo effetto anche senza riferirci alla posizione del Sole o della Terra.

## Come si riconosce un campo di forze conservativo?

Abbiamo finora due esempi: la forza di gravità sulla superficie terrestre per la quale la forza è data punto per punto da mg(0,0,-1) e per cui esiste l'energia potenziale

$$V(x,y,z) = m\,g\,z$$

e la forza di gravità che attrae verso un centro di massa come il Sole o la Terra, per la quale $F = -GMm\,(x,y,z)/r^3$ con energia potenziale

$$V = -\,GMm\,/\,r$$

(r è la distanza dal centro di attrazione gravitazionale).

# Una domanda importante è la seguente

Quando è che un campo di forze $F=(F_x, F_y, F_z)$ è conservativo?

cioè il lavoro compiuto dalle forze non dipende dal cammino seguito?

Chiediamoci prima: **Come si passa da V a F?**
C'è un'operazione matematica elementare che permette di ricavare F da V: *la componente x di F è data dalla derivata di -V rispetto a x (considerando y e z costanti)*. Lo stesso vale per le altre componenti. Si indica formalmente con

$$\mathbf{F} = -\nabla V$$

Ad es nel caso della gravità sulla superficie terrestre,

$$V = mgz \Longrightarrow F = (-\partial V/\partial x, -\partial V/\partial y, -\partial V/\partial z) =$$

$$(0,0,-mg)$$

## Una questione di notazione matematica:

$$\partial$$

**Si utilizza il simbolo "∂"** per indicare le *"derivate parziali"*, ossia le derivate di funzioni di più variabili.

Ad es.

$$\partial (x\, y^2\, z)/\partial y = x\, 2y\, z$$

Nel caso del campo di forza solare

$$V = -GMm/r \Longrightarrow F = -(\partial/\partial x, \partial V/\partial y, \partial V/\partial z) =$$

$$(\partial/\partial x\ GMm/r, \partial/\partial y\ GMm/r, \partial/\partial z\ GMm/r)$$

$$= (-Gm\ x/r^3, -Gm\ y/r^3, -Gm\ z/r^3)$$

È noto che se $F=(F_x,F_y,F_z)=-(\partial V/\partial x,\partial V/\partial y,\partial V/\partial z)$ allora

$$\frac{dF_y}{dx} = \frac{dF_x}{dy}$$

$$\frac{dF_z}{dy} = \frac{dF_y}{dz}$$

$$\frac{dF_x}{dz} = \frac{dF_z}{dx}$$

in quanto

$$\frac{d}{dx}\frac{dV}{dy} = \frac{d}{dy}\frac{dV}{dx}$$

etc., e queste sono anche le condizioni sufficienti affiché F sia un campo conservativo!

$E = ½\, m\, v^2 - GMm/r = costante$

contiene molte informazioni importanti sulle proprietà del moto.

ad es. se $E < 0$ allora il moto è quello dei pianeti, un'orbita chiusa, e la distanza dal Sole non può aumentare oltre la distanza massima

$r_+ = GMm/|E|$ .

# Velocità di fuga

Un'applicazione di questi concetti: ***un satellite artificiale è in orbita circolare ad una distanza R dal centro della Terra. A quale velocità è necessario accelerarlo per sottrarlo alla gravità terrestre e permettergli così di allontanarsi indefinitamente?***

Per l'orbita circolare vale la relazione

$$v^2/R = GM/R^2$$

(che discende direttamente da F=ma ricordando la formula dell'accelerazione centripeta).

L'energia totale è quindi

$$E = \tfrac{1}{2}\, m\, v^2 - GMm/R = -\tfrac{1}{2}\, GMm/R < 0$$

# Velocità di fuga

Se vogliamo che il satellite si sottragga all'attrazione terrestre la sua energia dovrà essere positiva e quindi

$$\frac{1}{2}mv^2 - GMm/R \geqq 0$$

ossia

$$v^2 \geqq 2GM/R$$

dunque ***dobbiamo accelerare il satellite di un fattore $\sqrt{2}$*** rispetto alla velocità orbitale. Vedere l'esercizio n.13 per i dettagli numerici.

Vediamo ora come si può esprimere l'energia di un corpo in moto attorno alla Terra, o a un qualunque centro di attrazione gravitazionale, in termini di distanza (r) e angoli (lat. e long.). La velocità si può esprimere facilmente in funzione delle coordinate sferiche $(r, \Theta, \phi)$. Si trova attraverso un calcolo elementare

$$v^2 = (dr/dt)^2 + r^2(d\Theta/dt)^2 + r^2 \sin^2\Theta\, (d\phi/dt)^2$$

Le velocità angolari si possono a loro volta riesprimere in termini di momento angolare, infatti

$$M^2 = (m\, x \wedge v)^2 = m^2(x^2v^2 - (x.v)^2)$$

e perciò

$$v^2 = (x.v)^2/r^2 + M^2/(m^2r^2)$$

ora: $x.v = x.dx/dt = \frac{1}{2}\, d\, r^2/dt = r\, dr/dt$

in definitiva l'energia cinetica di un corpo descritto nel suo moto in coordinate sferiche assume la forma semplice

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (dr/dt)^2 + M^2/(2mr^2)$$

17.3.2015

Il vantaggio è che M² è costante nel tempo e quindi possiamo dedurre la seguente relazione molto semplice da utilizzare:

$$E = \frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{M^2}{2mr^2} - \frac{GM_\oplus m}{r}$$

Da qui possiamo dedurre che per fissata energia e momento angolare la distanza varia tra un minimo valore e uno massimo dati dalle radici dell'equazione

$$M^2/(2mr^2) - GMm/r = E$$

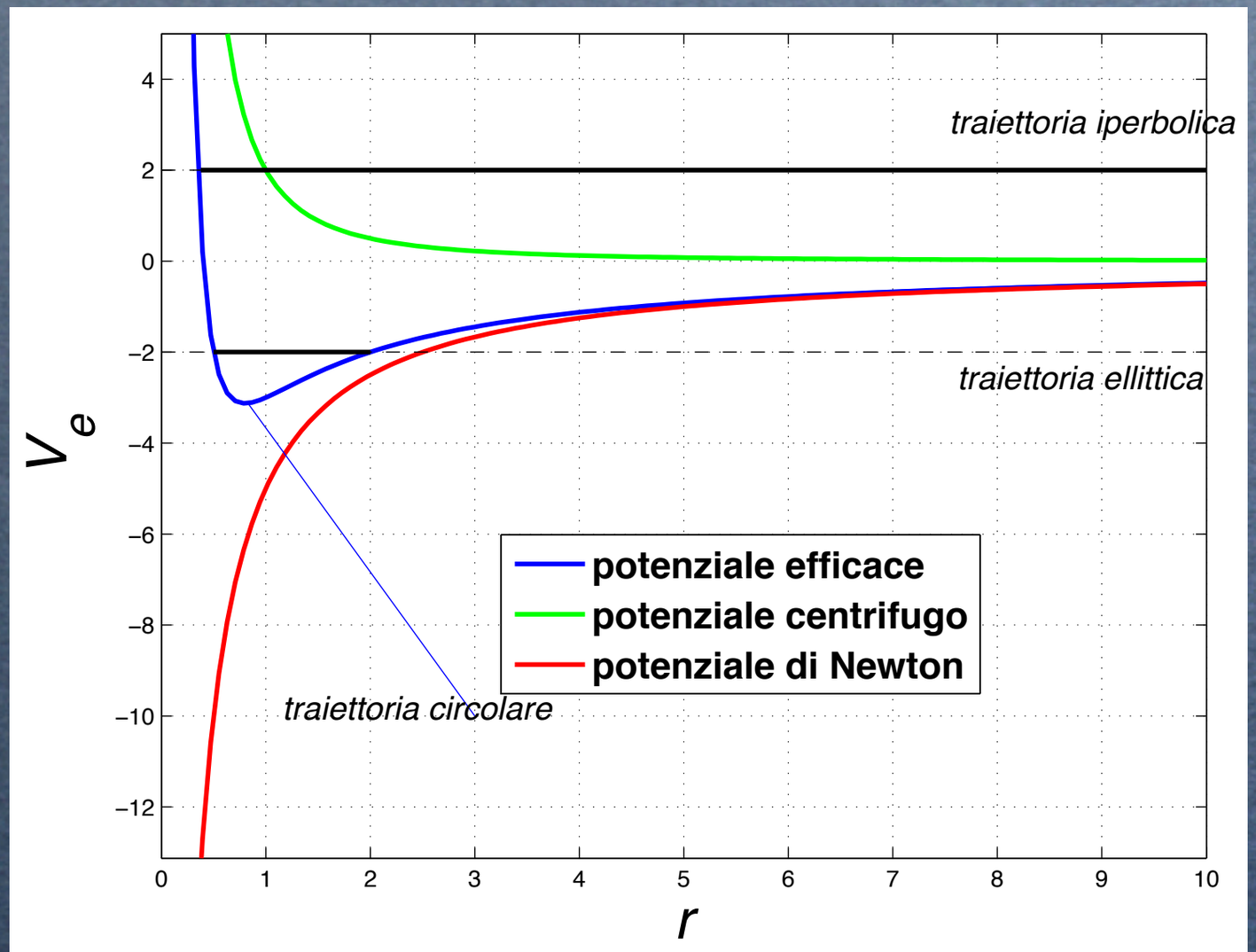
Per l'orbita circolare si ha $M^2 = m^2 r^2 v^2 = m^2 r^2 GM/r$ e dunque, $M^2/2mr^2 = GMm/2r$ e infine $E = -\frac{1}{2}GMm/r$, come sappiamo già. Si vede che il moto in direzione radiale è caratterizzato da una "**energia potenziale efficace**"

$$V_{\text{eff}} = -\frac{GM_{\oplus}m}{r} + \frac{M^2}{2mr^2}$$

Deve essere necessariamente

$$E \geqq V_e(r)$$

Guardiamo il diagramma di $V_e(r)$:




Il diagramma si riferisce a un fissato valore di $M^2$. Nel caso circolare il valore del pot.eff. è il minimo possibile e il raggio r è bloccato al suo valore costante. Nel caso ellittico, r oscilla tra un massimo (afelio) e un minimo (perielio). Nel caso iperbolico, l'energia è positiva e il campo gravitazionale non può trattenere il corpo in orbita. Raggiunto il punto di minima distanza il corpo si allontana e non torna mai più vicino al centro attrattore.

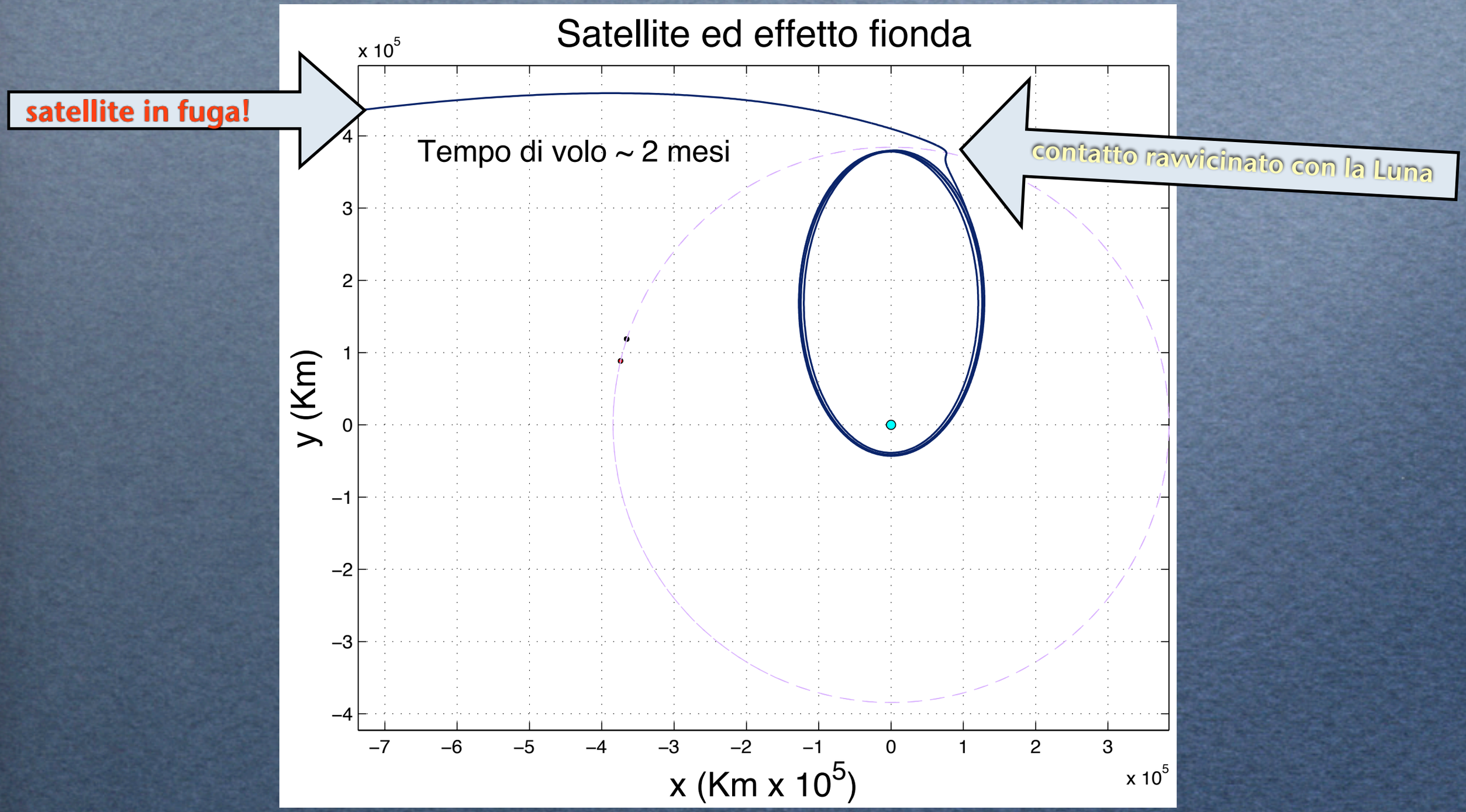
Presto...torneremo sulla Terra dove la meccanica non è cosí "pulita". Concludiamo questo primo contatto con la Meccanica Celeste con un esercizio relativo a un satellite in orbita *geostazionaria*. Il raggio dell'orbita è di circa R=42375 Km (vedi Esercizi) e la velocità orbitale è data da $v^2=GM/R \approx 11094$ Km/h. Cosa succede se acceleriamo o deceleriamo il satellite? Una risposta immediata si ha dal fatto che l'eccentricità dell'orbita è esprimibile semplicemente in termini di v e r al perielio:

$$\varepsilon = \frac{v_<^2 \, r_<}{G_N \, M_\oplus} - 1$$

perciò $v^2 = GM/r$ per l'orbita circolare. Se aumentiamo la velocità a v' l'eccentricità da zero passa a $\varepsilon = v'^2/v^2 - 1$ e dunque quando v' raggiunge il valore $\sqrt{2}\,v$ *l'eccentricità raggiunge il valore 1 che corrisponde a un'orbita parabolica e dunque si ha la traiettoria "di fuga" . Questo mostra che per qualunque orbita circolare la velocità di fuga è sempre* $\sqrt{2}\,v$ *ovvero è necessario raddoppiare l'energia cinetica dell'oggetto in orbita per sottrarlo alla gravità della Terra.*

# *Sembra tutto facile, ma...*

Questo è un calcolo basato sulla dinamica Terra-Satellite, quello che si definisce “dinamica dei due corpi”, e questo presenta forti limitazioni. L’attrazione di Luna e Sole modificano profondamente la dinamica. Se doveste essere su quel satellite come passeggeri non dovreste fidarvi del calcolo approssimato. ***Rischiereste di essere sbalzati al di là della Luna!*** Nella sezione ‘problemi’ trovate un programma Matlab (*satellite.m*) che include l’attrazione lunare (ToDo: aggiungere il Sole - qualcuno di voi vuole provarci?) e si possono fare varie esperienze. Ad es. ci si può imbattere in orbite come questa.....




# Velocità ≈ 0.9 x velocità di fuga!

# FINE

## della V lezione

## Prossima lezione
## lunedí 23 marzo ore 9:00

## AVVISO
## non ci sarà lezione il 19.3

*17.3.2015*