Università degli Studi di Parma

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica, Informatica e delle Telecomunicazioni

anno accademico 2014-2015

Fisica 1

Prof. Enrico Onofri,
titolare del corso

Dr. Emilia Liviotti,
esercitazioni

23 marzo 2015

Una storia di antenne e piccioni

Di questi tempi si legge spesso di scoperte importanti conseguite da fisici che lavorano in un laboratorio in Antartide. Questa storia vuole darvi un'idea di cosa si tratta. La storia comincia intorno al 1965 nel New Jersey, Bell Labs. Due fisici, A. Penzias e R. Wilson realizzarono un'antenna estremamente sensibile alle radiazioni "infrarosse" con obiettivi di tipo tecnico, raccogliere l'eco da palloni sonda.



Working at Bell Labs in Holmdel, New Jersey, in 1964, Arno Penzias and Robert Wilson were experimenting with a supersensitive, 6 meter (20 ft) horn antenna originally built to detect radio waves bounced off Echo balloon satellites. To measure these faint radio waves, they had to eliminate all recognizable interference from their receiver. They removed the effects of radar and radio broadcasting, and suppressed interference from the heat in the receiver itself by cooling it with liquid helium to –269 °C, only 4 K above absolute zero.

Per quanto si sforzassero a eliminare tutte le possibili sorgenti di rumore elettronico nell'antenna persisteva un disturbo che ne impediva l'uso desiderato. Si pensò anche, come possibile causa, alla presenza di escrementi sulla superficie dell'antenna (qui entrano i piccioni). Ma a un esame dettagliato e accuratissimo l'antenna si rivelò del tutto priva di incrostazioni.

Il rumore appariva come un segnale infrarosso (pensate alle radiazioni emesse da un telecomando di TV) uniforme e isotropo, cioè uguale in tutte le direzioni spaziali.

Dopo molti giorni di frustrazioni a qualcuno nel gruppo venne un'illuminazione:

GAMOW!

Qualcosa come

BINGO!

George Gamow era un fisico russo che lavorò a lungo a Gottingen nel gruppo di Born e Heisenberg. Fu lui a trovare la spiegazione quantistica del decadimento radioattivo α.
Ma questa è un'altra storia. Dunque Gamow che si interessava anche di cosmologia ebbe l'idea che se era vero il modello di universo originatosi da un'esplosione iniziale (il Big Bang) allora di quella esplosione si sarebbe dovuta conservare un'eco in termini di radiazione elettromagnetica la quale nel processo di espansione dell'Universo avrebbe dovuto "raffreddarsi" e raggiungere un equilibrio pari a circa 4^0 C. La "temperatura" della radiazione è un concetto preciso che incontreremo molto più avanti ed è specificata in base alla "formula di Planck". Ignoriamo i dettagli.



George Gamow
1904-1968

Per inciso, la radiazione infrarossa fu sperimentata a lungo nel periodo 1820-1830 da un brillante fisico italiano qui a Parma, prima di essere costretto alla fuga a causa del coinvolgimento nei moti del ’31. Il fisico si chiamava

Macedonio Melloni

e a lui è intitolato il dipartimento di Fisica della nostra Università.

Macedonio Melloni

Born	11 April 1798 Parma
Died	11 August 1854 Portici
Nationality	Italian
Fields	Physics
Known for	radiant heat

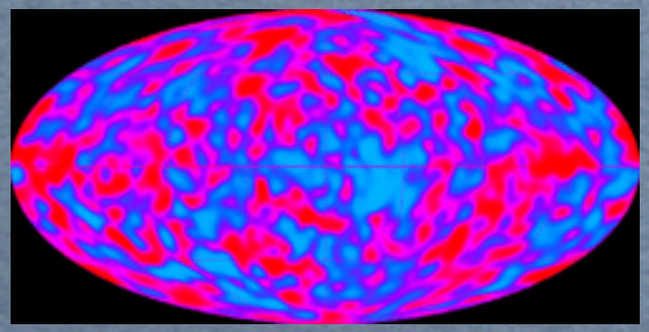


Alcuni dei suoi strumenti si possono ammirare nell’atrio del Dipartimento.

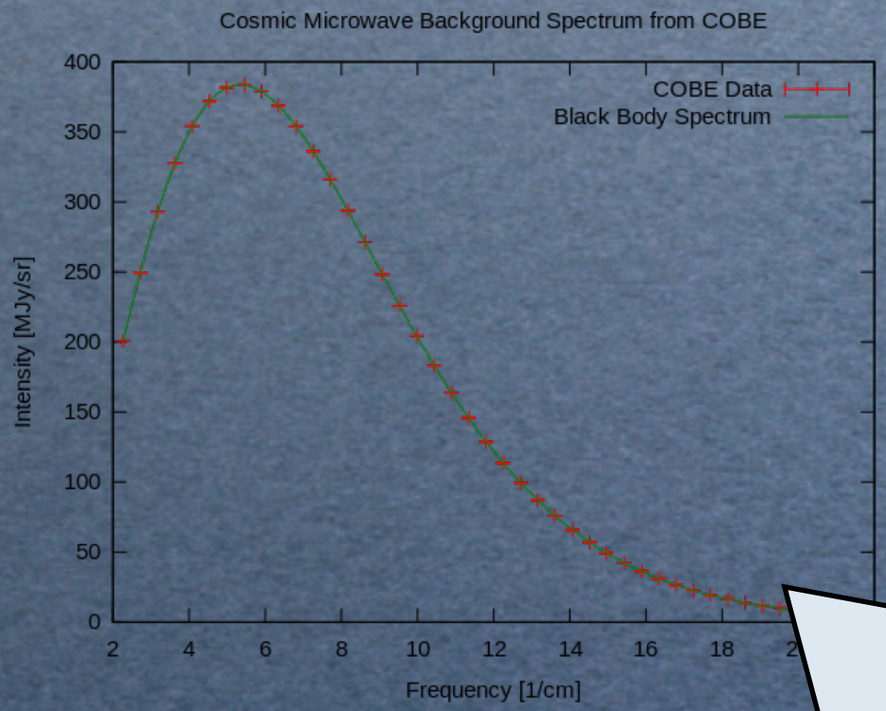
http://www.difest.unipr.it/it/dipartimento/storia-e-missione

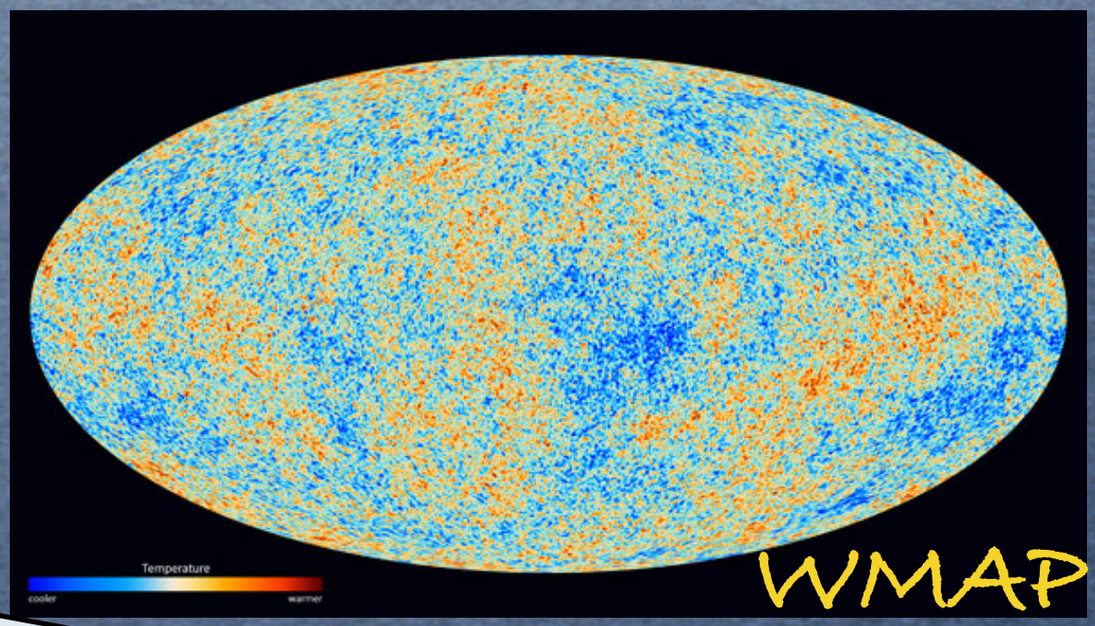
Eliminando il fondo medio della radiazione si scoprí una serie di fluttuazioni nell'intensità della radiazione a microonde cosmica e cio` ha dato il via a una nuova branca dell'astrofisica che studia le prime ere del cosmo (a partire da 300000 anni dopo il BB).

Gli esperimenti si sono succeduti negli ultimi 20 anni (COBE, WMAP) e il più recente BICEP ha osservato un dato importante. Dalla polarizzazione della radiazione si possono dedurre (forse) conseguenze relativamente alla presenza di una forte radiazione gravitazionale primordiale risalente ai primi attimi del BB!

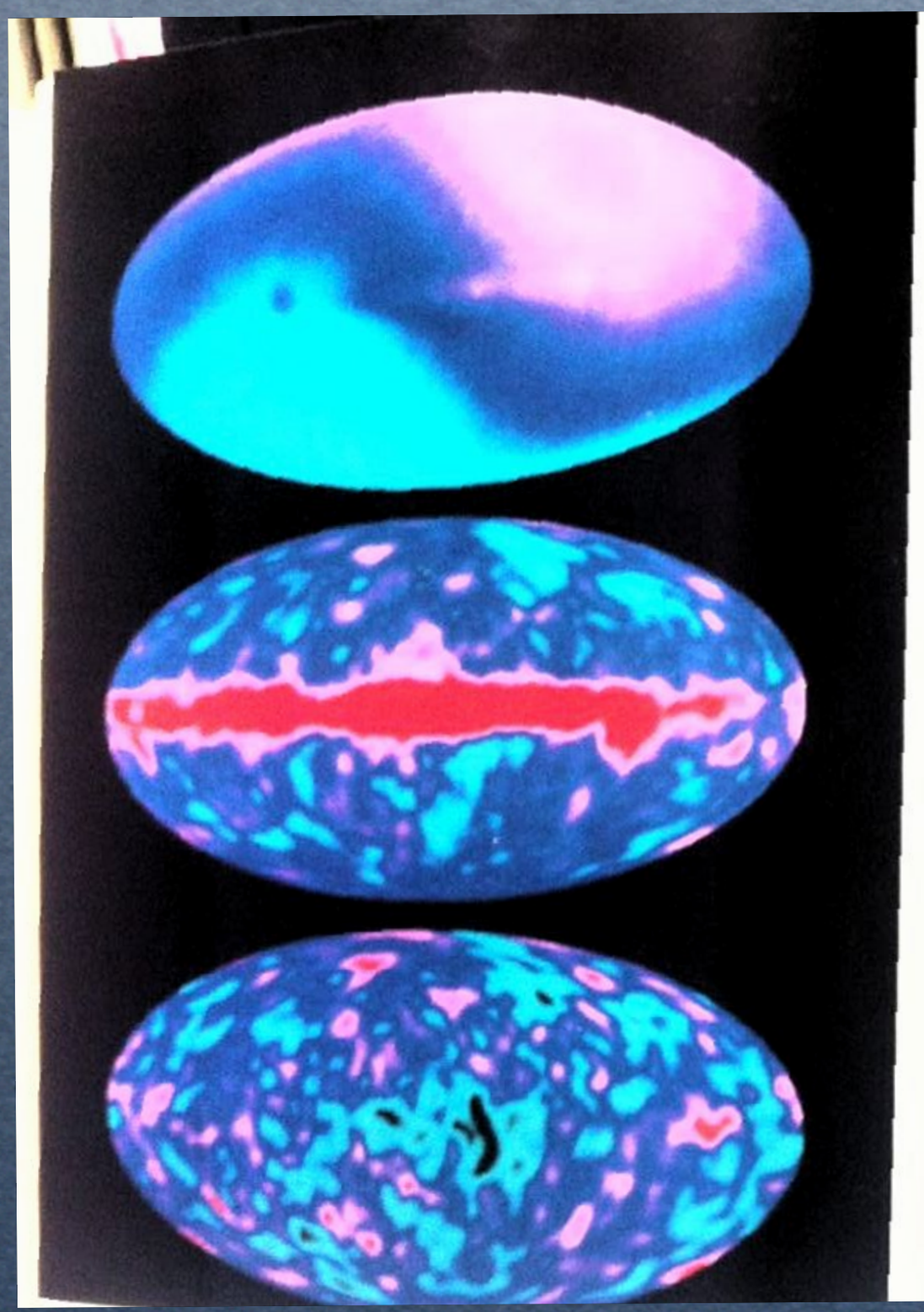


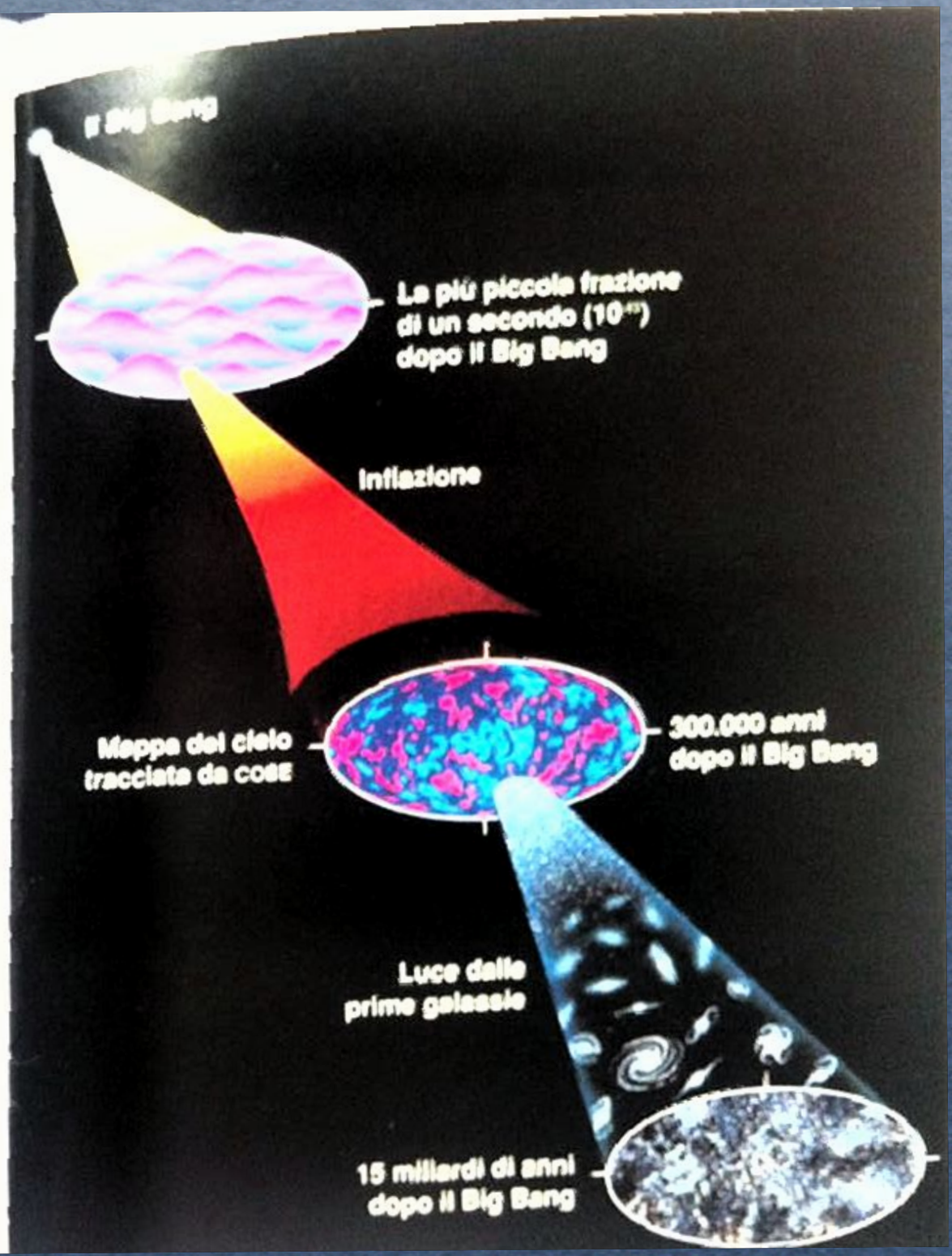
La radiazione di fondo cosmico - un relitto dal BigBang





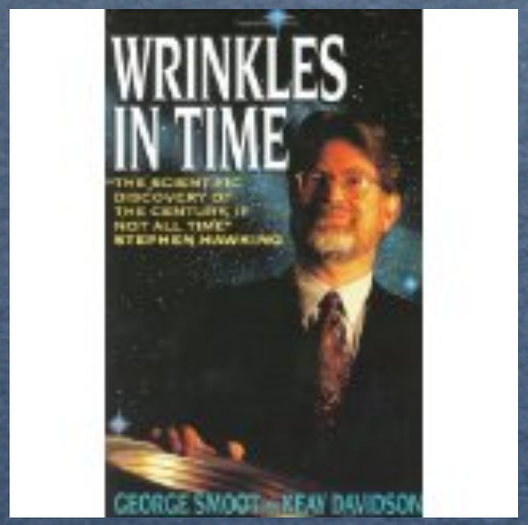
Planck

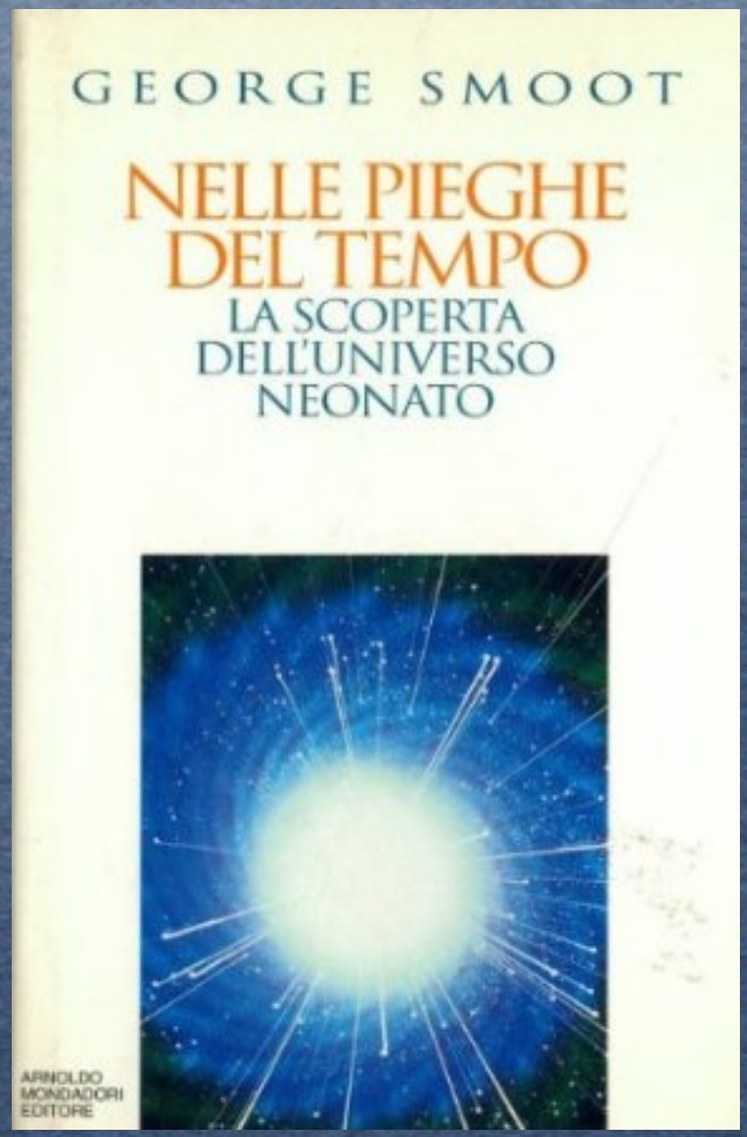



Il Big Bang
La più piccola frazione
di un secondo (10⁻³⁵)
dopo il Big Bang
Inflazione
Mappa del cielo
tracciata da COBE
300.000 anni
dopo il Big Bang
Luce dalle
prime galassie
15 miliardi di anni
dopo il Big Bang

Questo spiega l'eccitazione di molti fisici in tutto il mondo. La scoperta potrà aggiungere informazioni importanti alle nostre conoscenze della struttura del Cosmo!

Per saperne di più



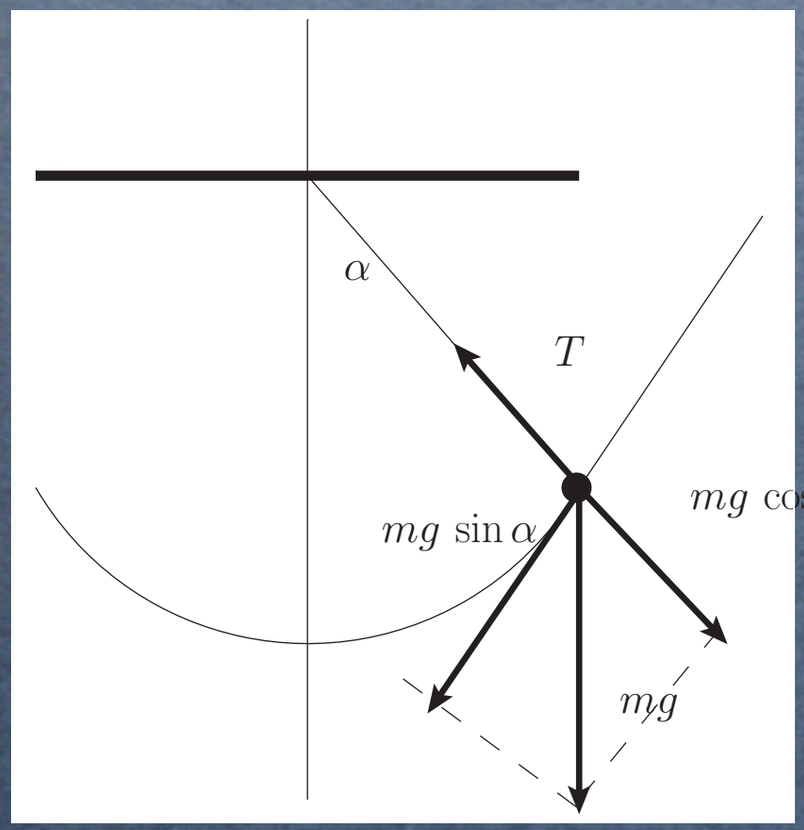


Dalla meccanica celeste alla meccanica terrestre

Ci occuperemo ora di fenomeni più vicini all'esperienza corrente, analizzandoli in termini di meccanica newtoniana. La semplicità della meccanica del sistema solare viene persa a favore di una rilevanza più immediata di quanto studieremo.

Avremo a che fare con carrelli, pendoli, carrucole, …
La differenza sostanziale nel affrontare problemi di questo genere è costituita dal fatto che dobbiamo rinunciare all'idea di "sistema isolato". Avremo sempre da tenere presente che i nostri oggetti si muovono soggetti a vincoli (rotolamento su un pavimento, su una fune, etc) e inoltre questi vincoli comportano attriti che esercitano a loro volta delle forze nella maggior parte dei casi non conosciute a priori. Le "reazioni vincolari", cioè le forze esercitate da agenti passivi quali il piano su cui ci si muove o le funi a cui si è appesa una massa (pendolo), entrano nella dinamica e devono essere determinate contestualmente alla soluzione delle equazioni del moto.

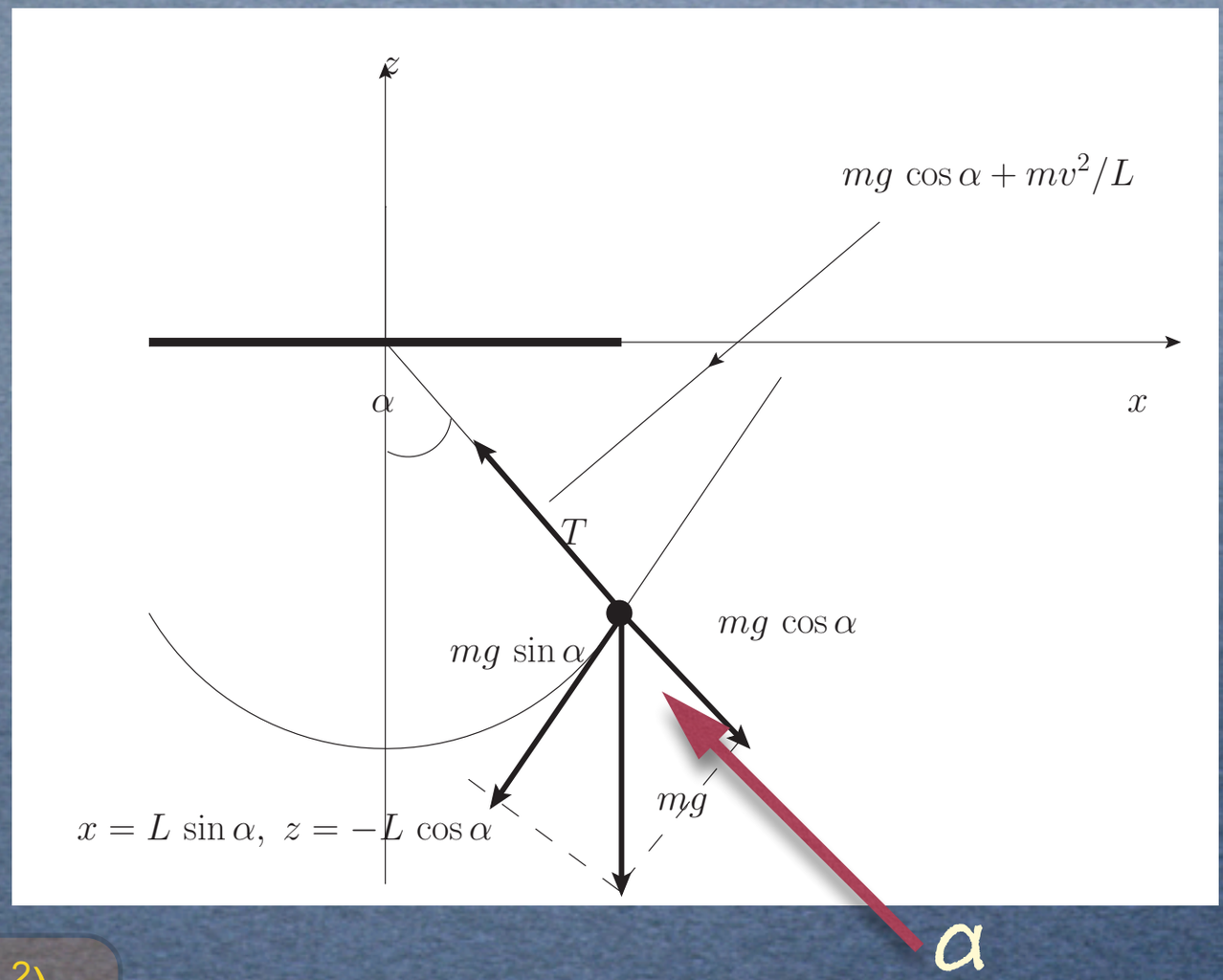
Illustriamo questi concetti con un semplice esempio. Il moto di un pendolo semplice. Questo è costituito da una massa puntiforme vincolata da una fune di lunghezza inalterabile e di massa trascurabile agganciata a un punto fisso. L'azione della gravità porta all'oscillazione del pendolo. Analizziamo le forze in gioco.



Il peso mg agisce in direzione verticale. La fune viene messa in tensione e questo esercita una forza T sulla massa in direzione del punto cui è vincolata la fune. La tensione T si equilibra con la componente del peso lungo la direzione di T e l'altra componente $mg\ sin\alpha$ accelera la massa in direzione tangenziale.

Giusto? Sbagliato!

Si è dimenticato che la massa compie una traiettoria circolare con accelerazione tangenziale e accelerazione centripeta. Quindi entra anche quest'ultima nel bilancio delle forze. Il diagramma corretto è quindi:



(non c'è da considerare la z perché $x^2+z^2=L^2$)

Le equazioni del moto di Newton sono allora date da...

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -T\ \sin\alpha$$

$$T = mg\ \cos\alpha + m\,v^2/L$$

$$v^2 = L^2\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2$$

Esprimiamo x in funzione di α ed eseguiamo la derivata rispetto al tempo:

$$\frac{d^2}{dt^2}(L\sin\alpha) = -L\sin\alpha\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + L\cos\alpha\,\frac{d^2\alpha}{dt^2}$$

e combinando con le equazioni precedenti si trova

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\frac{g}{L}\sin\alpha \quad .$$

Una derivazione più semplice fa uso del fatto che l'*accelerazione tangenziale* deve essere uguale alla componente tangente del peso: $v=L\,d\alpha/dt \Rightarrow mL\,d^2\alpha/dt^2 = -mg\,sin\,\alpha$

L'equazione si risolve facilmente nel caso in cui l'angolo di oscillazione sia piccolo, in modo da poter approssimare

$$sin\alpha \approx \alpha$$

Siamo allora ricondotti a una semplice equazione lineare

$$d^2\alpha/dt^2 = -g/L\ \alpha$$

che ha come soluzione generale

$$\alpha(t) = A\ cos(\omega t+\delta)$$

con $\omega^2=g/L=(2\pi/T)^2$. *Controllate le prime lezioni. Abbiamo già trovato in base a considerazioni dimensionali che il periodo deve essere della forma* $T \propto (L/g)^{1/2}$. Adesso abbiamo la costante di proporzionalità grazie alle equazioni di Newton.

Vediamo ora come sfruttando la conservazione dell'energia possiamo ricavare MOLTO più facilmente l'equazione per l'angolo α:

l'energia totale è data da energia cinetica

$$\tfrac{1}{2}\, m\, v^2 = \tfrac{1}{2}\, m\, L^2\, (d\alpha/dt)^2$$

più l'energia potenziale

$$m\, g\, z = m\, g\, L\, (1\text{-}\cos\alpha).$$

La reazione vincolare non entra nella definizione dell'energia!

Abbiamo allora che

$$E = \tfrac{1}{2}\, m\, L^2\, (d\alpha/dt)^2 + m\, g\, L\, (1\text{-}\cos\,\alpha)$$

rappresenta una costante del moto,

cioè dE/dt=0 !

Calcoliamo ora dE/dt: troviamo immediatamente

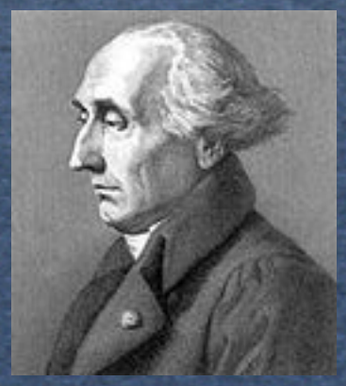
$$m\,L^2\,d\alpha/dt\;d^2\alpha/dt^2 + m\;\;g\,L\,sin\;\alpha\;d\alpha/dt = 0$$

Eliminando i fattori comuni $m\;d\alpha/dt$, si ritrova l'equazione

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\frac{g}{L}\,\sin\alpha$$

senza dovere neanche prendere in considerazione la reazione vincolare T! Esiste uno sviluppo teorico legato al nome di *Lagrange*[1] che permette di affrontare i problemi in presenza di vincoli "lisci" con la stessa semplicità. Ma la formulazione lagrangiana esula dal nostro programma. Però se non dite niente agli altri (rimanga un segreto...)

[1] Giuseppe Luigi Lagrange, Torino 1736, Parigi 1816



La meccanica resa facile!

"meno"!

Se il sistema meccanico comprende solo vincoli lisci, senza attrito, e forze conservative allora esiste una procedura infallibile per ricavare le equazioni di Newton. Si comincia preparando la funzione di Lagrange

$$\mathcal{L} = \text{Energia cinetica} - \text{Energia potenziale}$$

come dire, l'energia totale in cui si è cambiato il segno dell'energia potenziale. Ad es. nel caso del pendolo,

$$\mathcal{L} = \tfrac{1}{2}\, m\, L^2\, (d\alpha/dt)^2 + m\, g\, L\, \cos\alpha$$

Poi si calcola la derivata di L rispetto alla velocità, in questo esempio

$\partial\mathcal{L}/\partial v = m\, L^2\, \mathrm{d}\alpha/\mathrm{d}t$ **e infine se ne calcola la derivata rispetto al tempo:**

$$\mathrm{d}/\mathrm{d}t\, (\partial\mathcal{L}/\partial v) = m\, L^2\, d^2\alpha/dt^2$$

Questa quantità va uguagliata a $\partial\mathcal{L}/\partial\alpha$**, ne risulta**

$$m\,L^2\,d^2\alpha/dt^2 = d/d\,\alpha\,(m\,g\,L\cos\alpha) = -mgL\sin\alpha$$

che una volta eliminati i fattori comuni si riduce a

$$d^2\alpha/dt^2 = -g/L\ \sin\alpha$$

come già sappiamo. La procedura lagrangiana vale qualunque sia la scelta di coordinate generali !!! Riassumiamo:

$$L = E_K - E_V \Longrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = \frac{\partial L}{\partial q}$$

(*il punto sopra la* q *è un modo spiccio per indicare la derivata rispetto al tempo ed è di uso universale in matematica e fisica*)

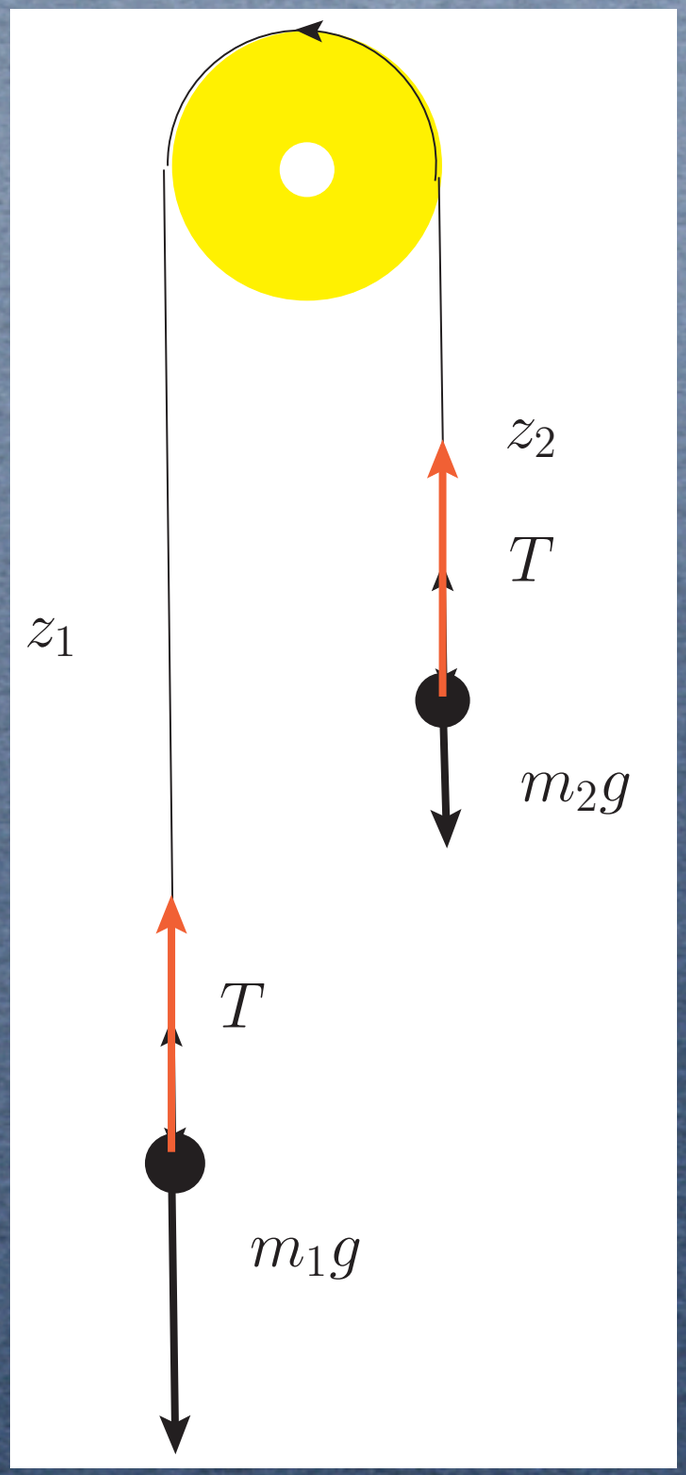
Consideriamo un esempio che coinvolge vincoli:

Una carrucola sostiene due masse m_1 e m_2 legate da una fune inestendibile e perfettamente flessibile. La carrucola si limita a permettere lo scorrimento della fune ma ha una massa trascurabile. Si chiede: determinare il moto delle masse sotto l'azione della gravità a partire da una situazione di quiete. Le equazioni di Newton ci danno:

$$m_1 \ddot{z}_1 = m_1 g - T$$

$$m_2 \ddot{z}_2 = m_2 g - T$$

eliminiamo T e teniamo conto che il valore di z_1+z_2 è fissato dal fatto che la fune ha lunghezza costante. Infine si ottiene ...



$$(m_1 + m_2)\,\ddot{z}_1 = (m_1 - m_2)\,g$$

cioè la massa m_1 è soggetta ad una accelerazione ridotta rispetto a g di un fattore $(m_1\text{-}m_2)/(m_1+m_2)$.
Il metodo di Lagrange in questo caso cosí semplice dà un guadagno limitato! Vediamo:

Indichando come prima con z_1 e z_2 le quote delle delle due masse, l'energia potenziale è data da $V = -m_1 g z_1 - m_2 g z_2$ e quindi la Lagrangiana sarà

$$\mathcal{L} = \tfrac{1}{2} m_1 (dz_1/dt)^2 + \tfrac{1}{2} m_2 (dz_2/dt)^2 + (m_1 g z_1 + m_2 g z_2)$$

Tuttavia dobbiamo ancora imporre che la fune abbia lunghezza fissata e quindi $z_1 + z_2 = L$. Inserita questa condizione nella Lagrangiana si elimina una delle coordinate (z_2) in favore della prima (z_1) e si può procedere con la Lagrangiana semplificata:

$$\mathcal{L} = \tfrac{1}{2}(m_1 + m_2)\,\dot{z}_1^2 + (m_1 - m_2)\;g\,z_1$$

Ne derivano le equazioni del moto

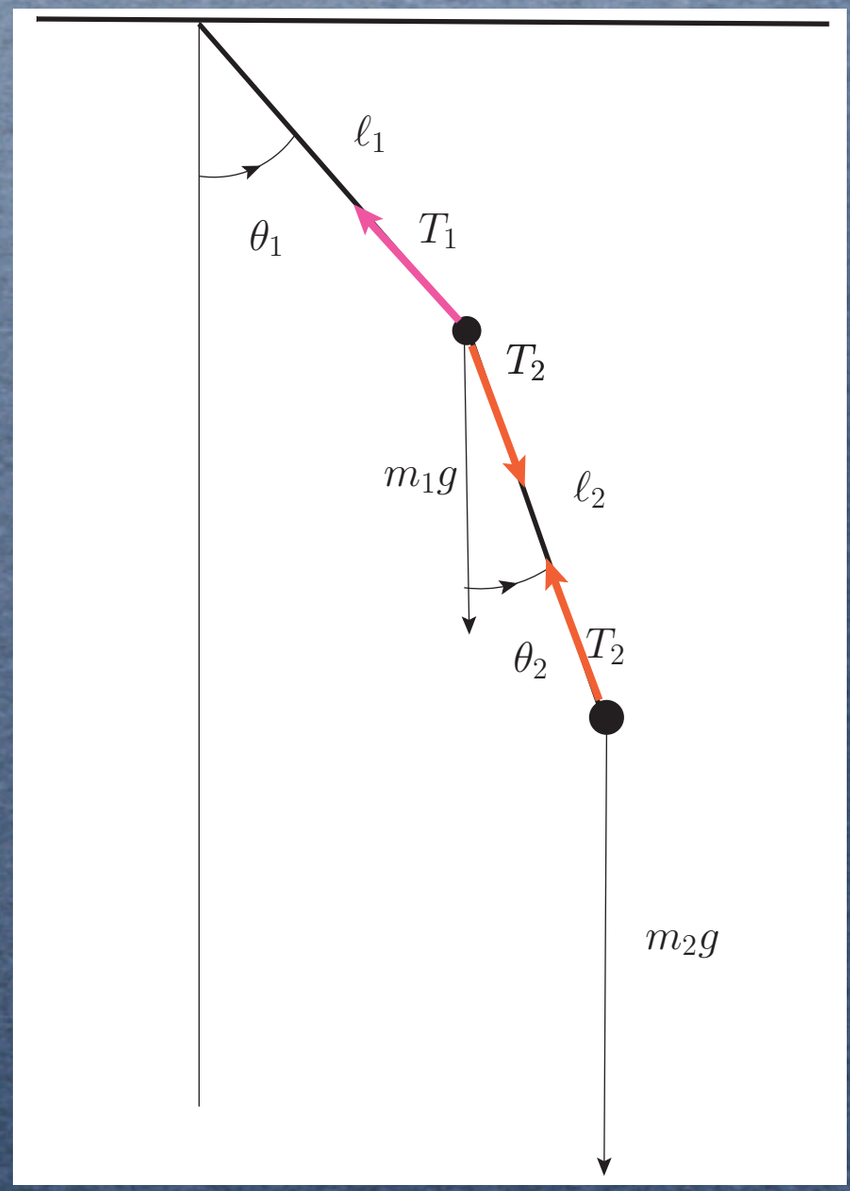
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}_1} = (m_1 + m_2)\,\ddot{z}_1 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z_1} = g(m_1 - m_2)$$

ossia

$$\frac{d^2 z_1}{dt^2} = g\,\frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)}$$

In questo semplice caso è facile ricostruire l'equazione in termini di forze e reazioni vincolari, ma non è sempre cosí. Il metodo lagrangiano permette di districarsi in casi molto più complessi.

Consideriamo ad es. un "***doppio pendolo piano***", come illustrato in figura. Secondo il metodo tradizionale sarebbe necessario analizzare il problema in termini di due reazioni vincolari, T_1 e T_2. La posizione delle due masse m_1 e m_2 è fissata come segue:



$(x_1, z_1) = (l_1 \sin \Theta_1, l_1 \cos \Theta_1)$
$(x_2, z_2) = (x_2, z_2) + (l_2 \sin \Theta_2, l_2 \cos \Theta_2)$

Per risolvere il problema del moto bisogna scrivere le equazioni di Newton per le due masse tenendo conto dei vincoli, il che ...

non è affatto semplice. Si imposta così il problema

$$m_1\ddot{x}_1 = -T_1 \sin\vartheta_1 + T_2 \sin\vartheta_2$$

$$m_1\ddot{z}_1 = T_1 \cos\vartheta_1 - T_2 \cos\vartheta_2 - m_1 g$$

$$m_2\ddot{x}_2 = -T_2 \sin\vartheta_2$$

$$m_2\ddot{z}_2 = T_2 \cos\vartheta_2 - m_2 g$$

poi si scrivono x_1, x_2,z_1,z_2 in funzione di Θ_1 e Θ_2 etc.
La cosa risulta abbastanza laboriosa.

Al contrario il metodo lagrangiano risulta molto più agevole. Si scrive la Lagrangiana e da lí facilmente si trovano le equazioni del moto. Si veda il testo degli esercizi per i dettagli analitici. Sulla base delle equazioni del moto che si ottengono nel limite delle piccole oscillazioni e cioè ...

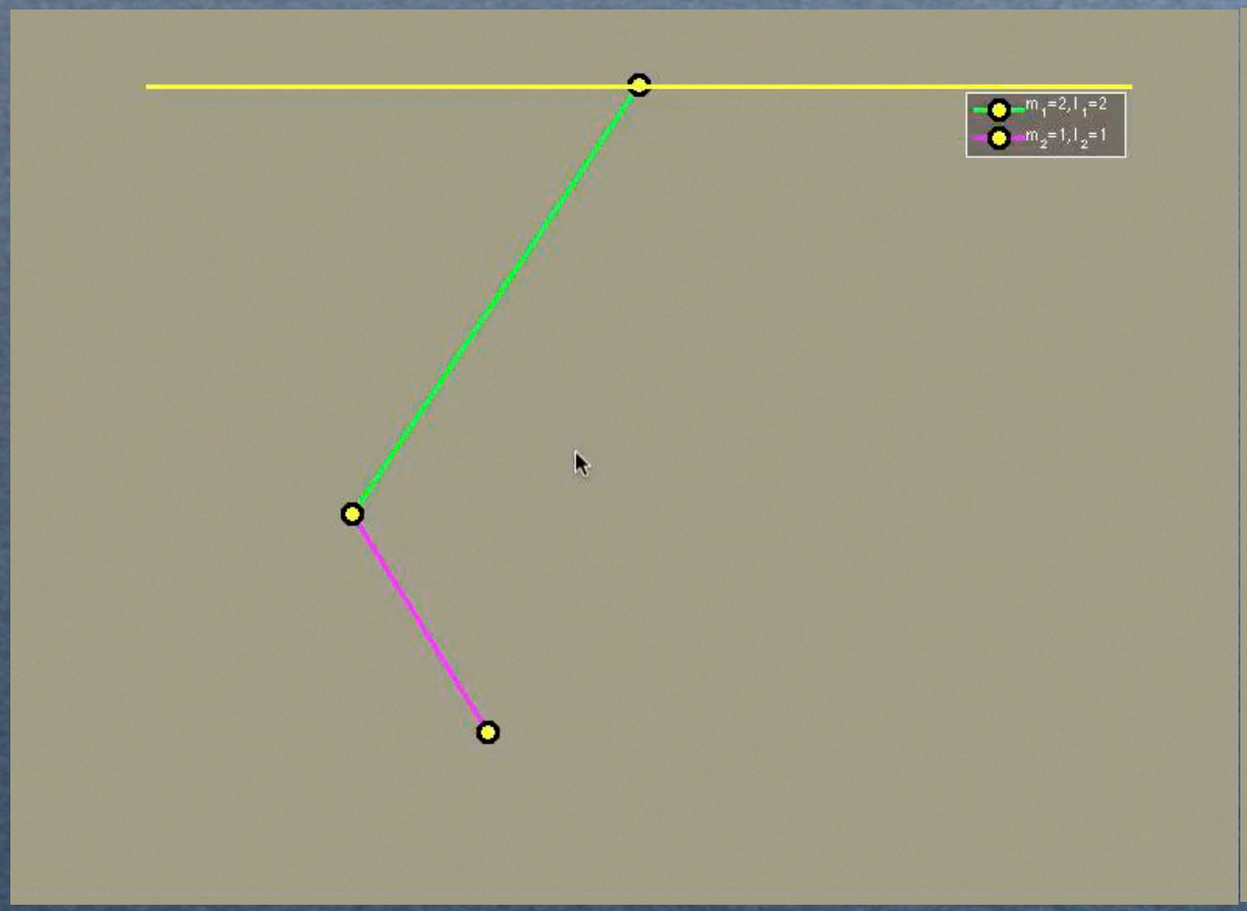
$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\,\ell_1^2\,\dot{\vartheta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\,\ell_2^2\,\dot{\vartheta}_2^2 + m_2\ell_1\ell_2\,\dot{\vartheta}_1\,\dot{\vartheta}_2$$
$$-\frac{1}{2}(m_1 + m_2)\,g\ell_1\vartheta_1^2 - \frac{1}{2}m_2\,g\ell_2\vartheta_2^2$$

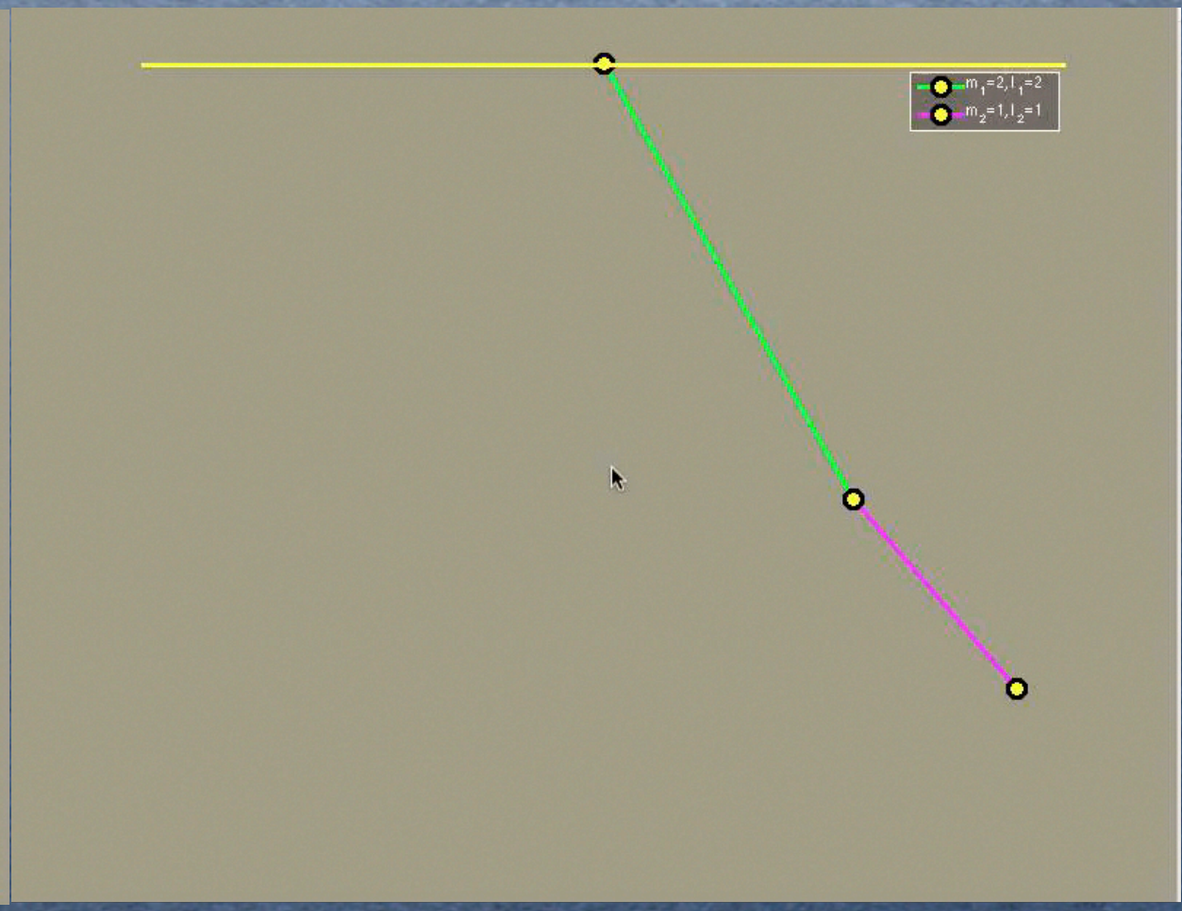
$$\ddot{\vartheta}_1 = \frac{g}{\ell_1 m_1}\left(-(m_1 + m_2)\,\vartheta_1 + m_2\,\vartheta_2\right)$$

$$\ddot{\vartheta}_2 = \frac{g(m_1 + m_2)}{\ell_2 m_1}\left(\vartheta_1 - \vartheta_2\right)$$

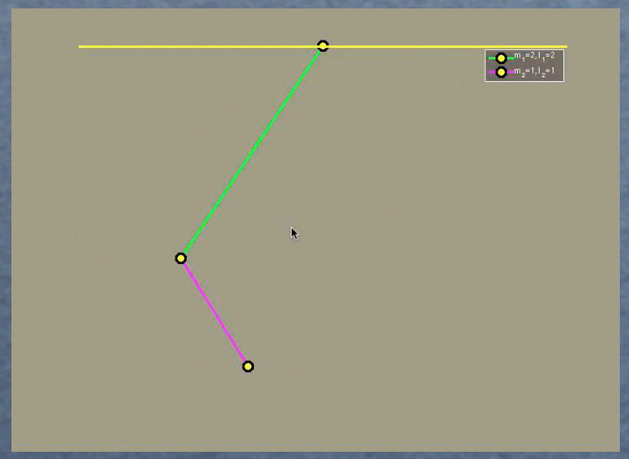
si possono ora studiare le oscillazioni. La cosa si può fare per via analitica. Tuttavia è più divertente risolvere prima le equazioni per via numerica e osservare le caratteristiche talvolta non molto intuitive del moto, simile a quello di un trapezista!

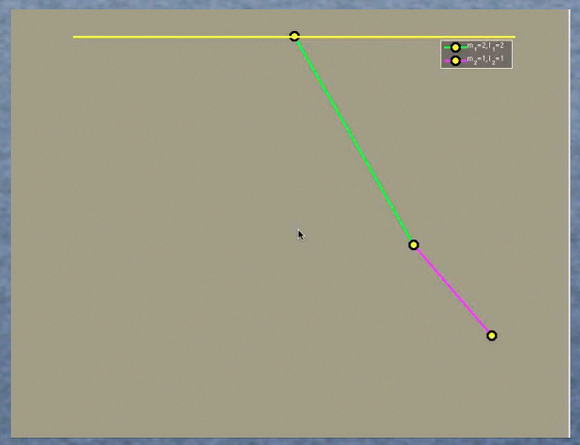
Il moto del doppio pendolo è tutt'altro che intuitivo. Difficile prevedere come si comporterà una volta note masse, lunghezze e angoli iniziali. Ad es.





Si nota che una soluzione è periodica (a destra) e l'altra no. Da cosa dipende? Come si può prevedere se alcune condizioni iniziali portano a soluzioni periodiche?





In questo caso specifico il problema è abbastanza facile da affrontare. Cerchiamo soluzioni delle equazioni di Newton nella forma

$$\vartheta_1(t) = A_1 \, \exp(i\omega t) \, , \; \vartheta_2(t) = A_2 \, \exp(i\omega t)$$

(resta inteso che la soluzione fisica è ottenuta prendendo la *parte reale* della soluzione matematica).

$$\vartheta_1(t) = A_1 \exp(i\omega t)\,,\ \vartheta_2(t) = A_2 \exp(i\omega t)$$

Il sistema di equazioni differenziali si riduce a un sistema algebrico

$$-\omega^2 A_1 = \frac{g}{\ell_1 m_1}\left(-(m_1+m_2)A_1 + m_2 A_2\right)$$

$$-\omega^2 A_2 = \frac{g(m_1+m_2)}{\ell_2 m_1}\left(A_1 - A_2\right)$$

- Questo è un sistema lineare omogeneo. Si sa che esistono soluzioni diverse da $A_1 = A_2 = 0$ se e solo se il determinante del sistema si annulla. Ciò offre un'equazione algebrica dove la frequenza ω compare come incognita.
- Si ottengono cosí due valori possibili che corrispondono ai due modi di oscillazione periodici per il doppio pendolo. Questi moti vengono denominati **MODI NORMALI** di oscillazione.

I modi normali del doppio pendolo

Si trovano dalla soluzione del sistema

$$-\omega^2 A_1 = \frac{g}{\ell_1 m_1}\left(-(m_1+m_2)A_1 + m_2 A_2\right)$$

$$-\omega^2 A_2 = \frac{g(m_1+m_2)}{\ell_2 m_1}(A_1 - A_2)$$

Per semplicità prendiamo masse e lunghezze uguali. Allora

Indichiamo con Ω^2 il rapporto g/l. Il sistema diventa allora

$$-\omega^2 A_1 = -\Omega^2(2A_1 - A_2)$$

$$-\omega^2 A_2 = 2\Omega^2(A_1 - A_2)$$

$$\begin{vmatrix} \omega^2 - 2\Omega^2 & \Omega^2 \\ 2\Omega^2 & \omega^2 - 2\Omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

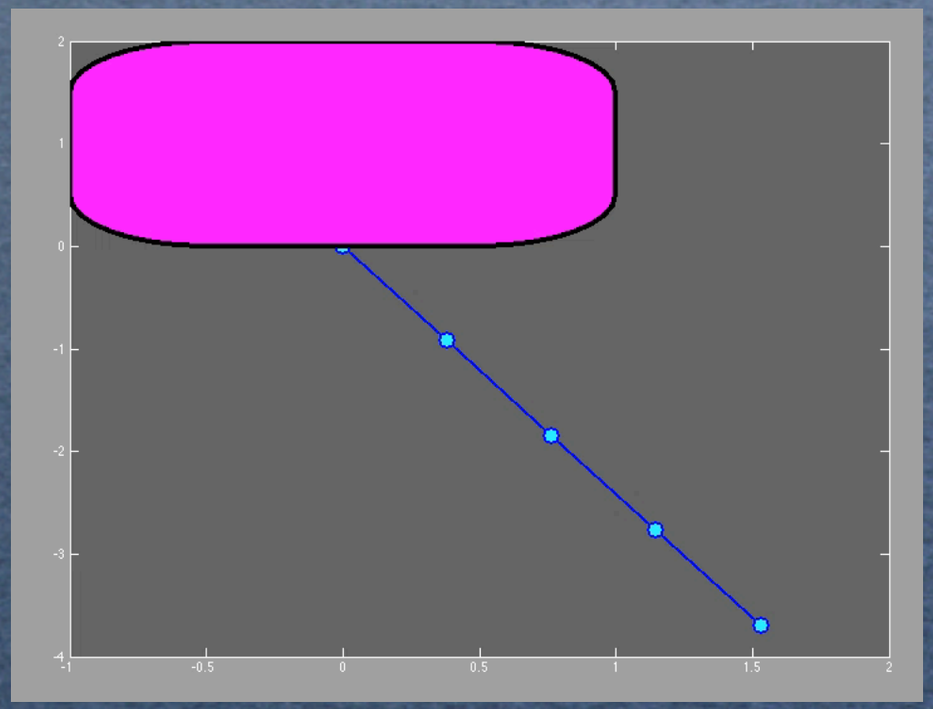
e questo ci dà le due frequenze di oscillazione

$$\omega = (2 \pm \sqrt{2})\Omega = (2 \pm \sqrt{2})\sqrt{g/\ell}$$

Prossimamente

Un problema dinamico complesso
pendolo con N-masse

Un problema di statica
La “catenaria”



FINE

della VI lezione

Prossima lezione

24 marzo