Università degli Studi di Parma

Corso di Laurea in Ingegneria
Elettronica, Informatica e delle Telecomunicazioni

anno accademico 2014-2015

Fisica 1

Prof. Enrico Onofri,
titolare del corso

Dr. Emilia Liviotti,
esercitazioni

24 marzo 2014

Iniziamo eccezionalmente con l'affrontare un problema che mi è stato suggerito da uno studente dello scorso anno.

Il problema chiede di valutare la profondità di un pozzo dalla misura del tempo che intercorre tra l'istante in cui un sasso viene lasciato cadere nel pozzo e l'istante in cui si sente il rumore dell'impatto sul fondo. Il problema non è difficile ma offre lo spunto per qualche riflessione interessante.

Immaginiamo che il sasso venga lasciato cadere nel pozzo da fermo, che il tempo misurato sia di T secondi e che v_s sia la velocità del suono. Il moto del sasso è noto dalla legge di Galileo: se z=0 è la quota dell'imboccatura del pozzo, allora

$$z = - \tfrac{1}{2} g\, t^2$$

Se il pozzo è profondo h il tempo di caduta T_0 si ricava dalla relazione precedente, $h = \tfrac{1}{2} g\, T_0^2$. Il suono dell'impatto impiegherà un tempo ulteriore h/v_s per raggiungere il nostro orecchio.

dunque riassumendo

$$h = \tfrac{1}{2} g\, T_0^2$$

$$T = T_0 + h/v_s$$

Eliminando T_0 si trova un'equazione che determina h una volta noto T:

$$T_0 = T - h/v_s$$

$$h = \tfrac{1}{2} g\, (T - h/v_s)^2$$

Questa è un'equazione algebrica di secondo grado che un alunno di scuola media sa come risolvere. TUTTAVIA: il coefficiente del termine quadratico h^2 è molto piccolo; infatti $g/v_s^2 \sim 10/340^2 \sim 8\times10^{-5}\ m^{-1}$

Guardiamo la formula risolutiva:

$$a\,x^2+b\,x+c=0$$

$$x=(-b\pm(b^2-4ac)^{1/2})/2a$$

La soluzione presenta un denominatore molto piccolo e questo comporta che la radice che ci interessa è data dalla cancellazione tra b e la radice quadrata. In questi casi il risultato numerico può soffrire di un errore dovuto all'aritmetica con precisione finita! Una soluzione immediata, quantunque approssimata, è ottenuta ribaltando l'equazione in

$$x = -c/b - a\,x^2/b$$

trascurando a:

$$x \sim -c/b$$

e tenendo poi conto del termine trascurato

$$x \sim -c/b - a\,c^2/b^3 - 2\,a^2\,c^3\,/b^5+\ldots$$

che costituisce una serie di potenze nel parametro a!

Nel nostro problema si ha:

$$h = \tfrac{1}{2} g\,(T - h/v_s)^2$$

da cui segue

$$(1 + gT/v_s)\,h = g\,T^2/2 + g\frac{h^2}{2v_s^2}$$

Dato che il termine in h^2 è molto piccolo, possiamo approssimare

$$h \approx gT^2/(2(1 + gT/v_s))$$

Una migliore approssimazione si ottiene inserendo questo valore provvisorio nel termine dipendente da h^2.
Vediamo un esempio concreto. Assumiamo T=5.0s, g=9.8m/s^2, v_s=340 m/s.

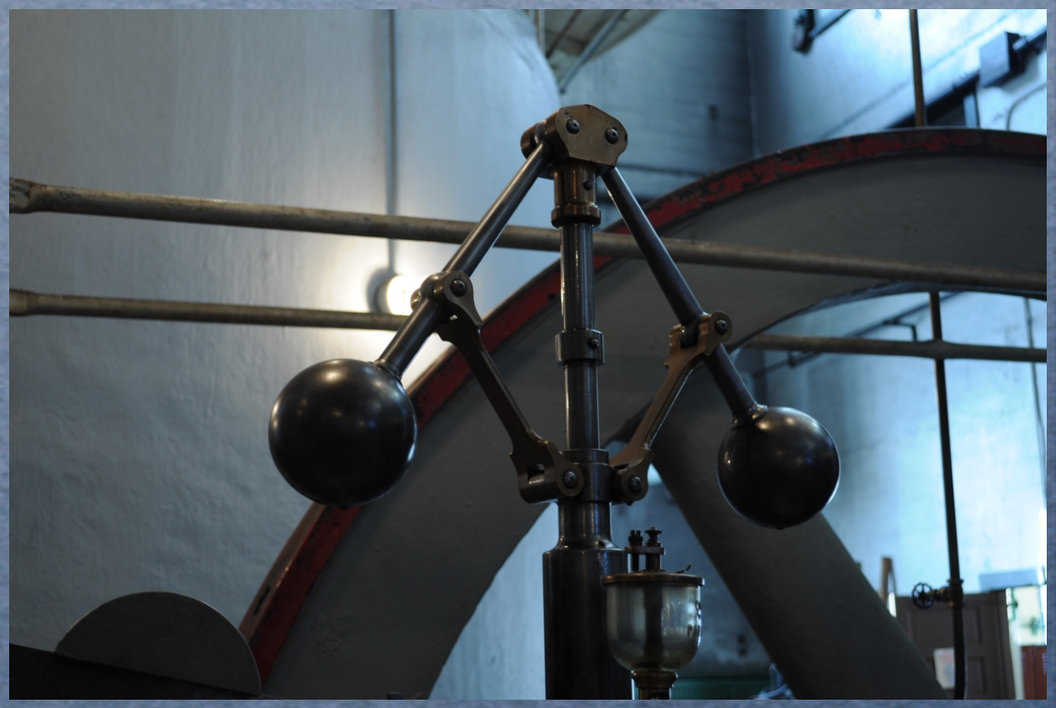
Si trova che il tempo di caduta in cui non si tenga conto della velocita` finita del suono vale 136.89 m. Con la formula approssimata

$$h \approx gT^2/(2(1+gT/v_s))$$

si ottiene h~107 m. Aggiungendo la correzione O(h^2) troviamo h ~ 107.5. La soluzione esatta dell'equazione di secondo grado dà il valore h~107.497. L'esercizio insegna alcune cose. *A volte non è necessario pretendere di risolvere in modo assolutamente esatto un problema matematico. Una soluzione approssimata può essere del tutto adeguata, anche tenendo conto dei fattori di incertezza che si sono trascurati, primo tra tutti l'attrito dell'aria, ma anche la dipendenza della velocità del suono dalla temperatura e dalla pressione. Il messaggio è: evita che la matematica che applichi sia più precisa dei dati fisici su cui stai lavorando! Un'altra considerazione è che sarebbe meglio affidarsi a una segnalazione luminosa … c~O(10^6 v_s) e l'effetto del ritardo è del tutto irrilevante.*

Oggi faremo un altro esercizio dopo quello del doppio pendolo. Vedremo la soluzione sia in termini tradizionali (forze, reazioni vincolari) sia con il metodo di Lagrange. Parliamo del “regolatore di Watt”[1] un dispositivo meccanico che permette di regolare la velocità di rotazione di un motore controllando la velocità angolare di un asse messo in rotazione dal motore.

[1] *James Watt, 1788*

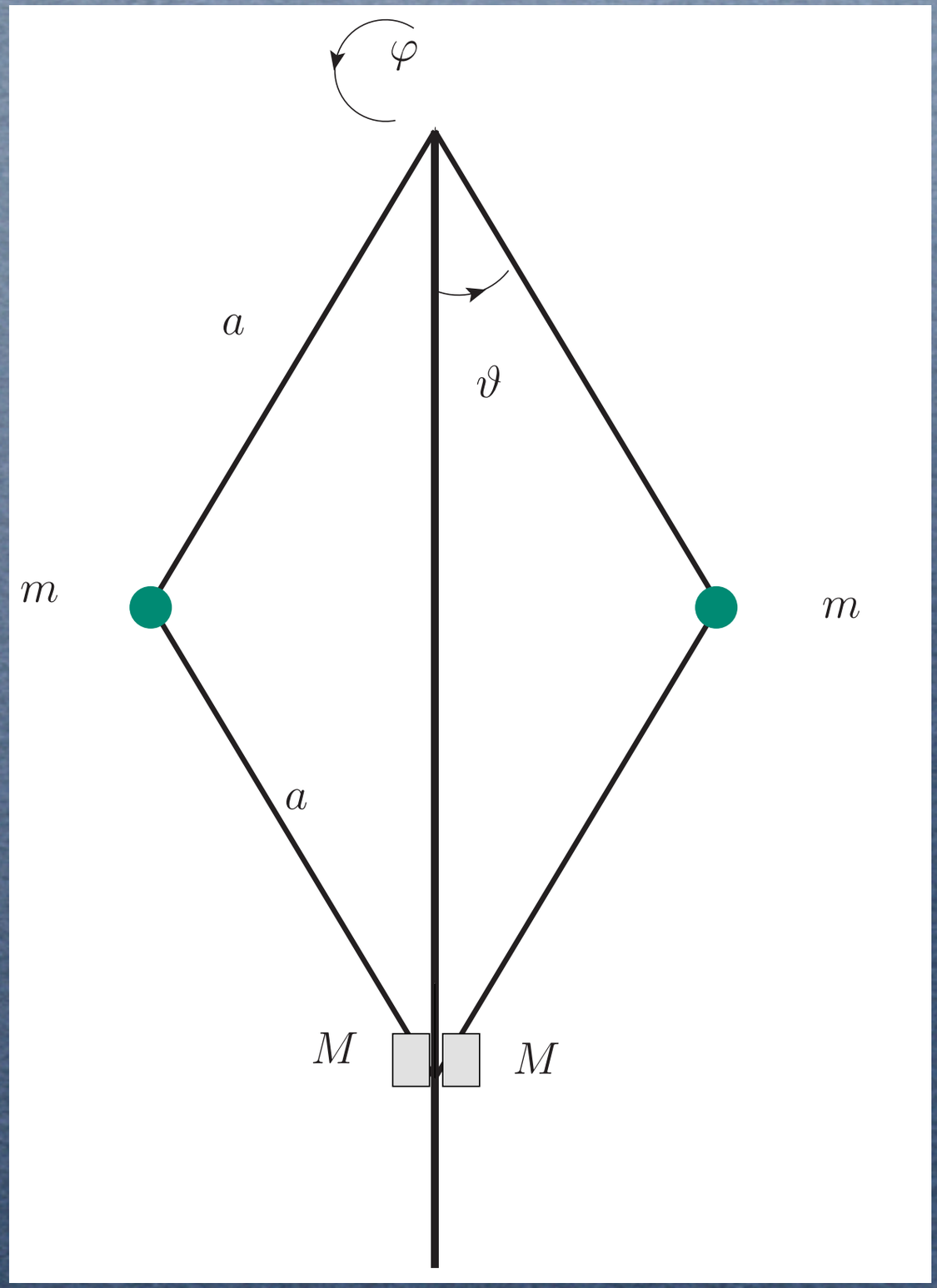


Georgetown PowerPlant Museum
foto di Joe Mabel

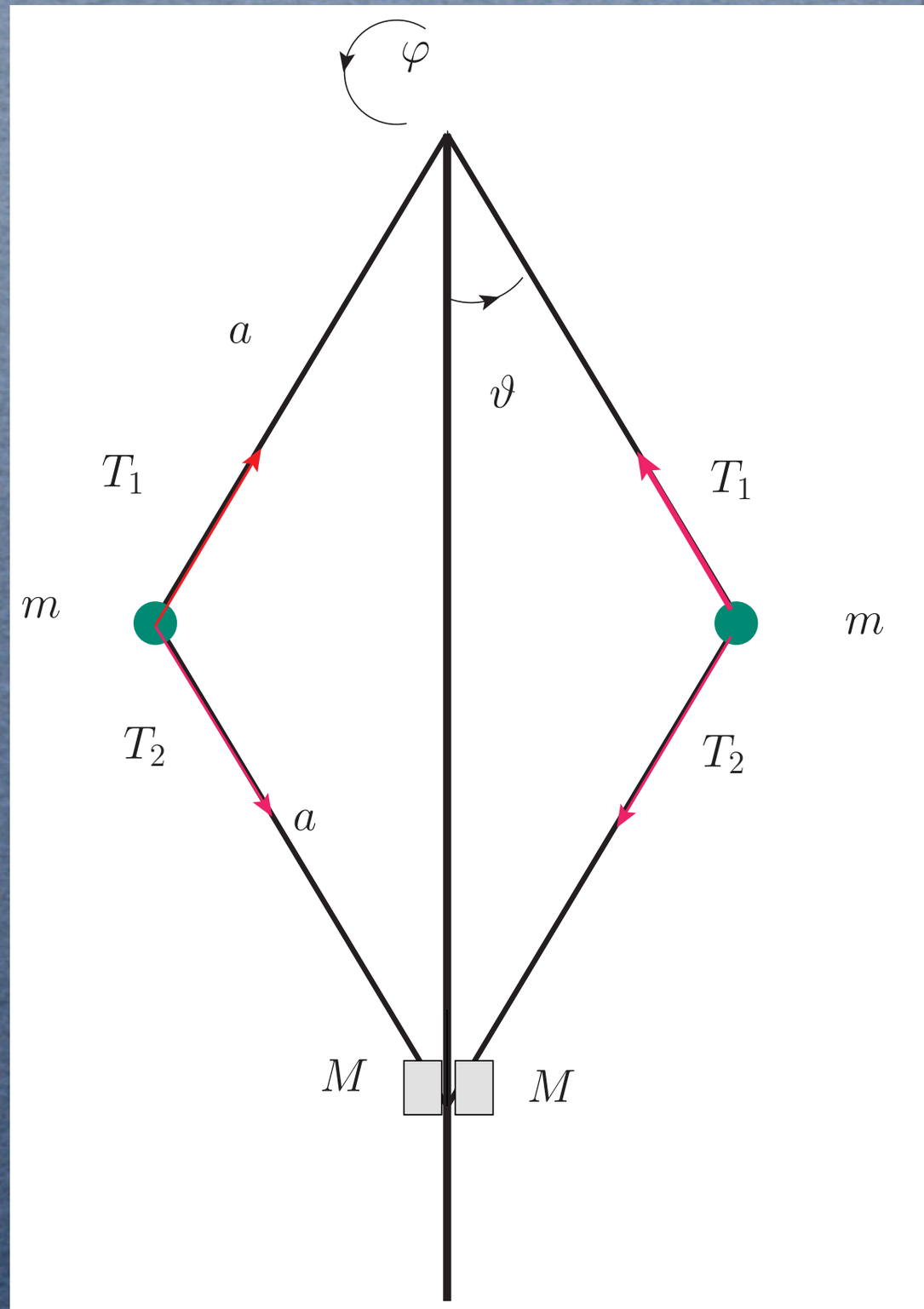
L'asse verticale ruota con velocità angolare Ω, ad es. 10 giri/s (rps), e trascina con sè la struttura flessibile a forma di parallelogramma. Le cerniere permettono all'angolo ϑ di variare liberamente. Le masse indicate con m descrivono una circonferenza di raggio

a sin ϑ

e quindi sono soggette a una accelerazione centripeta.
M è la massa di un oggetto cilindrico libero di scorrere verticalmente.



Ci si chiede: per una data Ω a quale angolo ϑ la struttura è in equilibrio, cioè ϑ rimane costante?
L'analisi delle forze è relativamente semplice. Ci sono le forze peso mg e Mg e la struttura reagisce con le forze vincolari T_1 e T_2. Le proiezioni verticali di queste ultime devono controbilanciare i pesi mentre le proiezioni orizzontali devono fornire la forza centripeta. In formule si trova:



$$(T_1 + T_2)\,\sin\vartheta = m\,a\,\sin\vartheta\,\Omega^2$$

$$(T_1 - T_2)\,\cos\vartheta = mg$$

$$2T_2\,\cos\vartheta = Mg$$

forza centripeta

equilibrio verticale

La prima equazione afferma che la forza centripeta (ricordate $a_{centr} = v^2/r$, $v = \Omega\, r$, e $r = a \sin\vartheta$).

La seconda rappresenta l'equilibrio tra le componenti verticali di T_1 e T_2 con il peso mg. La terza fissa la condizione di equilibrio per M. Dunque:

$$T_2\,\cos\vartheta = M\,g/2$$

$$T_1\,\cos\vartheta = m\,g + T_2\,\cos\vartheta = (m + M/2)\,g$$

$$ma\Omega^2 = T_1 + T_2 = \frac{(m+M)g}{\cos\vartheta}$$

il risultato è ragionevole? Dunque:

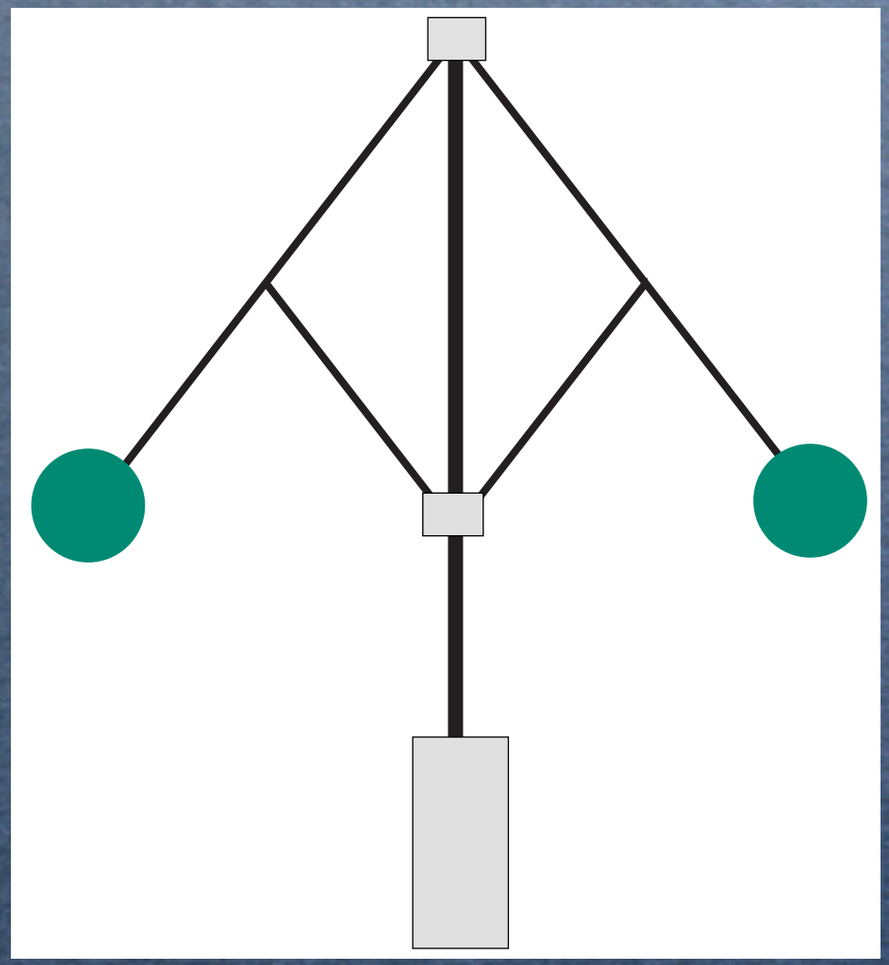
$$\cos\Theta = (M+m)g/(ma\,\Omega^2)$$

il che significa che se Ω assume valori grandi a piacere (ad es. Ω=100 o 1000 rps) il coseno tende a zero e quindi l'angolo si avvicina a 90^0 con i bracci praticamente orizzontali e se Ω cresce a dismisura la tensione T raggiungerà il limite di rottura del materiale, con effetti poco piacevoli per chi si trovasse nei paraggi [1]. In conclusione l'inclinazione ϑ varia da 0 a $\pi/2$ al crescere della velocità dell'albero. Il dispositivo permette di limitare la velocità controllando la potenza del motore in funzione di ϑ. Rozzo ma efficace!

Notate che dal momento che il coseno assume valori compresi tra 0 e 1 si deduce anche che se Ω^2 è inferiore al valore $\Omega_0^2 = (M+m)g/(ma) \approx g/a$ non esiste una posizione di equilibrio tranne che ϑ =0!

[1]da qui il nick-name flyball governor!

Inserendo valori realistici (a≈0.5, m≈M≈1,g≈10) la velocità di rotazione minima sarà ≈ 24 rps. Questo dice che la forma schematica adottata non è ottimale e infatti il regolatore di Watt ha una geometria un pò diversa, ma l'idea non cambia di molto.



Il metodo di Lagrange non è molto vantaggioso in questo esempio, ma permette di esercitarsi...
Le due masse **m** hanno coordinate sferiche ϑ, **φ**, quindi la loro energia cinetica si esprime così

$$K_m = \tfrac{1}{2} m a^2 (\dot{\vartheta}^2 + (\sin\vartheta)^2 \, \Omega^2)$$

Ricordate che $ds^2 = dr^2 + r^2(d\Theta^2 + sin^2\Theta \; d\phi^2)$, ma qui **r** è costante pari ad **a**, e dividendo per dt² si ottiene la velocità (v²). La massa M ha a sua volta un'energia cinetica $M/2 \; (dz/dt)^2$ e ponendo $z = 2a \; cos \; \vartheta$ si ottiene

$$K_M = \tfrac{1}{2} M (2a \sin\vartheta)^2 \dot{\vartheta}^2$$

Tenendo conto che ci sono due masse pari ad m l'energia cinetica totale sarà

$$K = a^2(m + 2M \sin^2\vartheta)\,\dot{\vartheta}^2 + ma^2\Omega^2 \sin^2\vartheta$$

a cui si deve sottrarre l'energia potenziale

$$V=-2(M+m)\, g\, a \cos\vartheta$$

La condizione di equilibrio si ottiene dalle'equazione di Lagrange ponendo a zero la velocità dϑ/dt!

$$\frac{\partial}{\partial\vartheta} L = 2ma^2\Omega^2 \sin\vartheta\cos\vartheta - 2a\,(M+m)\,g\,\sin\vartheta = 0$$

e come prima $\sin\vartheta = 0$

oppure $ma\Omega^2\cos\vartheta = (M+m)\,g$

In questo caso il metodo di Lagrange sembra addirittura più complicato e maschera un pò la Fisica del problema. Ma è bene avere a disposizione una varietà di metodi per affrontare uno specifico problema di meccanica e utilizzare quello che si rivela di più agevole applicazione.

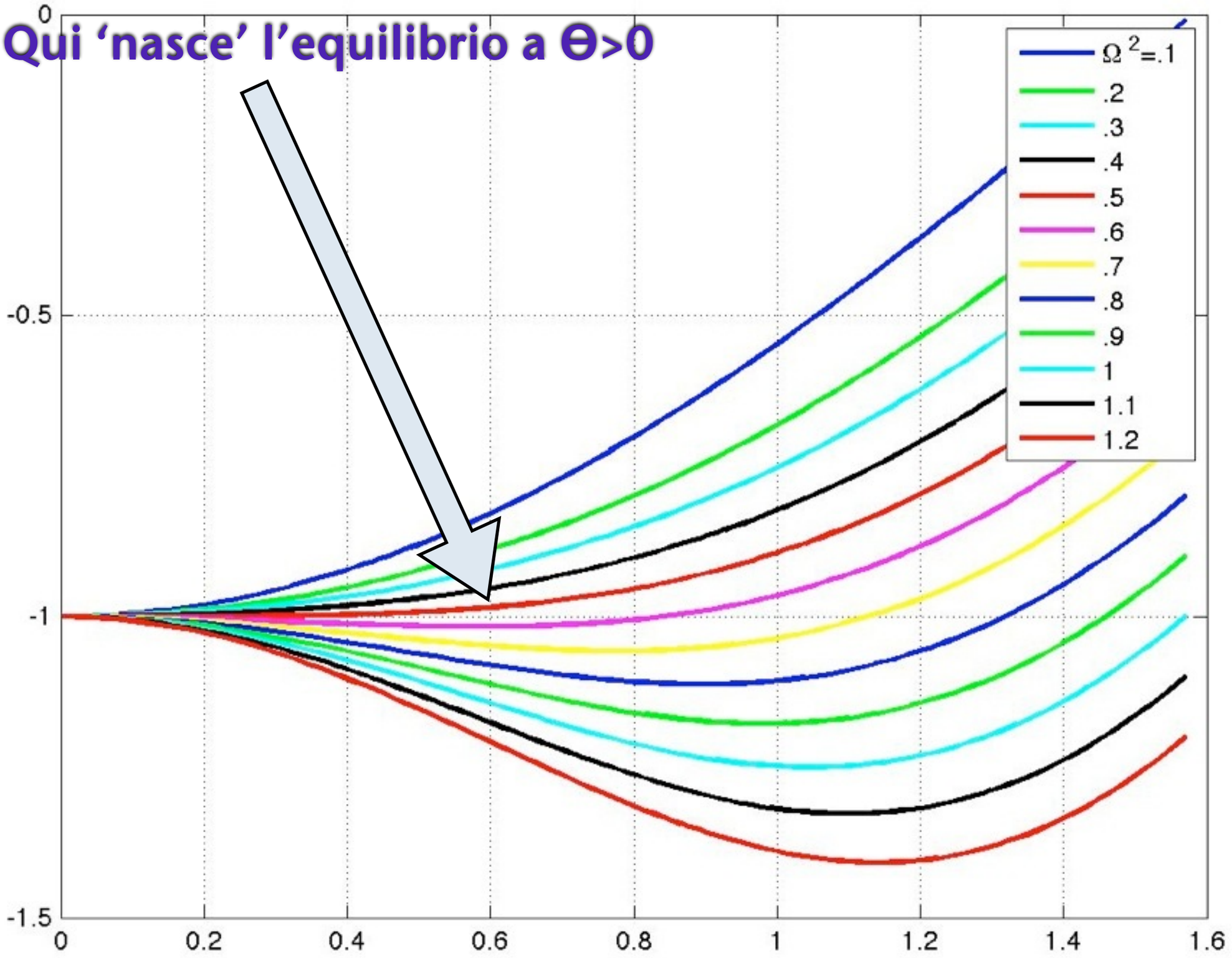
Vediamo di capire come mai esiste una velocità Ω minima al disotto della quale non c'e` equilibrio se non a $\vartheta = 0$.

Il potenziale ha la forma

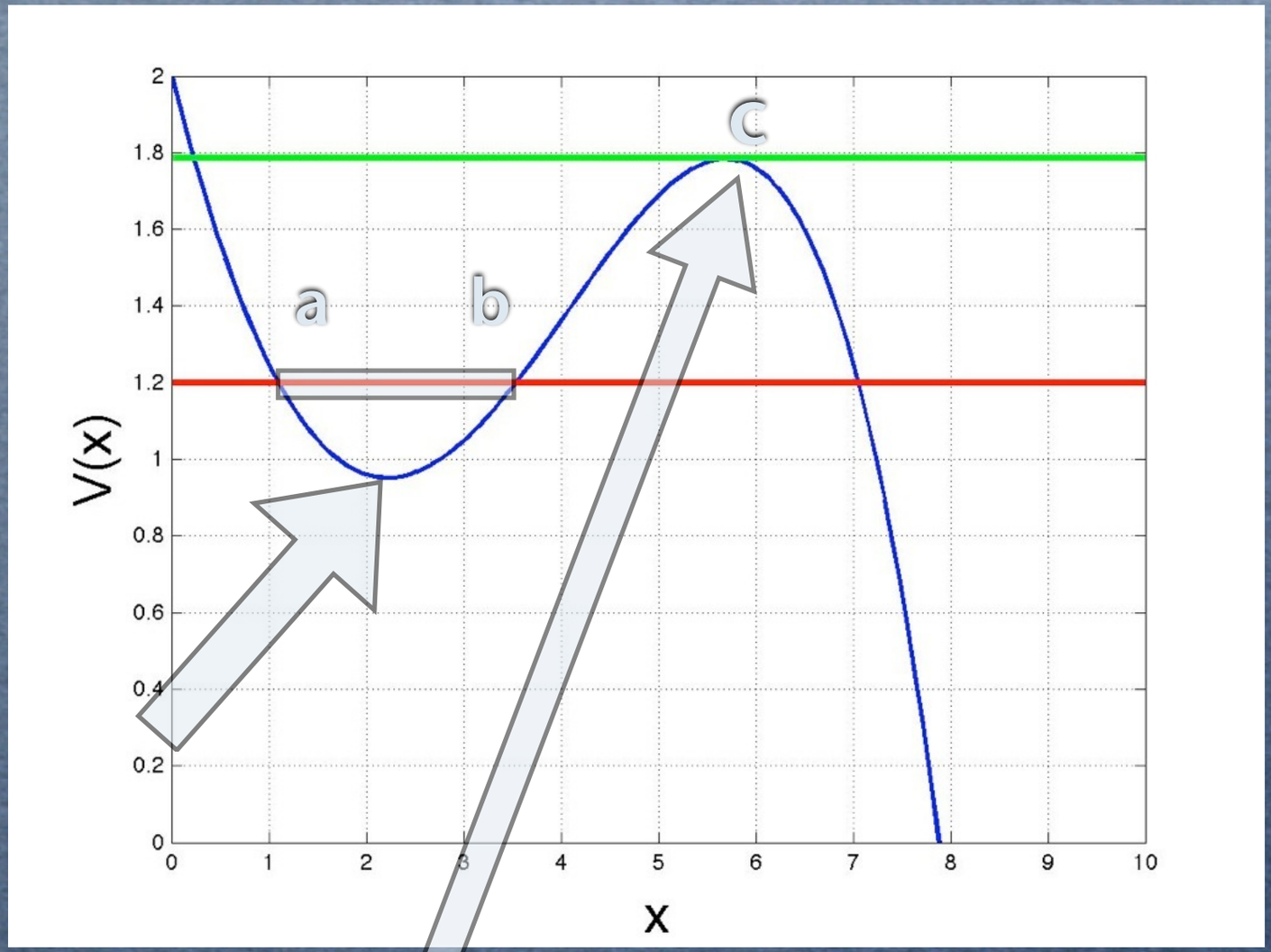
$$V \propto -C\,\Omega^2 \sin^2\vartheta - D\cos\vartheta$$

Per fissare le idee mettiamo C=D=1. Il diagramma che rappresenta V lo vediamo in funzione di Ω.

Qui ‘nasce’ l’equilibrio a Θ>0

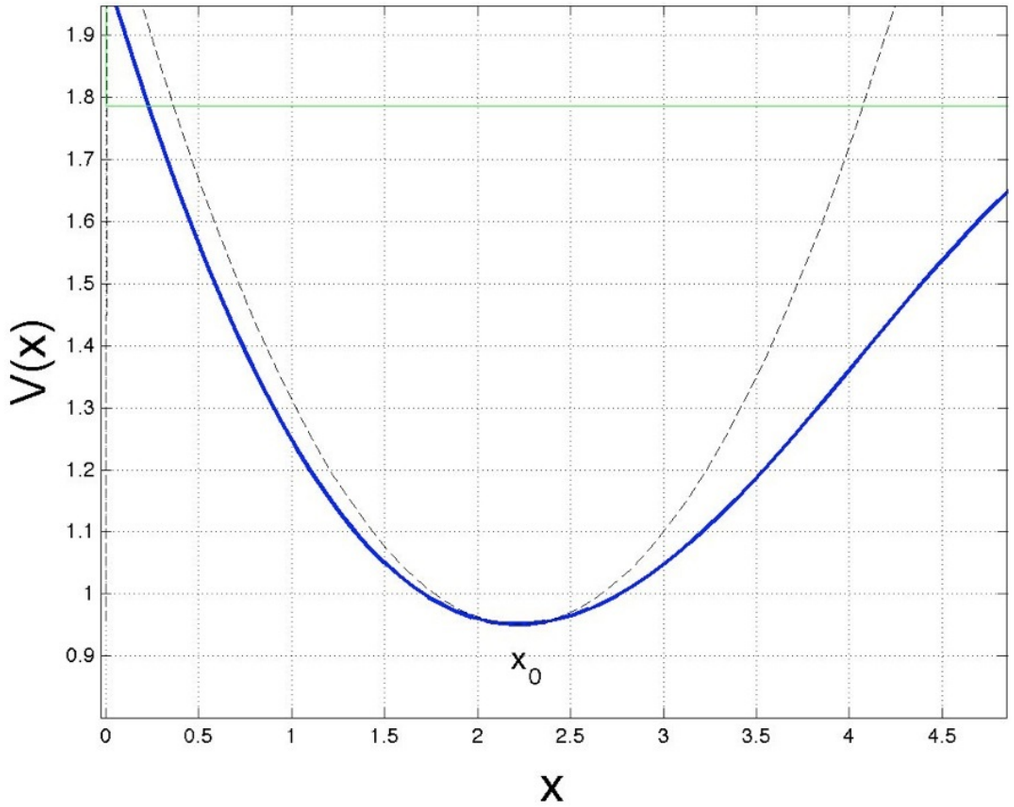


La questione è semplice: se l'energia potenziale ha una forma del tipo in figura e supponiamo che l'energia abbia il valore 1.2; allora K>0 e x oscilla nell'intervallo (a,b).



Se il valore dell'energia diminuisce fino al valore del minimo di V, l'energia cinetica è costretta ad annullarsi e abbiamo equilibrio **stabile**.

Anche in "c" c'è equilibrio, ma... appena ci si sposta anche di poco dal punto di equilibrio il punto scappa via! Si dice "equilibrio **instabile**



È facile studiare il moto vicino a un punto di equilibrio stabile. Al posto dell'energia potenziale V(x) si può considerarne l'approssimazione quadratica, in termini diagrammatici ciò è dato dalla parabola che meglio approssima la forma della funzione V(x).

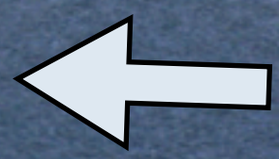
In termini matematici questa approssimazione discende dalla nota formula (Euler-MacLaurin)

$$V(x) = V(x_0) + V'(x_0)\,(x - x_0) + \tfrac{1}{2}\,V"(x_0)\,(x-x_0)^2 + O((x-x_0)^3$$

Se x_0 è un punto di minimo, allora $V'(x_0)=0$ e possiamo sempre porre $V(x_0)=0$ in quanto l'energia potenziale è definita a meno di un costante additiva. Dunque trascurando i termini cubici $V(x) = \tfrac{1}{2}\,k\,(x-x_0)^2$

L'enegia cinetica sia data da $m(dx/dt)^2/2$, allora l'equazione del moto è data da

$$\frac{d}{dt}\left(\tfrac{1}{2}m\dot{x}^2 + \tfrac{1}{2}\,k\,(x-x_0)^2\right) = 0$$



Conservazione dell'energia

$$m\ddot{x} + k(x - x_0) = 0$$

L'equazione si risolve ponendo $x = x_0 + A\cos(\omega t + \delta)$:

$$-mA\omega^2\cos(\omega t+\delta) + kA\cos(\omega t+\delta) = 0$$

Si vede che A e δ sono arbitrari, mentre dovrà essere

$$\omega^2 = k/m$$

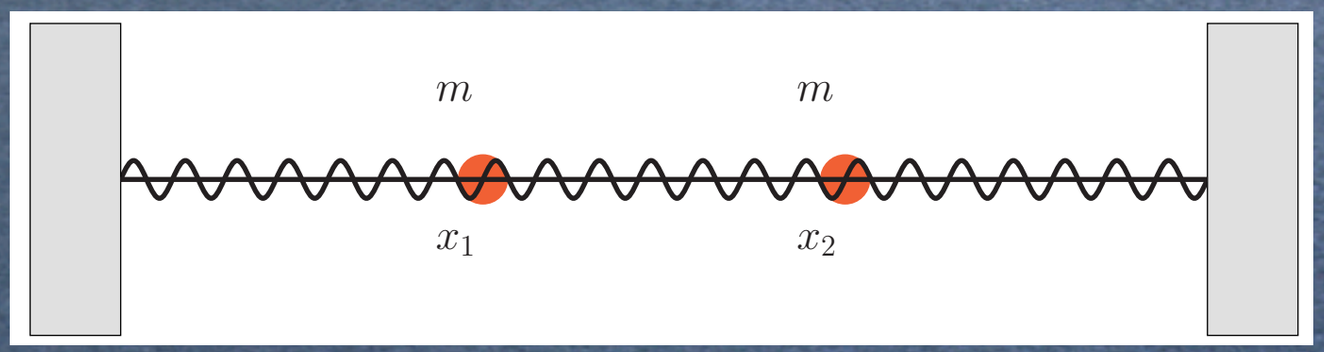
Una molla ideale è un oggetto che se allungato o compresso per una lunghezza δx produce una forza di richiamo proporzionale a -δx, diciamo F=-k δx. Si può perciò descrivere l'azione di una molla perfettamente elastica attraverso l'energia potenziale

$$V(x) = k\, x^2/2\ .$$

$$F = -d/dx\ V(x) = -\,k\, x$$

Una massa attaccata a una molla e messa in movimento esegue perciò un moto periodico con frequenza $\omega^2 = k/m$. La costante k è di solito denominata "modulo di elasticità".

Vediamo un esempio un pò più interessante. Il modello prevede due masse uguali attaccate a tre molle di modulo k disposte come un figura:



Le due molle esterne sono fissate a supporti immobili, mentre la molla centrale agisce sulle due masse.

Le forze sono nulle nella posizione della figura nella pagina precedente mentre uno scostamento di una o entrambe le masse dalla loro posizione di equilibrio produce delle forze di richiamo. L'energia potenziale sarà data da

$$V(x_1,x_2) = \tfrac{1}{2}\, k\, x_1^2 + \tfrac{1}{2}\, k\, x_2^2 + \tfrac{1}{2}\, k\, (x_1-x_2)^2$$

dove x_1 e x_2 sono gli spostamenti dalla posizione di equilibrio.

Sulla prima massa agisce una forza $F_1 = -kx_1+k(x_2-x_1)$ e sulla seconda massa una forza $F_2 = -kx_2+k(x_1-x_2)$. Come si calcolano le forze? Si può ragionare in termini di allungamento delle molle, e allora la prima molla si allunga di x_1 e la seconda di (x_2-x_1) e la direzione della forza è opposta a x_1 e dello stesso segno di x_2-x_1.

Però possiamo utilizzare utilmente il metodo di Lagrange e allora le equazioni del moto sono

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = m\ddot{x}_1 \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = m\ddot{x}_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = -kx_1 - k(x_1 - x_2) \qquad \frac{\partial L}{\partial x_2} = -kx_2 - k(x_2 - x_1)$$

e quindi

$$m\ddot{x}_1 = -kx_1 + k(x_2 - x_1)$$

$$m\ddot{x}_2 = -kx_2 + k(x_1 - x_2)$$

Ricordate il doppio pendolo? Dal punto di vista matematico è esattamente lo stesso problema!

Cerchiamo soluzioni periodiche assumendo

$x_1=A_1\exp(i\omega t)$

$x_2=A_2\exp(i\omega t)$

Inserendo questa forma di soluzione nelle equazioni del moto troviamo la condizione su ω:

$$-m\,A_1\omega^2 = -2k\,A_1 + k\,A_2$$

$$-m\,A_2\omega^2 = k\,A_1 - 2k\,A_2$$

Se indichiamo con Ω^2 la quantità k/m, otteniamo

$$\omega^2\,A_1 = 2\Omega^2\,A_1 - \Omega^2\,A_2$$

$$\omega^2\,A_2 = -\Omega^2\,A_1 + 2\Omega^2\,A_2$$

Il sistema lineare omogeneo ammette soluzioni non-nulle se il determinante è zero:

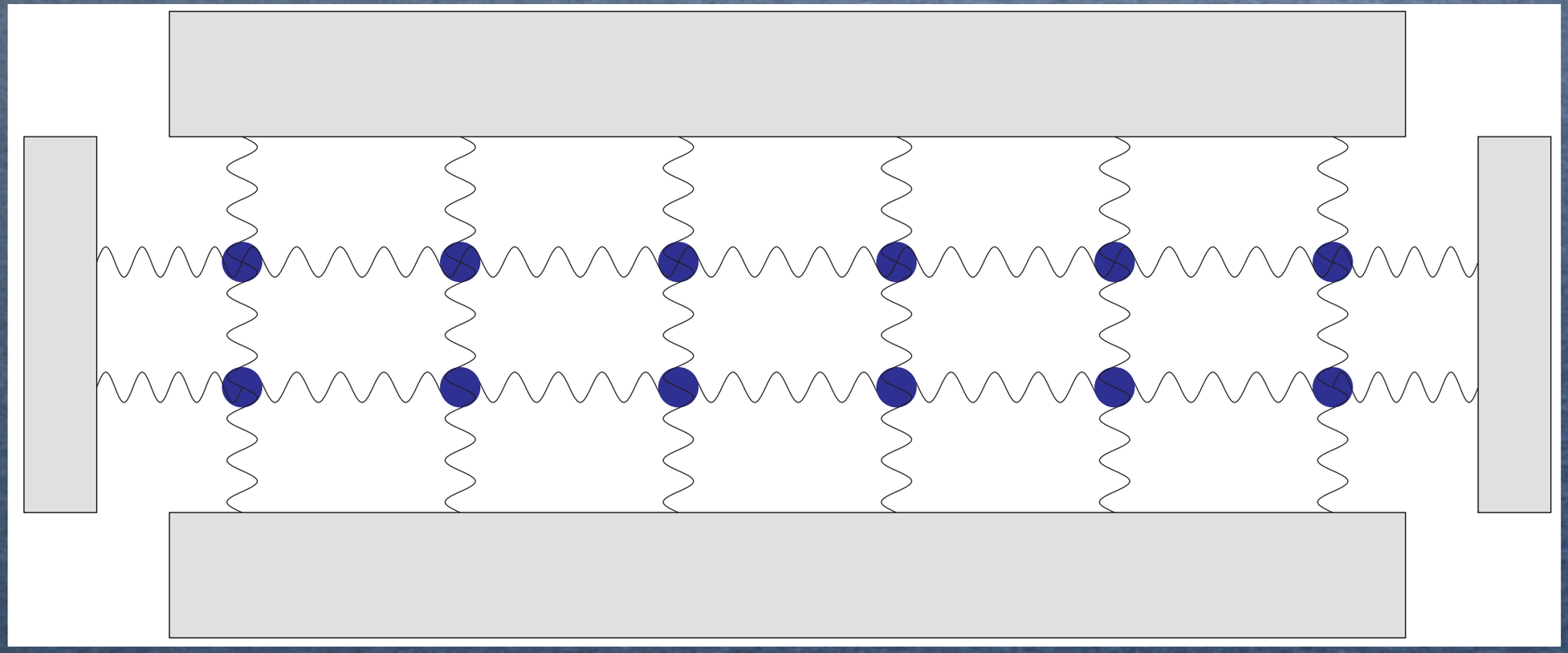
$$\begin{vmatrix} \omega^2 - 2\Omega^2 & \Omega^2 \\ \Omega^2 & \omega^2 - 2\Omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

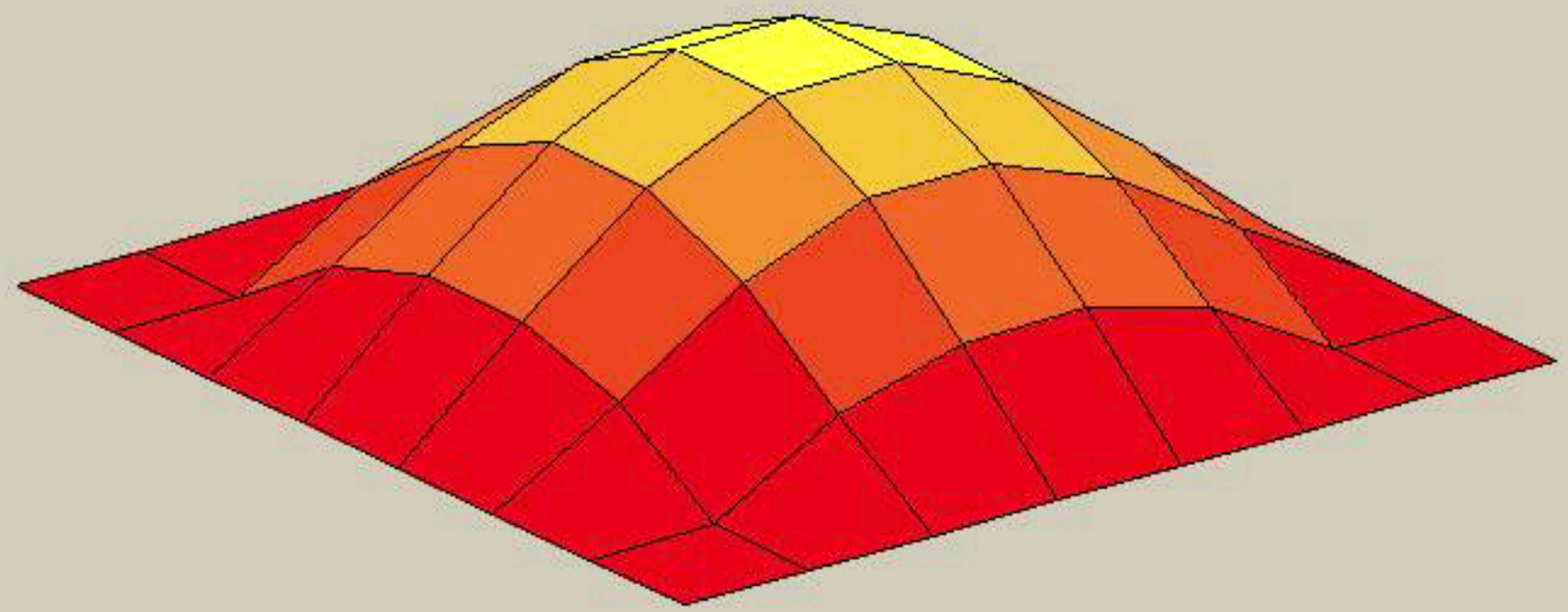
Questo ci dice che le due masse possono eseguire un moto periodico con frequenza $\omega=\Omega$ oppure $\omega=\Omega\sqrt{3}$. Per la prima soluzione le due masse oscillano in fase, per la seconda sono in opposizione di fase. Perchè? Prendete il sistema e sostituite $\omega=\Omega$, trovando

$$\Omega^2 A_1 = 2\Omega^2 A_1 - \Omega^2 A_2$$

dunque $A_1=A_2$, semplice! Analogamente per l'altro caso.

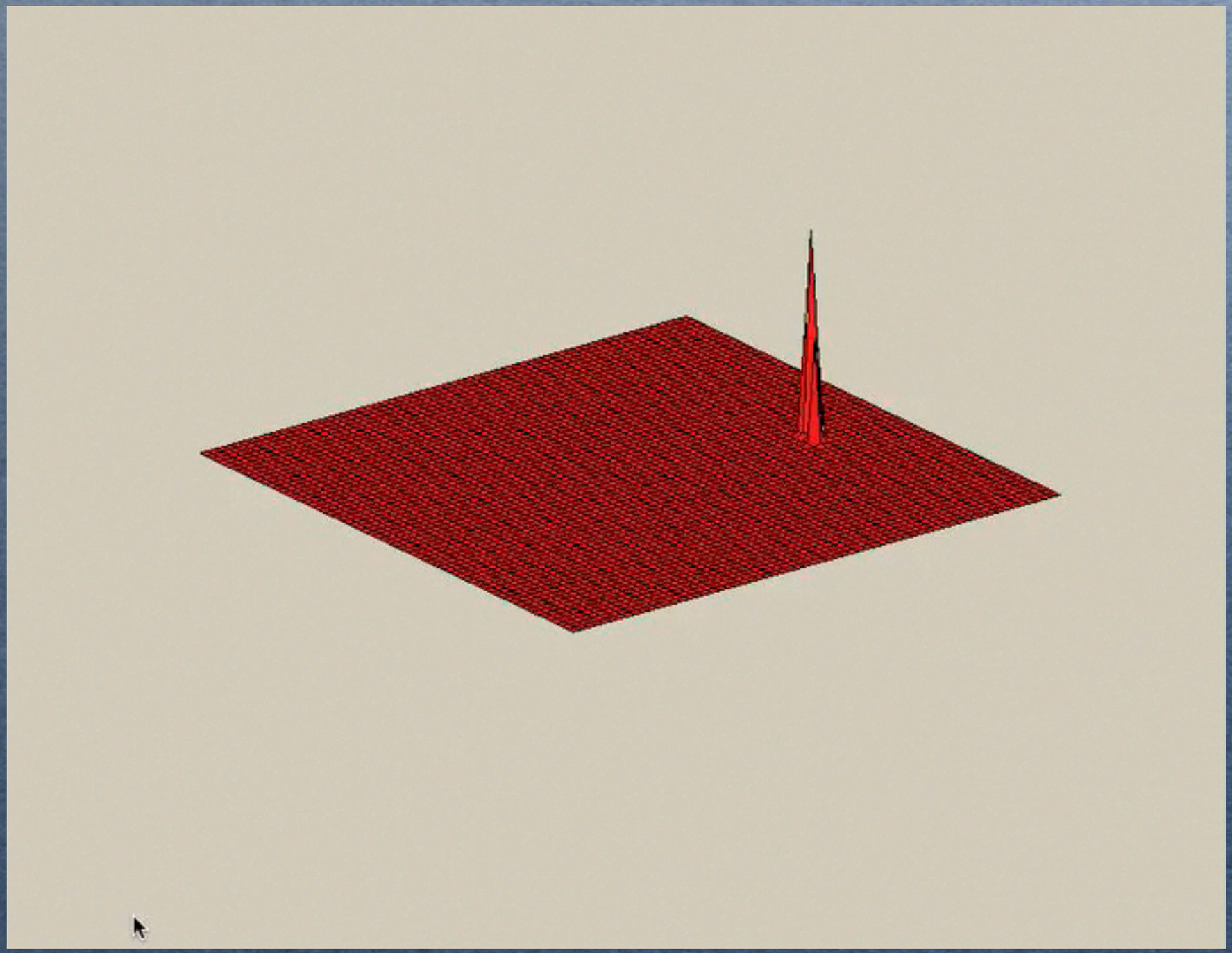
Provate a generalizzare al caso di tre masse - o i più ardimentosi possono affrontare il problema delle N masse con N intero qualunque!
Il moto vicino a un punto di equilibrio si affronta in questi termini del tutto in generale. Qualcuno vuole cimentarsi con quest'ultimo problema?



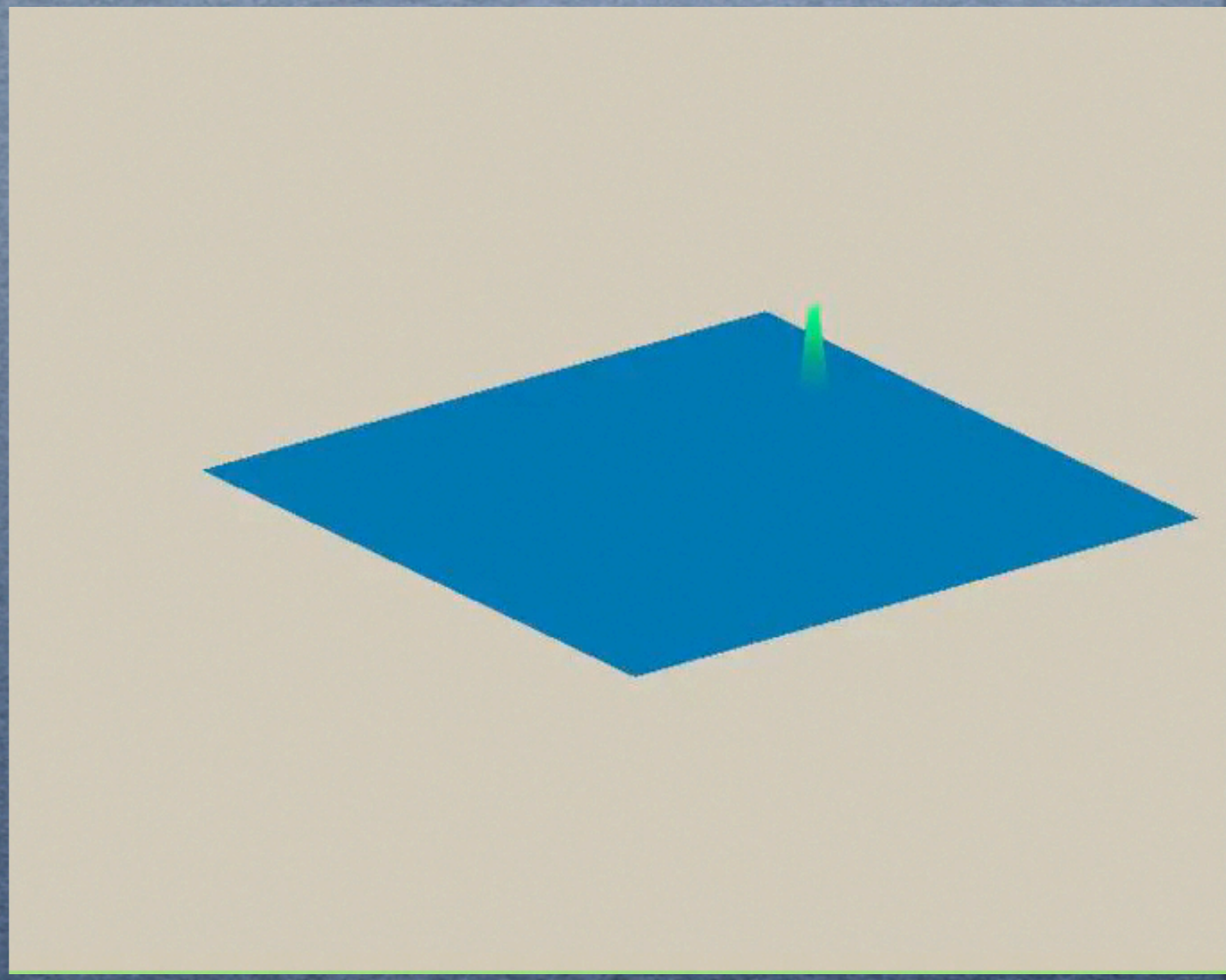


Il tappeto elastico!

E se il tappeto elastico avesse migliaia di nodi?



Vediamo perciò che lo studio di sistemi “a molle” porta verso la fisica della propagazione di onde! Questo copre una fetta molto ampia della Fisica (onde sulla superficie dei liquidi, acustica, onde luminose, ...) ma gli strumenti matematici necessari saranno sviluppati più avanti. Le animazioni sono create con Matlab e richiedono poco sforzo. Le trovate nella directory *~dropbox/Fis1-2015/matlab/wavex*



Prossimo passo: studiare corpi che non possano essere schematizzati con punti materiali o sistemi di punti materiali. Parleremo di CORPO RIGIDO, il caso più semplice da trattare. Poi passeremo a un altro capitolo importante della Meccanica: la meccanica dei fluidi, per finire con la fisica dei gas, il che richiede necessariamente lo studio del calore - generazione e scambio di calore e bilancio energetico tra energia meccanica e energia termica. Sul Gettys trovate ampio materiale nei Cap. 8, 9, 10.

FINE

della VII lezione

Prossima lezione giovedì
26 marzo (Esercizi)