Università degli Studi di Parma

Corso di Laurea in Ingegneria
Elettronica, Informatica e delle Telecomunicazioni

anno accademico 2014-2015

Fisica 1

Prof. Enrico Onofri,
titolare del corso

Dr. Emilia Liviotti,
esercitazioni

26 marzo 2014

Abbiamo esplorato nelle ultime lezioni quegli argomenti della Meccanica che si trovano illustrati più diffusamente nei capitoli 8, 9 e 10 del testo Fisica 1 del Gettys.
Dobbiamo ora affrontare alcuni temi relativi a “sistemi di punti materiali” che richiedono una trattazione un pó speciale.

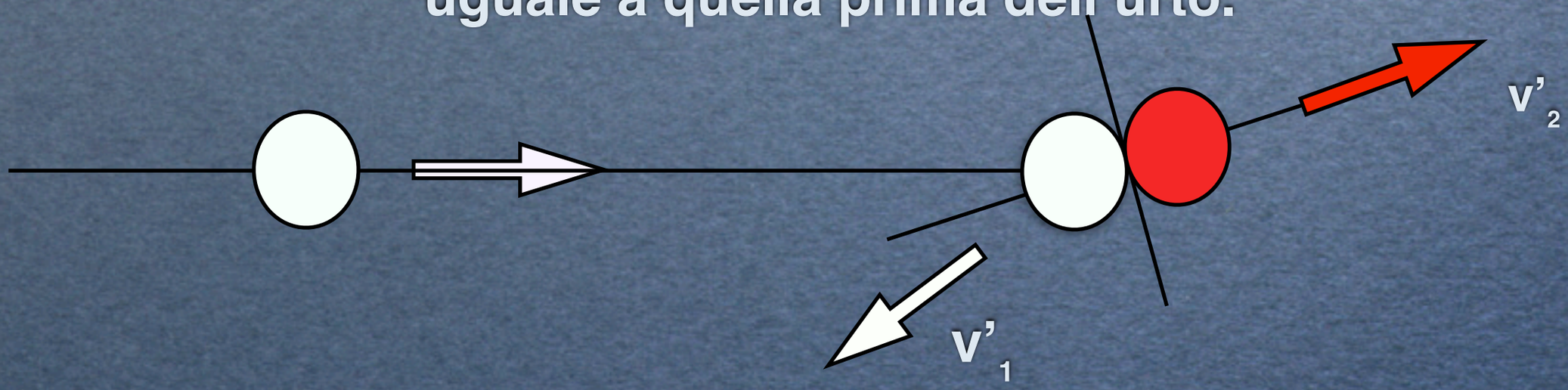
- Collisoni tra particelle
- Diffusione da parte di un campo di forze
- Collisioni anelastiche
- Moto in presenza di massa variabile nel tempo
- Sistemi di riferimento non-inerziali

Collisioni

Abbiamo tutti almeno una volta lanciato una palla da biliardo e assistito all'urto con le altre palle presenti sul tappeto verde. Le leggi della dinamica permetterebbero, in linea di principio, di vincere sempre al biliardo! In pratica esiste una certa incertezza sulla velocità e direzione impressa alla palla il che influisce sull'esito della giocata e determina la differenza tra un giocatore in gamba e un principiante. Vediamo quali sono le leggi basilari.

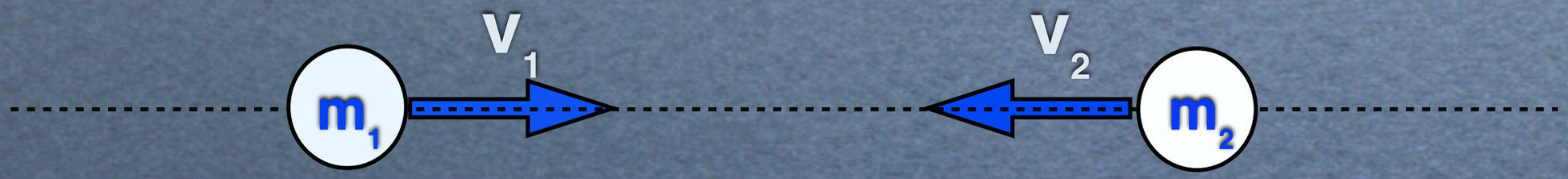
Immaginamo di seguire la palla bianca che impatta sulla rossa. L'urto non è perfettamente centrale e di conseguenza la palla bianca verrà deviata a un certo angolo e la rossa subirà un rinculo. Come calcolare l'angolo e la velocità delle due palle dopo l'urto?

L'urto viene detto 'elastico' in quanto le palle non subiscono deformazioni permanenti e l'energia cinetica dopo l'urto è uguale a quella prima dell'urto.



Potrebbe essere che la velocità v'_1 sia nella direzione $-v'_2$? Lascerò questo quesito senza risposta, per il momento. **Una traccia: considerate l'evento rovesciato nel tempo**

Cominciamo per gradi. Urti “frontali”, cioè i due corpi in collisione hanno velocità dirette lungo la stessa direzione e rimangono lungo la stessa direzione dopo l’urto.



Questo è il problema più semplice: è sufficiente invocare le leggi di conservazione di energia e momento lineare per trovare le velocità dei due corpi dopo l’urto. Se l’urto non fosse elastico perderemmo una informazione e il problema dovrebbe essere reimpostato sulla base di un modello specifico.

Indichiamo con v_i le velocità prima e con u_i quelle dopo l'urto *(i=1,2):*

Momento lineare: $m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2 = m_1\boldsymbol{u}_1 + m_2\boldsymbol{u}_2$

Energia cinetica: $\frac{1}{2}(m_1\,\boldsymbol{v}_1^2 + m_2\,\boldsymbol{v}_2^2) = \frac{1}{2}(m_1\,\boldsymbol{u}_1^2 + m_2\,\boldsymbol{u}_2^2)$

che riscriviamo

$$m_1(v_1-u_1) = m_2(u_2 - v_2)$$

$$m_1(v_1^2 - u_1^2) = m_2(u_2^2 - v_2^2)$$

Prendendo il rapporto termine a termine si trova subito $v_1+u_1 = u_2 + v_2$ **--- da mettere insieme con la prima equazione per ottenere un sistema di facile soluzione:**

$$m_1\,u_1 + m_2\,u_2 \;= m_1\,v_1 + m_2\,v_2$$

$$u_1 - u_2 = v_2 - v_1$$

La soluzione è elementare e si trova

$$u_1 = \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\, v_1 + \frac{2m_2}{m_1+m_2}\, v_2$$

$$u_2 = \frac{2m_1}{m_1+m_2}\, v_1 - \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\, v_2$$

cioè, simbolicamente: $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$

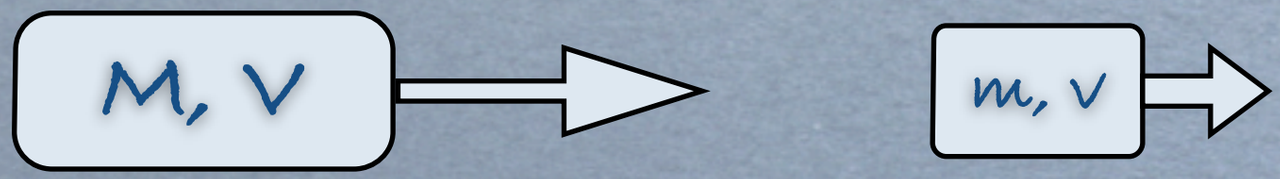
La matrice S che lega (u_1,u_2) a (v_1,v_2) ha proprietà notevoli che vi lascio dimostrare: $det(S) = -1,\ S \cdot S = 1$ **!**

(è sufficiente invocare la reversibilità delle equazioni di Newton!!!)

Si controllano subito alcune proprietà in casi speciali:

- $m_1 >> m_2$: $u_1 \approx v_1,\ u_2 \approx 2v_1 - v_2$ *(TIR contro Panda…)*
- $m_1 = m_2$: $u_1 = v_2,\ u_2 = v_1$ **(***scambio***)**
- $m_1 v_1 + m_2 v_2 = 0$: $u_1 = -v_1,\ u_2 = -v_2$ **(***urto visto dal sistema del centro di massa***)**

Intermezzo
Invarianza Galileiana



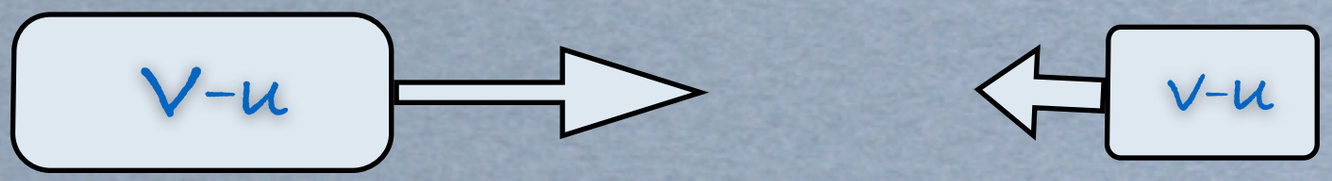
$M \gg m,\ V > v$

Immaginiamo ora di metterci in moto, ad es. su un mezzo della Polizia Stradale, con velocità u pari a quella del centro di massa dei due automezzi. La velocità è data dalla relazione

$$X_{cm} = (M X + m x)/(M+m)$$

$$u = U_{cm} = dX_{cm}/dt = (M V + m v)/(M+m)$$

Nel riferimento in moto i due mezzi hanno velocità rispettivamente V-u, v-u. Nel limite M»m l'urto si descrive così:



Il mezzo più leggero "rimbalza" su quello più pesante invertendo la velocità:



…e tornando all'osservatore fisso si troverà

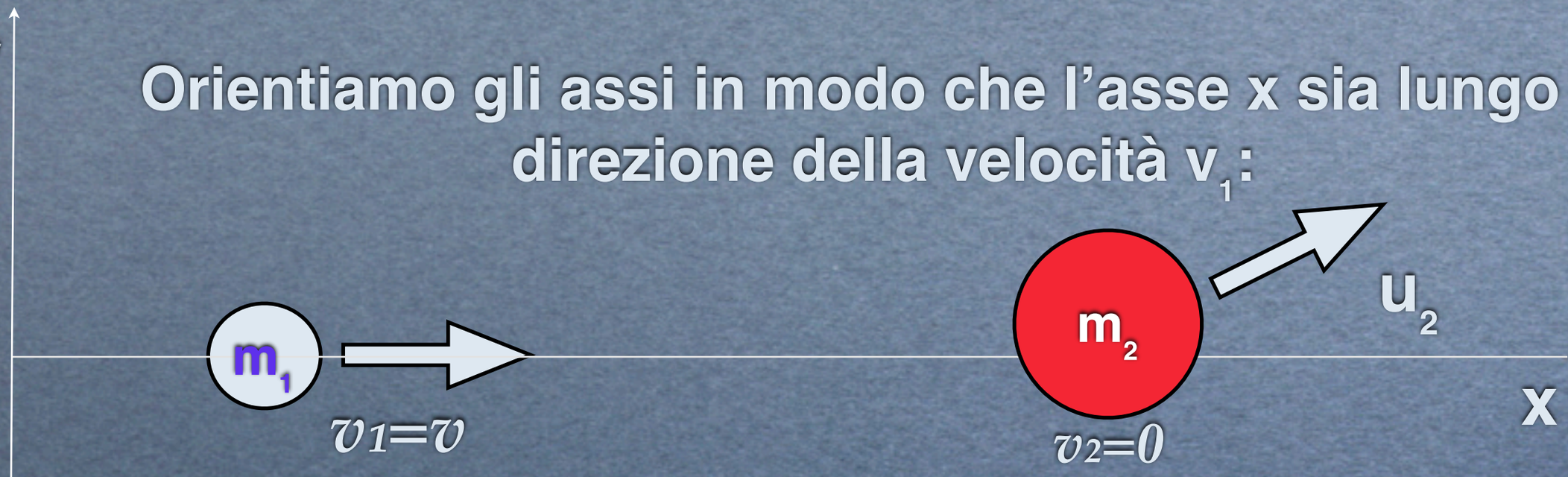


L'analogia possibile è con l'urto della palla da tennis contro la racchetta: la palla parte con velocità pari al doppio di quella della racchetta!

Veniamo al problema più impegnativo, urto tra due corpi liberi di muoversi su un piano (pensate sempre al biliardo). Consideriamo il caso in cui un corpo è in quiete. Questo non riduce la generalità dello studio, possiamo sempre porci in un sistema di riferimento in cui questa circostanza si verifica.



Orientiamo gli assi in modo che l'asse x sia lungo la direzione della velocità v_1:



Dalla conservazione di Energia e momento si trovano tre relazioni



$$m_1 v = m_1 u_{1x} + m_2 u_{2x}$$

$$0 = m_1 u_{1y} + m_2 u_{2y}$$

$$m_1 v^2 = m_1(u_{1x}^2 + u_{1y}^2) + m_2(u_{2x}^2 + u_{2y}^2)$$

3 equazioni ma 4 incognite! *I principi di conservazione di momento lineare ed energia NON SONO SUFFICIENTI*! Ciò significa che abbiamo bisogno di almeno una informazione in più, ossia siamo costretti a formulare qualche ipotesi sul meccanismo dell'urto. Questo lo vedremo poi. Per il momento accontentiamoci di ricavare tutto il possibile dalle 3 equazioni *assumendo di conoscere l'angolo della traiettoria del secondo oggetto rispetto all'asse x*. **Consideriamo perciò il sistema**

$$m_1 v = m_1 u_{1x} + m_2 u_{2x}$$

$$0 = m_1 u_{1y} + m_2 u_{2y}$$

$$m_1 v^2 = m_1 (u_{1x}^2 + u_{1y}^2) + m_2 (u_{2x}^2 + u_{2y}^2)$$

$$u_{2y} = u_{2x} \tan \vartheta$$

La soluzione non è difficile da trovare, tuttavia maschera la Fisica del problema:

$$u_{1x} = \frac{m_1 - m_2\cos(2\vartheta)}{m_1+m_2}\,v$$

$$u_{1y} = -\frac{m_2\sin(2\vartheta)}{m_1+m_2}\,v$$

$$u_{2x} = \frac{2m_1(\cos\vartheta)^2}{m_1+m_2}\,v$$

$$u_{2y} = \frac{m_1\sin(2\vartheta)}{m_1+m_2}\,v$$

Solo in un caso è molto facile decifrare queste formule, quello di masse uguali!

I due oggetti partono in direzioni tra loro ortogonali $u_1 \cdot u_2 = 0$

e inoltre

$$E_1 = \tfrac{1}{2}mv^2 \sin^2\Theta$$

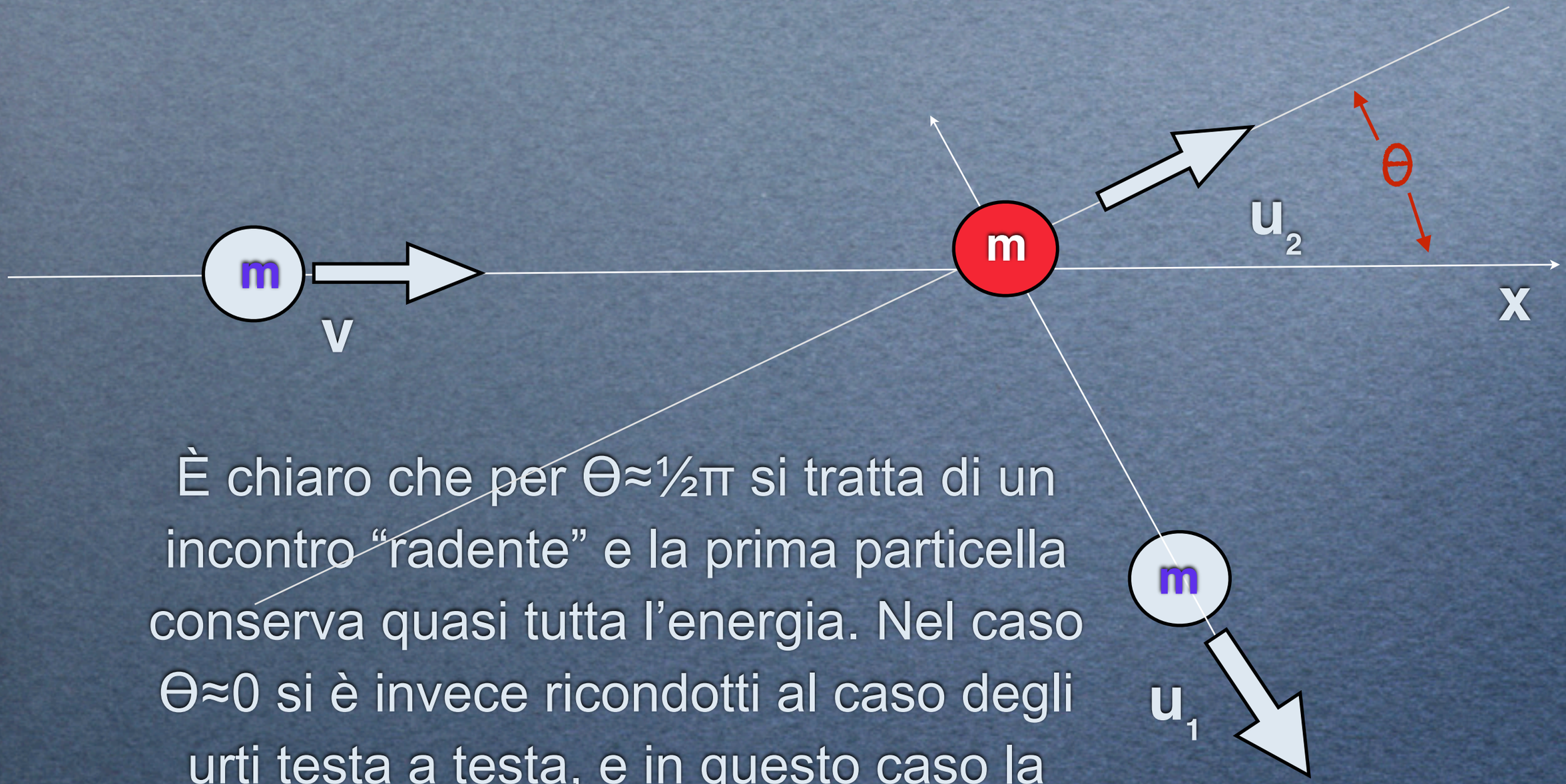
$$E_2 = \tfrac{1}{2}mv^2 \cos^2\Theta$$

$$u_{1x} = v\sin^2\vartheta$$

$$u_{1y} = -v\sin\vartheta\,\cos\vartheta$$

$$u_{2x} = v\cos^2\vartheta$$

$$u_{2y} = v\sin\vartheta\cos\vartheta$$



È chiaro che per Θ≈½π si tratta di un incontro “radente” e la prima particella conserva quasi tutta l’energia. Nel caso Θ≈0 si è invece ricondotti al caso degli urti testa a testa, e in questo caso la prima particella cede quasi tutta l’energia cinetica alla seconda.

Già ma l'angolo Θ come facciamo a calcolarlo?

Allora: in alcune circostanze (collisioni tra particelle elementari) non è dato sapere quale sia la distanza tra le particelle e già le informazioni che abbiamo ricavato sono preziose. Ad es. l'ortogonalità delle traiettorie segnala che le masse sono uguali - più in generale se l'angolo tra le due traiettorie finali è > ½π la particella in moto è la più leggera (e viceversa).

Tuttavia abbiamo ancora da guadagnare conoscenze in più considerando il fenomeno dell'urto da un'altro punto di vista, o meglio da un diverso sistema di riferimento, quello del *centro di massa*.

Scegliamo ora un sistema di riferimento inerziale in cui il momento lineare totale sia nullo. Questo è denominato il sistema del centro di massa. La posizione del centro di massa è per definizione la media pesata delle posizioni dei corpi che costituiscono il sistema meccanico:

$$Xcm = \Sigma_i\, m_i\, x_i \,/\, \Sigma_i\, m_i$$

Il sistema di riferimento che sia solidale con il centro di massa ha una velocità rispetto al laboratorio ottenuta derivando la equazione di definizione e cioè

$$Vcm = \Sigma_i\, m_i\, v_i \,/\, \Sigma_i\, m_i = \Sigma_i\, p_i \,/\, M$$

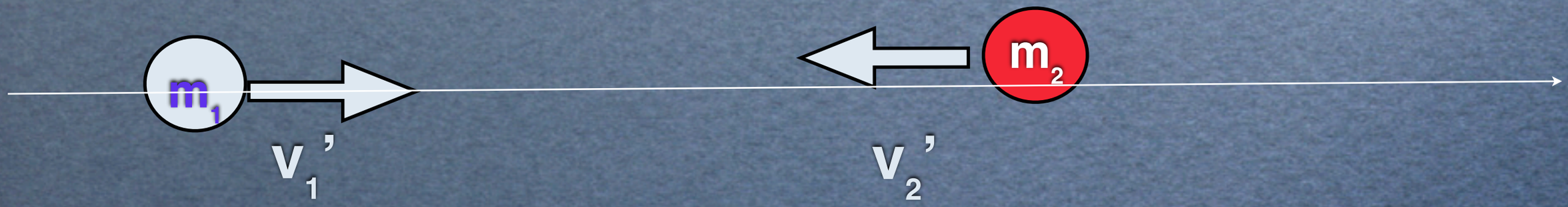
Il caso delle due palle da biliardo, di cui una è inizialmente in quiete, sarà descritto nel sistema del CM dalle velocità v_1' e v_2' date da ...

$$v'_1 = v - m_1 v/(m_1+m_2) = m_2\, v/(m_1+m_2)$$

$$v'_2 = -m_1\, v/(m_1+m_2)$$

(ricordiamo che v è la velocità iniziale della prima palla nel sistema fisso)

Controlliamo che $m_1\, v'_1 + m_2\, v'_2 = 0$, sinonimo di CM.
Entrambe le velocità sono dirette lungo l'asse x.



I vincoli che vengono dalla conservazione di energia e momento lineare sono un pò diversi da prima (sopprimiamo gli apici!)

$$m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2 = 0$$

$$m_1\vec{u}_1^2 + m_2\vec{u}_2^2 = m_1 v_{1x}^2 + m_2 v_{2x}^2$$

$$v_{1x} = \frac{m_2}{m_1+m_2}v,\; v_{2x} = \frac{-m_1}{m_1+m_2}v$$

$$v_{1y} = v_{2y} = 0$$

e queste equazioni sono più facili da risolvere, merito del sistema del CM

Infatti se utilizzando la prima equazione si elimina u_1 la seconda equazione diventa

$$u_2^2 = v_2^2 \quad e\ quindi\ anche\ u_1^2 = v_1^2$$

cioè le velocità dopo l'urto si mantengono inalterate (in modulo, non in direzione ovviamente). Siamo allora autorizzati a scrivere

$$\boldsymbol{u}_1 = m_2\, v\, \boldsymbol{n}/(m_1+m_2)$$

$$\boldsymbol{u}_2 = -m_1\, v\, \boldsymbol{n}/(m_1+m_2)$$

dove si intende che n è un vettore di lunghezza 1 che fissa la direzione che prende la prima palla nel sistema CM. Se adesso torniamo al sistema del laboratorio (o del biliardo se vi piace di più) basterà aggiungere alle due velocità quella del baricentro.

$$\vec{v}_1' = \frac{m_2 v}{m_1+m_2}\,\hat{n} + \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{v}$$

$$\vec{v}_2' = -\frac{m_1 v}{m_1+m_2}\,\hat{n} + \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{v}$$

Ovviamente non possiamo a priori sapere la direzione data dal versore n tuttavia alcune proprietà dell'urto possono essere ricavate anche in assenza di una conoscenza del meccanismo dettagliato: ad es. passando ai momenti lineari moltiplicando per le masse, troviamo

$$\vec{p}_1 = (m_1 v, 0),\ \vec{p}_2 = (0,0)$$

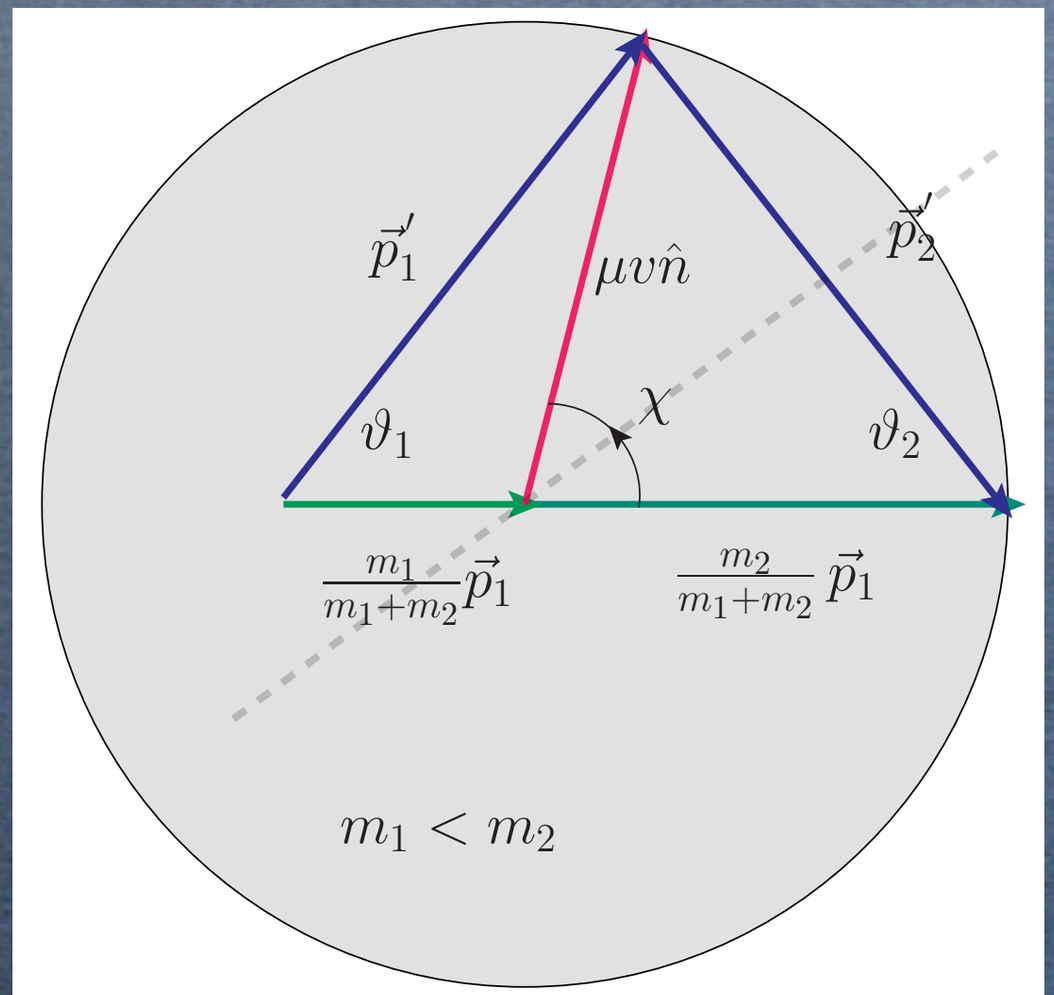
$$\vec{p}_1{}' = \mu v \hat{n} + \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{p}_1$$

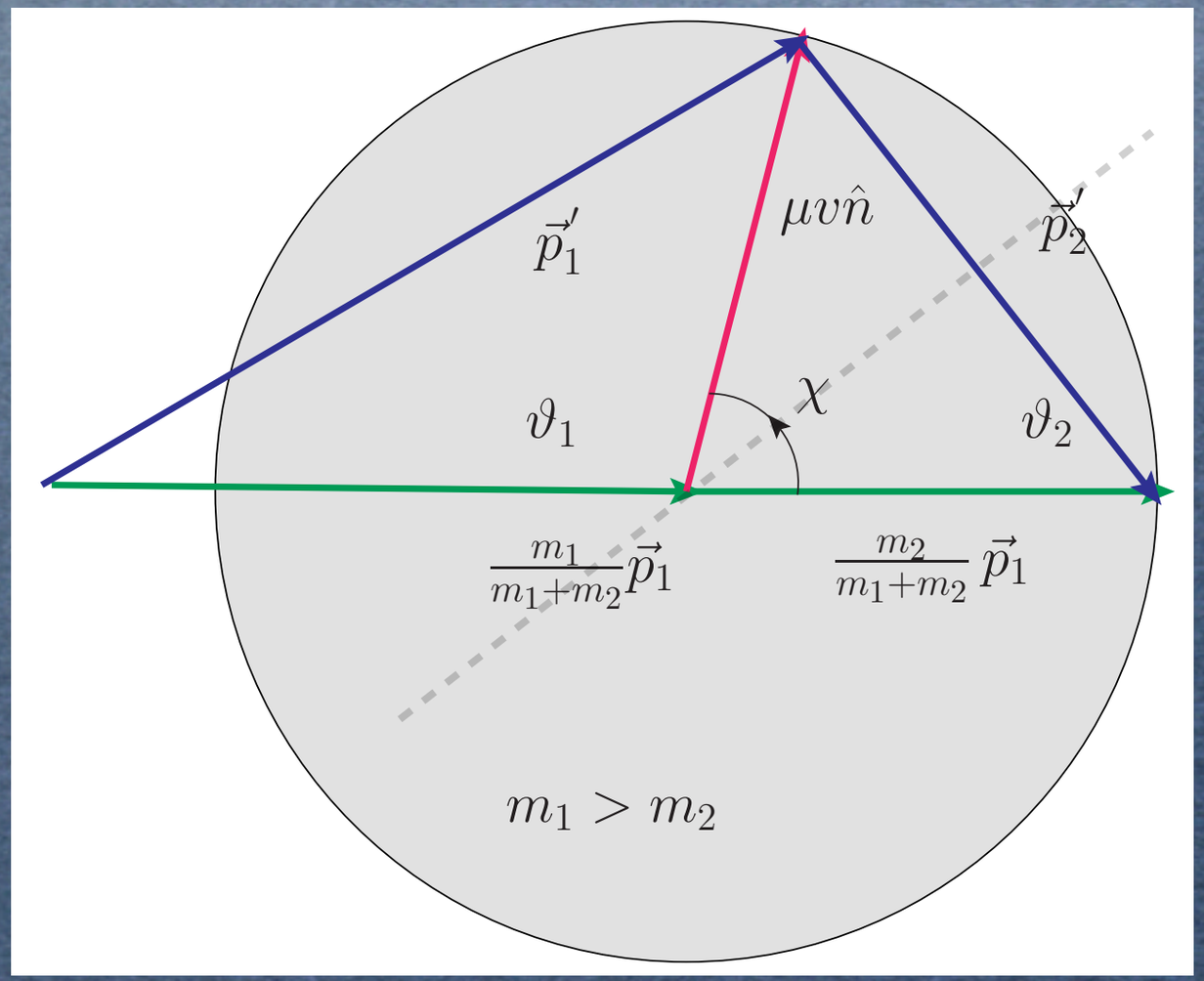
$$\vec{p}_2' = -\mu v \hat{n} + \frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{p}_1$$

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$$

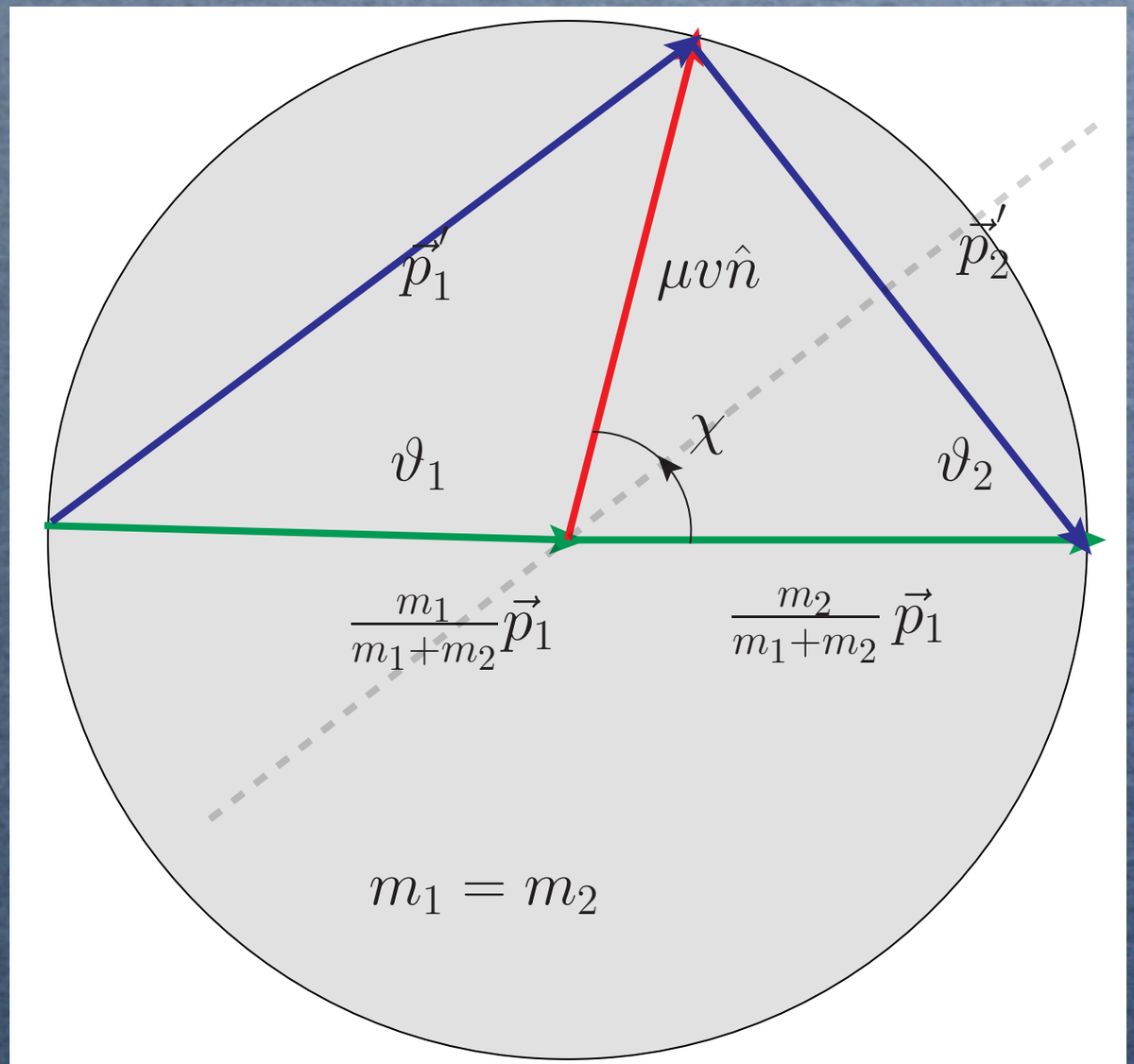
(μ è denominata "massa ridotta")

Si noti che i due termini che formano p'$_2$ hanno la stessa lunghezza! Allora possiamo rappresentare in modo grafico molto intuitivo l'insieme dei vettori in gioco:

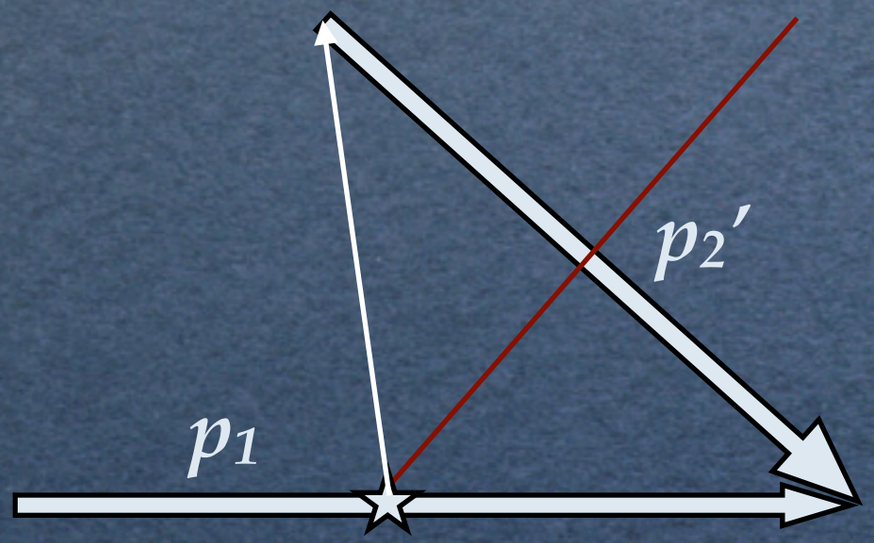




Se le masse sono uguali si ha un diagramma analogo che mostra geometricamente la ortogonalità delle velocità in uscita:

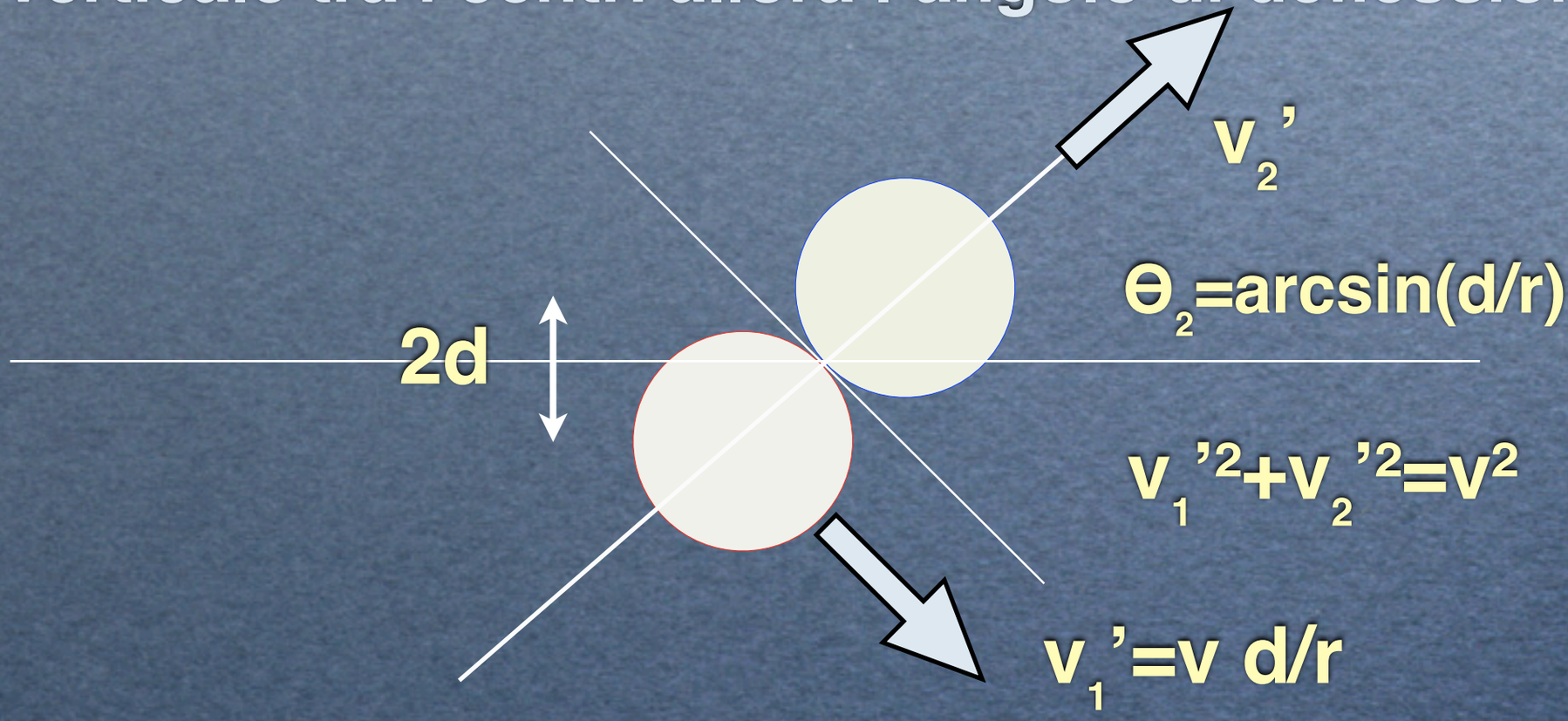


I diagrammi che abbiamo considerato nelle slides precedenti mostrano un fatto interessante. Immaginiamo di lanciare una particella di massa e momento lineare noti (m_1, p_1) contro una particella inizialmente ferma di cui ignoriamo la massa. Dal momento *p_2' con cui la seconda massa esce dalla zona dell'urto e che noi immaginiamo di poter misurare possiamo risalire alla massa m_2!* **Infatti riportiamo** *p_2' e p_1 in un diagramma: portiamo poi la perpendicolare a p_2' nel punto di mezzo. Facendo centro nella intersezione possiamo ora descrivere la circonferenza come nei diagrammi precedenti e da qui risalire al rapporto m_2/m_1!*



In realtà nel gioco del biliardo ci sono altre caratteristiche nell'urto che abbiamo finora trascurato. Il moto rotatorio della palla influisce sull'urto. E noi non abbiamo ancora le nozioni necessarie (moto del "corpo rigido"). Possiamo allora considerare al posto delle palle da biliardo dei dischi di ghiaccio secco che scivolano su un piano praticamente senza attrito. L'urto tra due dischi, che non presenta sforzi di taglio ma solo ortogonali alla superficie, si presta ad una analisi precisa delle modalità dell'urto (o se si preferisce si fa una partita di *curling*).

La forza impulsiva sul disco fermo trasferisce un impulso nella direzione ortogonale alla tangente nel punto di contatto. Se r è il raggio del disco e 2d la distanza verticale tra i centri allora l'angolo di deflessione è Θ_2:



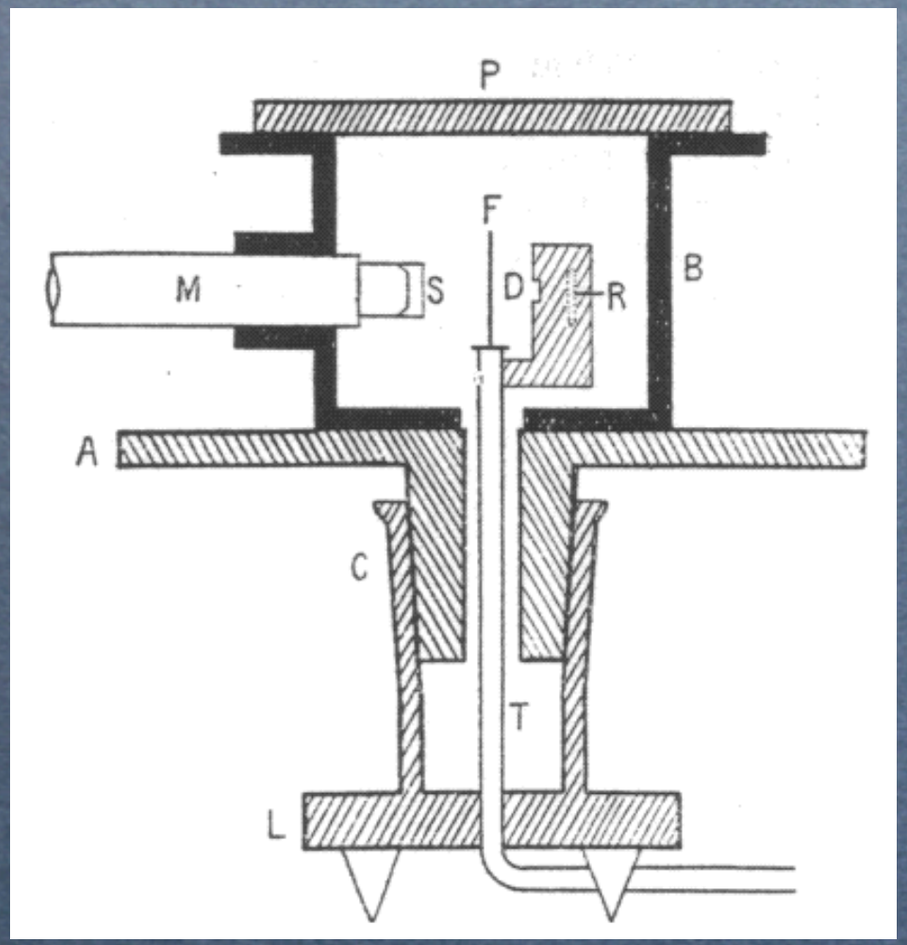
per dischi della stessa massa Θ_1 è complementare a Θ_2. Se c'è movimento di rotazione del primo disco e se c'è attrito non trascurabile il calcolo non è più valido.

Questi risultati vengono utiizzati nei simulatori del gioco del biliardo! Con la Fisica si possono produrre giochi per internet!

Inoltre i Fisici giocano continuamente a biliardo, anche se in realtà si parla di “acceleratori di particelle” e dal risultato degli urti imparano la Fisica della particelle subatomiche. Uno dei primi esperimenti fu quello di Geiger e Marsden che portò alla comprensione della struttura dell’atomo.



Rutherford-Geiger-Marsden



Esperimento di urto tra particelle α (nuclei di Elio) e atomi di oro. Tutti i nuclei atomici sono carichi positivamente e quindi si respingono con una forza che diminuisce con il quadrato della distanza. La traiettoria di una particella α che viene "sparata" nella direzione di un nucleo di oro, secondo le leggi di Newton, ha la forma di un'iperbole equilatera e risulta tanto più incurvata quanto più vicino passa al nucleo.

Dalla statistica delle deviazioni delle particelle α Rutherford fu in grado di confermare che il nucleo è molto compatto (10^5 volte più piccolo dell'atomo) e che la forza in gioco è proprio la forza di Coulomb $\sim r^{-2}$

FINE

della VIII lezione

Prossima lezione lunedì

13 aprile