Università degli Studi di Parma

Corso di Laurea in Ingegneria Elettr.Info.Telecomun.

anno accademico 2014-2015

Fisica 1



Prof. Enrico Onofri,
titolare del corso

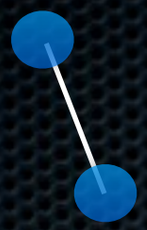
Dr. E. Liviotti,
esercitazioni

13/16 aprile 2015

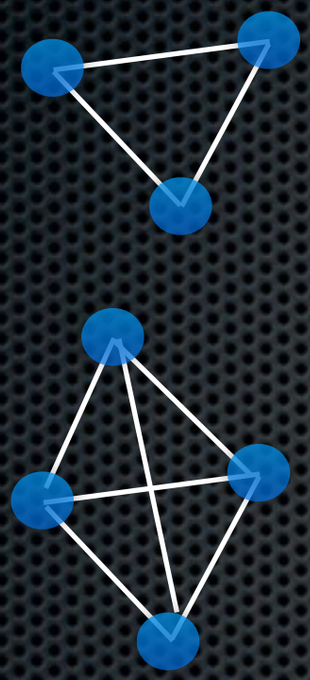
La meccanica del “corpo rigido”

Abbiamo già incontrato sistemi di molti punti materiali (ad es. il sistema solare). Ora studieremo sistemi di punti materiali condizionati da vincoli. Un sistema in cui esistano vincoli interni che fissino la distanza tra ogni coppia di punti è detto “*corpo rigido*”. Il numero di gradi di libertà cala decisamente: da 3N (tre coordinate per ogni punto materiale) si scende a 6 per N≧3,

Calcoliamo il numero di gradi di libertà necessari per fissare la posizione nello spazio di un corpo rigido. Ogni punto materiale richiede 3 coordinate cartesiane, ma per ogni coppia di punti si deve tenere conto del fatto che le posizioni sono vincolate dalla mutua distanza invariabile nel tempo:



$3*2-1=5$



$3*3-3=6$

$3*4-6=6$

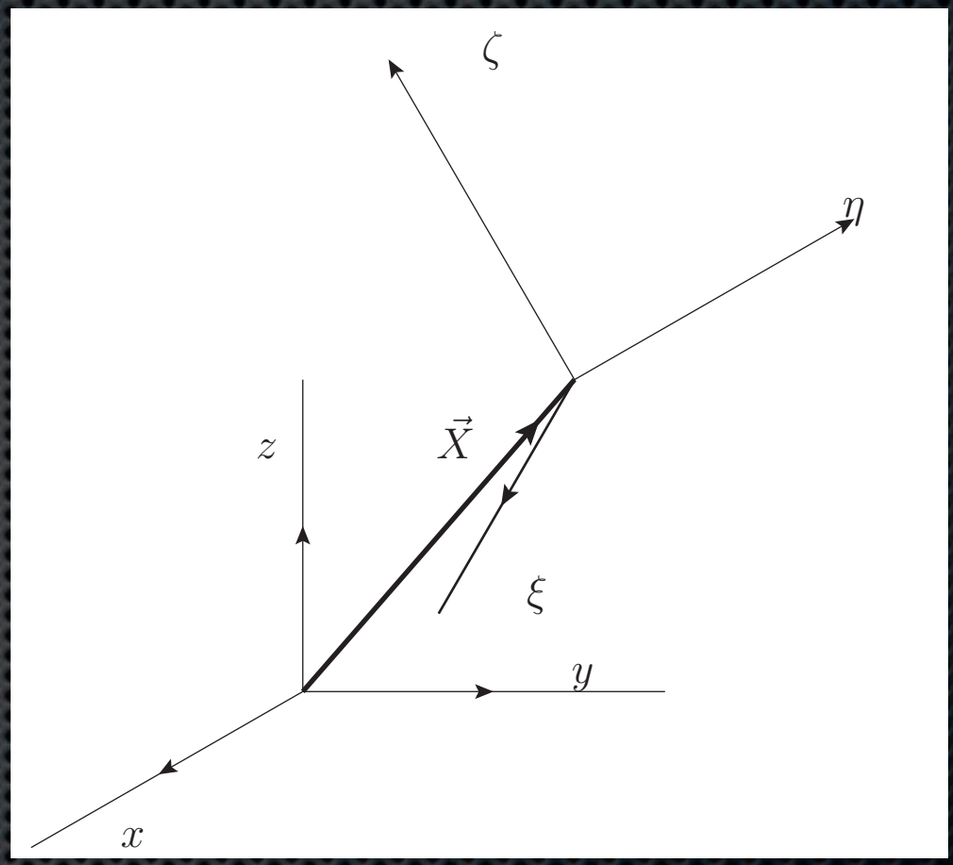
Ogni punto materiale aggiunto non porta a un aumento dei gradi di libertà perchè la sua posizione è fissata dalla distanza da tre altri punti

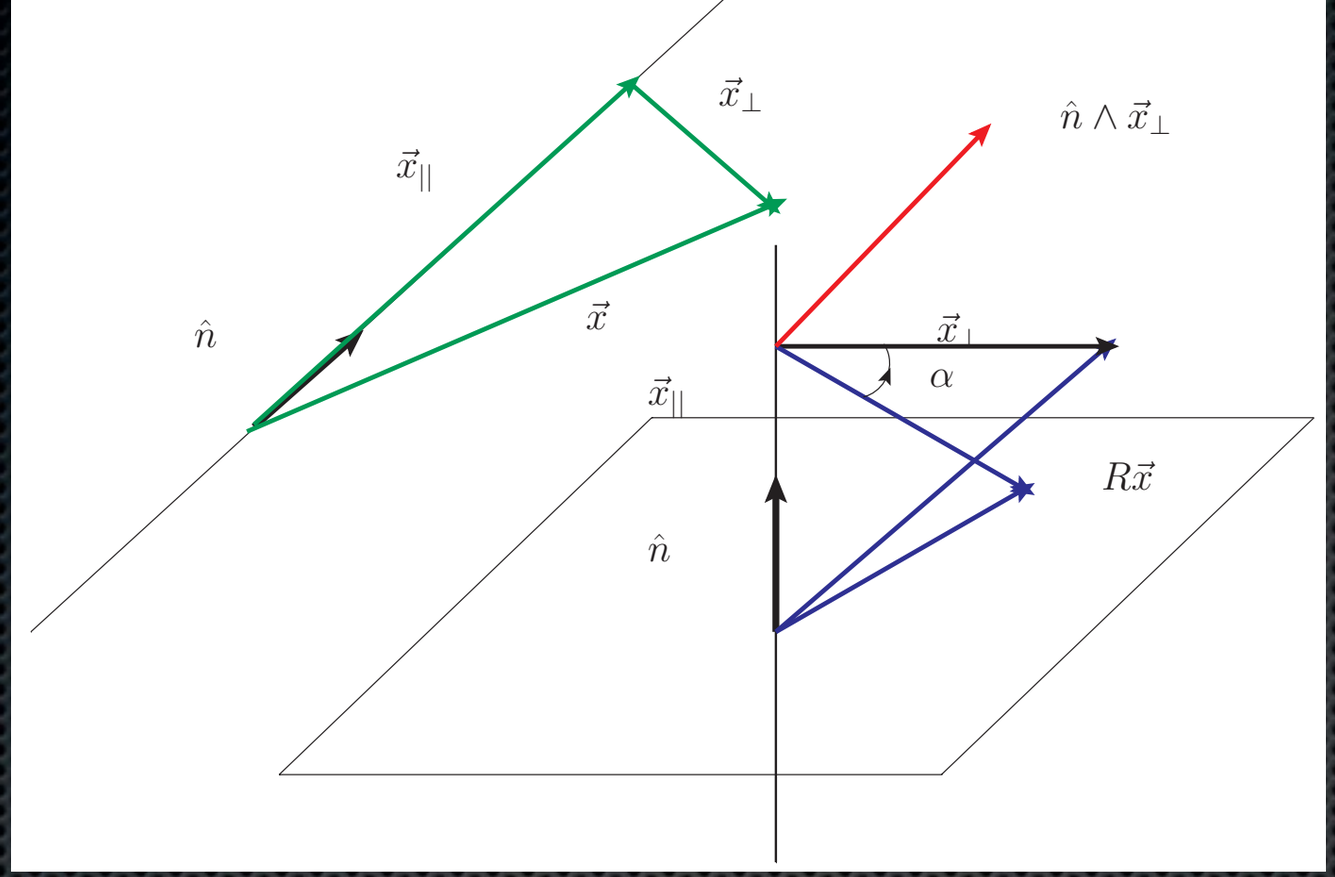
3-3=0 !

I sei gradi di libertà si identificano con la posizione di un singolo punto (ad es. il centro di massa) a cui si deve aggiungere l'informazione sulla rotazione spaziale che porta il sistema nella sua orientazione a partire da una orientazione convenzionale di riferimento. Una scelta spesso utile è quella di caratterizzare la posizione del sistema rigido attraverso la posizione del baricentro (o "centro di massa") e dalla rotazione che porta da un sistema di assi fisso (nel laboratorio) a un sistema di assi solidale con il sistema.

Resta quindi assodato che la posizione nello spazio di un corpo rigido è individuata da un vettore (X nella figura) e da una rotazione che porta dal sistema (x, y, z) del laboratorio al sistema (ξ, η, ς) solidale con il corpo rigido.

Come si parametrizza una rotazione?





Ogni rotazione può essere caratterizzata dal suo asse di rotazione e dall'angolo di rotazione. La componente del vettore x lungo l'asse rimane invariata sotto rotazione, mentre la componente ortogonale ruota in un piano ortogonale all'asse. In definitiva si trova

$$R\vec{x} = \vec{x}_{||} + \vec{x}_\perp \cos\alpha + \hat{n} \wedge \vec{x}_\perp \sin\alpha$$
$$= \vec{x} \cos\alpha + \hat{n} \wedge \vec{x} \sin\alpha + (1 - \cos\alpha)\, \hat{n}(\hat{n} \cdot \vec{x})$$

Infatti $\boldsymbol{x}_{||} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{n}(\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{x})$ e $x_\perp = x - x_{||}$

Per piccoli angoli di rotazione si possono approssimare cosα≈1 e sinα≈α e questo ci dà

$$R\vec{x} \approx \vec{x} + \alpha\,\hat{n} \wedge \vec{x}$$

Velocità: ogni punto solidale con il corpo rigido (CR) ha perciò una posizione nello spazio riferita agli assi del laboratorio che si esprime in funzione della posizione X dell'origine degli assi solidali con il corpo e della posizione relativa rispetto al quest'ultimo:

$$x = X_{cm} + R\,\xi$$

La velocità di ogni punto del CR si ottiene derivando rispetto al tempo (ξ è per definizione indipendente dal tempo)

$$v = dX/dt + dR/dt\;\xi$$

Abbiamo visto che una rotazione infinitesimale si esprime come $R\vec{\xi} \approx \vec{\xi} + \alpha\,\hat{n} \wedge \vec{\xi}$

che possiamo interpretare come $dR\,\vec{\xi} = d\alpha\,\hat{n} \wedge \vec{\xi}$

La velocità si può dunque scrivere come

$$\vec{v} = \vec{V} + \vec{\omega} \wedge \vec{\xi}$$

$$(\vec{\omega} \equiv \frac{d\alpha}{dt}\,\hat{n})$$

Il vettore ω è detto “velocità angolare” del CR. L’importante è che ω NON DIPENDE dalla scelta del punto di riferimento come origine del sistema solidale del CR.

La formula ci permette di esprimere l'energia cinetica di un CR (corpo rigido). Prima tuttavia dobbiamo richiamare la definizione di centro di massa. Per un CR con distribuzione continua di massa (una semplificazione matematica, la materia è discreta ma sulla scala macroscopica la materia si può trattare come continua)

$$X_{cm} = \frac{\int d^3x \ \rho(\vec{x}) \ \vec{x}}{\int d^3x \ \rho(\vec{x})}$$

La funzione ρ rappresenta la densità di massa e il suo integrale è la massa del CR. ρ d^3x rappresenta la massa contenuta nel cubetto d^3x.

Calcoliamo ora l'energia cinetica del corpo rigido: ogni volume elementare d^3x contribuisce $\frac{1}{2}\,\varrho(x)\,v^2\,d^3x$ all'energia cinetica, per cui in totale si avrà

$$E_K = \frac{1}{2}\int \rho(x)\, v^2\, d^3x$$

$$= \frac{1}{2}\int \rho(x)\, d^3x\, (V_{cm} + \vec{\omega} \wedge \vec{x})^2$$

$$= \frac{1}{2}\, V_{cm}^2 \int \rho(x)\, d^3x + \frac{1}{2}\int \rho(x)\, d^3x (\vec{\omega} \wedge \vec{x})^2$$

$$= \frac{M}{2} V_{cm}^2 + \frac{1}{2}\int \rho(x)\, d^3x (\omega^2\, x^2 - (\vec{\omega} \cdot \vec{x})^2)$$

Si noti che c'è un termine che abbiamo cancellato! Infatti x è intesa come distanza dal centro di massa

$$\int \rho(x)\, d^3x\, V_{cm} \cdot \vec{\omega} \wedge \vec{x} = V_{cm} \wedge \vec{\omega} \cdot \int \rho(x)\, d^3x\, \vec{x} = 0$$

Il primo termine equivale all'energia cinetica di una massa puntiforme con velocità pari a quella del centro di massa e di massa pari a quella del CR. *Il secondo contributo all'energia proviene dal moto rotatorio*. Ad es. la Terra ha un'energia cinetica data dal suo moto di rivoluzione più un contributo dovuto alla rotazione intorno al suo asse. Si calcola che questi due termini sono in rapporto circa 1/10000.

Il termine di rotazione necessita di un'ulteriore semplificazione. Vediamo.

$$\frac{1}{2}\int \rho(x)\, d^3x (\omega^2\, x^2 - (\vec{\omega}\cdot\vec{x})^2)$$

Si vede chiaramente che l'energia cinetica di rotazione è una funzione quadratica delle componenti della velocità angolare. Dato che ω non dipende da x dobbiamo cercare di portarla fuori dall'integrale! Il primo termine è ovvio:

$$\omega^2\ \frac{1}{2}\int \rho(x)\, d^3x\, x^2$$

mentre il secondo è un pò più complicato:

$$\frac{1}{2}\int \rho(x)\, d^3x (\vec{\omega}\cdot\vec{x})^2 = \frac{1}{2}\int \rho(x)\, d^3x (\Sigma_i \omega_i\, x_i)(\Sigma_j \omega_j\, x_j) =$$

$$= \frac{1}{2}\Sigma_{ij}\, \omega_i\, \omega_j \int x_i\, x_j\, \rho(x)\, d^3x$$

Ciò suggerisce di introdurre le quantità

$$\mathcal{I}_{ij} = \int (x^2\,\delta_{ij} - x_i\,x_j)\;\rho(x)\,d^3x$$

che vengono chiamate genericamente “momenti di inerzia” in termini dei quali si esprime l’energia:

$$E_K = \frac{M}{2}\,V_{cm}^2 + \tfrac{1}{2}\Sigma_{ij}\,\mathcal{I}_{ij}\omega_i\,\omega_j$$

Una volta che avremo calcolato le sei quantità $\boldsymbol{I_{ij}}$ saremo pronti a calcolare l’energia cinetica del CR. In pratica bisogna calcolare l’integrale di $\rho\,(x^2 - x_1^2)$, $\rho\,(x^2 - x_2^2)$, $-\,\rho\,x_1x_2)$ etc. Vedremo vari esempi.

Sfera omogenea di raggio r e massa M: per simmetria tutti i momenti di inerzia con indici diversi si annullano e quelli con indici uguali coincidono. Infatti

$$I_{12} = \iiint \rho\, x\, y\, d^3x = \iiint_{(x>0)} \rho\, x\, y\, d^3x + \iiint_{(x<0)} \rho\, x\, y\, d^3x =$$

$$\iiint_{(x>0)} \rho\, x\, y\, d^3x - \iiint_{(x>0)} \rho\, x\, y\, d^3x = 0$$

e cosí vale per I_{13} e I_{23}. D'altra parte per I_{11}

si ha

$$I_{11} = \iiint \rho\, (r^2 - x^2)\, d^3x = \iiint \rho\, (y^2 + z^2)\, d^3x$$

Il calcolo potrebbe risultare laborioso, ma c'è un trucco suggerito dalla simmetria!

$$\mathcal{I}_{11} = \mathcal{I}_{22} = \mathcal{I}_{33} = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}\mathcal{I}_{ii}$$

$$= \frac{2}{3}\int \rho\, r^4 dr d\Omega = \frac{2}{5} M R^2$$

Buone notizie! Esiste in generale almeno una scelta di assi di riferimento per qualunque CR tale che $\boldsymbol{I_{ij}} = 0$ per $i \neq j$.

Questi si chiamano "*assi principali di inerzia*" e per questa scelta di assi l'energia di rotazione è semplicemente $\Sigma_i \boldsymbol{I_{ii}}\, \omega_i^2$. I momenti di inerzia $\boldsymbol{I_{ii}}\ (= \boldsymbol{I_i})$ si chiamano momenti di inerzia principali. Spesso è sufficiente considerare la simmetria del CR per individuare gli assi principali altrimenti c'è un metodo generale per individuarli. Si tratta di determinare gli assi che rendono diagonale la matrice $\boldsymbol{I_{ij}}$.

Cilindro omogeneo lungo L e di raggio R: gli assi principali sono dati dall'asse di simmetria e due assi qualunque ortogonali a questo. Il calcolo ci dà per il momento di inerzia nella direzione dell'asse del cilindro

$$I_3 = \int_0^L dz \int_0^R r\,dr \int_0^{2\pi} d\varphi\,\rho\, r^2 =$$

$$L \times 2\pi \times \rho \times R^4/4 =$$

$$L \times 2\pi \times \frac{M}{\pi R^2\, L} \times R^4/4 =$$

$$\frac{1}{2} M R^2$$

Possiamo ora calcolare come rotola un cilindro lungo un piano inclinato. L'energia cinetica è data da

$$\tfrac{1}{2}Mv^2 + \tfrac{1}{2}\,\mathcal{I}\,\omega^2$$

Se il cilindro rotola senza strisciare la velocità v e ω sono legate da $v=\omega R$, dunque

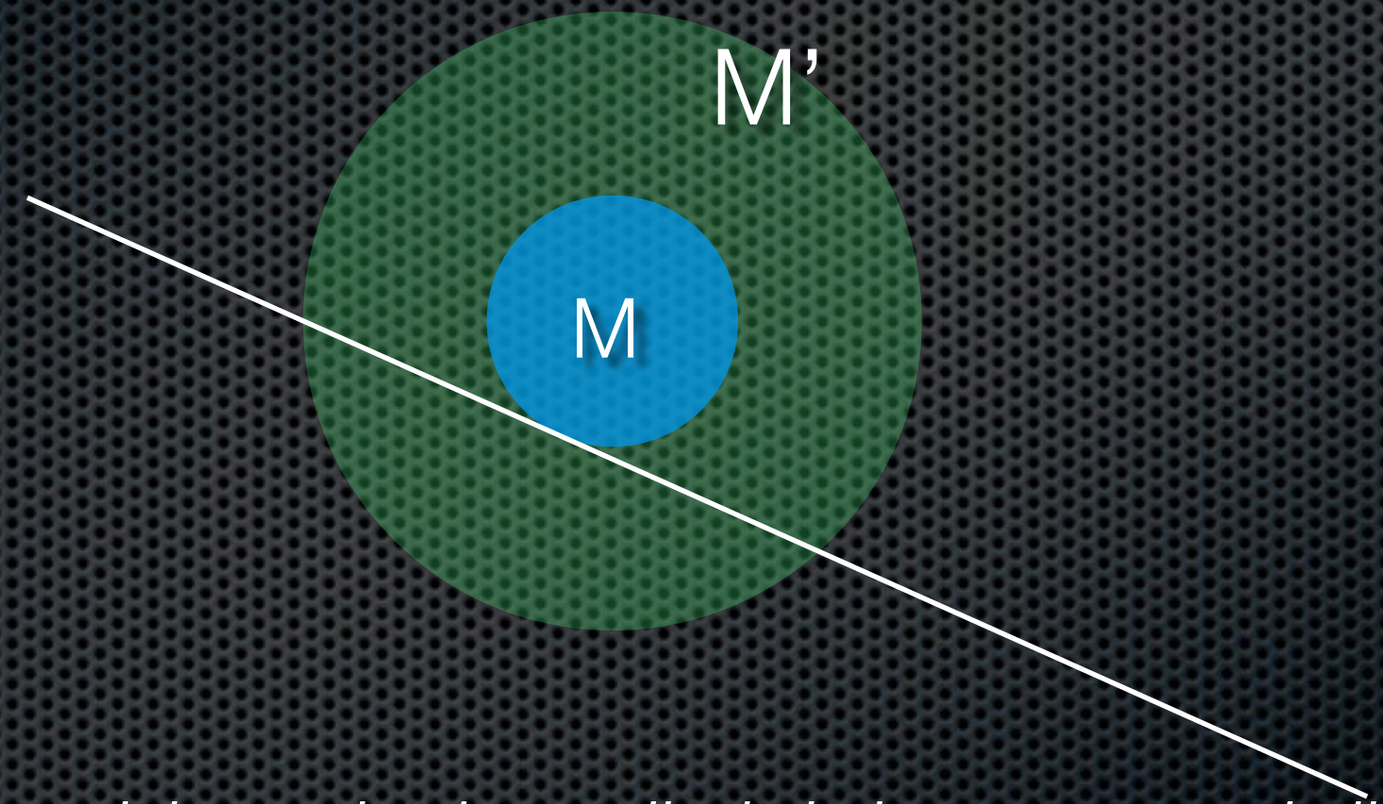
$$E_K = \tfrac{1}{2}\,M\,v^2 + \tfrac{1}{2}\,\mathcal{I}\,\omega^2 = \tfrac{1}{2}\,M\,v^2 + \tfrac{1}{2}\,(\tfrac{1}{2}MR^2)\,(v/R)^2 = 3/4\,M\,v^2$$

L'effetto della rotazione è quindi equivalente ad aumentare di un fattore 3/2 l'energia cinetica rispetto al caso del punto materiale con la stessa massa e che scivoli senza attrito. L'energia totale è perciò

$$E = 3/4\,M\,v^2 + M\,g\,z$$

Se indichiamo con s lo spostamento lungo il piano inclinato, z=s sinϴ, v=ds/dt, alla fine troviamo che il cilindro subisce un'accelerazione $2/3\ g\ sin\theta$, cioe *2/3 di quella che avrebbe un punto materiale che scivolasse senza attrito*. La rotazione rallenta la discesa! **Intuitivamente, la forza di gravità non solo deve accelerare il CR ma deve anche metterlo in rotazione e parte dell'energia potenziale si trasforma in energia di rotazione.** Se analizziamo il problema in dettaglio scopriamo in modo più "fisico" la ragione del rallentamento. Ciò sarà fatto dopo che avremo studiato il momento angolare del CR.

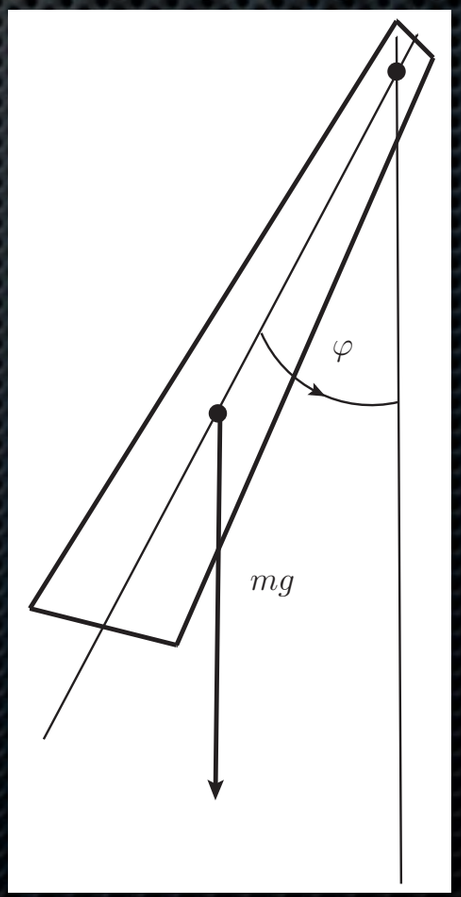
Se al cilindro che rotola sul piano inclinato attacchiamo due ruote solidali di raggio maggiore il momento di inerzia complessivo sarà $\frac{1}{2}MR^2 + M'R'^2$ e l'effetto di rallentamento sarà molto maggiore!



Esercizio: calcolare gli altri due momenti di inerzia del cilindro omogeneo (lungo gli assi ortogonali a quello di simmetria)

Pendolo fisico: consideriamo un CR che sia libero di ruotare intorno a un asse orizzontale. Sia L la distanza tra l'asse di rotazione e il centro di massa. Inoltre l'energia cinetica di rotazione sia data da

$\frac{1}{2} \mathcal{I} \omega^2$ dove I è il momento di inerzia rispetto all'asse di rotazione. Se φ è l'angolo formato tra la congiungente asse-baricentro, allora...



$$E = \tfrac{1}{2}\, \mathcal{I}\, \omega^2 - mgL\,(1-\cos\phi) \quad con\ \omega = d\phi/dt$$

Per piccole oscillazioni cos $\phi \approx 1 - \tfrac{1}{2}\,\phi^2$ e la frequenza delle oscillazioni sarà $\Omega^2 = mgL / \mathcal{I}$. Ora $\mathcal{I}$ è dato da $\mu\, m\, L^2$ per ragioni dimensionali dove μ è un numero puro e quindi

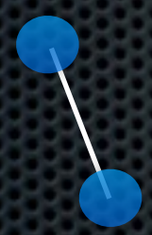
$$\Omega^2 = (g / L)/\mu$$

Conclusione? Si può utilizzare questo trucco per misurare il momento di inerzia relativamente ad un asse qualunque usando un cronometro!

Ricordiamo sempre che il momento d'inerzia rispetto a un qualunque asse deve risultare

$$\mu M L^2$$

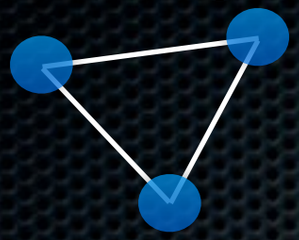
dove M è la massa, L rappresenta una dimensione lineare caratteristica del corpo rigido e μ è un numero puro. Questo aiuterà ad evitare errori banali nel calcolo della dinamica di un corpo rigido. Vediamo alcuni esempi:



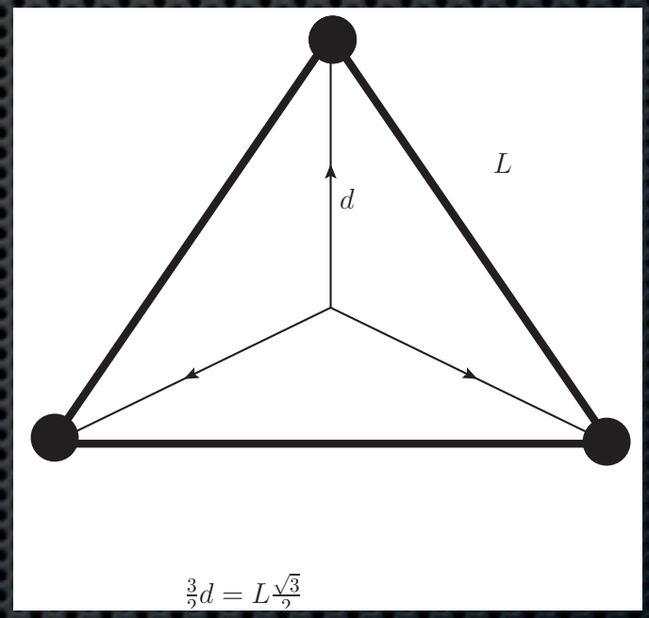
- un manubrio lungo L e con due masse m alle estremità. Il momento di inerzia lungo l'asse longitudinale è *zero;* lungo un asse qualunque passante per il baricentro e ortogonale all'asse si ha

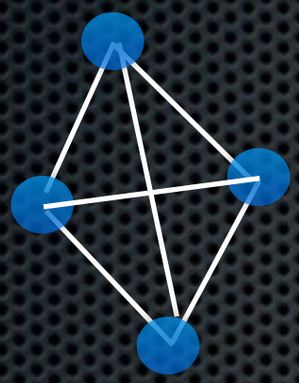
$$I = 2\ m\ (L/2)^2 = \tfrac{1}{4}\ M\ L^2.$$

Il momento di inerzia lungo un asse passante per il baricentro e ortogonale al piano vale



$$\mathcal{I} = \frac{1}{3} M L^2$$





Per la piramide regolare si trova

$$\mathcal{I} = \frac{1}{4} M L^2$$

per un qualunque asse di simmetria del tetraedro

Vi invito a calcolare il momento di inerzia per una sfera cava dove la massa è distribuita uniformemente sulla superficie

(risultato: $\mathcal{I} = \frac{2}{3} M R^2$)

è questo il momento di inerzia che si deve applicare a un pallone da calcio!

Seconda parte

Momento angolare e momento delle forze esterne

Alcune proprietà importanti della meccanica dei CR

1. La velocità angolare ω è indipendente dal sistema di riferimento solidale con il CR. Le sue componenti ovviamente dipendono dal riferimento ma non il vettore in sè.

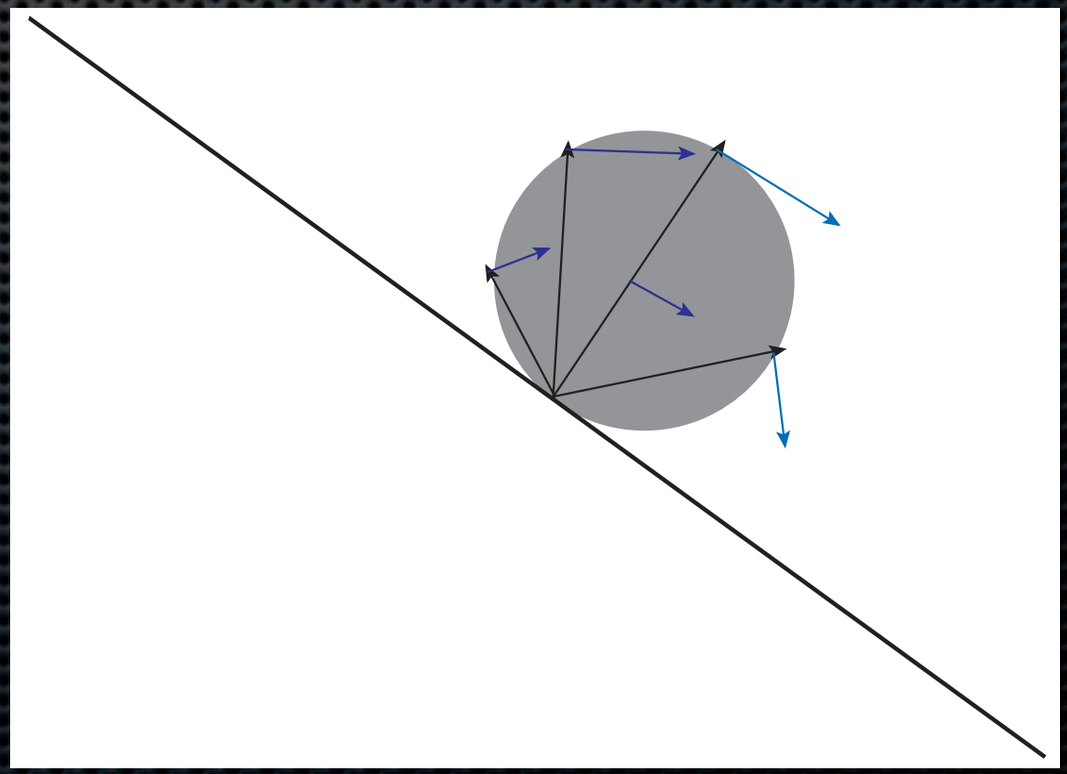
2. I momenti di inerzia relativi a due assi paralleli di cui uno passa per il centro di massa sono legati dalla relazione (nota come teorema di Steiner)

$$\mathcal{I}_1 = \mathcal{I}_0 + M\, d^2$$

essendo M la massa del CR e d la distanza tra i due assi

3. Se la velocità del centro di massa V e la velocità angolare ω sono ortogonali per una qualche scelta dell'origine delle coordinate, questo fatto sussiste per qualunque altra scelta dei riferimento solidale con il CR. Inoltre esiste un punto in cui la velocità si annulla e il moto del CR coincide istantaneamente con una pura rotazione. (Si pensi a un cilindro che rotola senza strisciare su un piano inclinato - il punto di contatto è in quiete e il moto è dato da una rotazione intorno a quel punto.

Nella figura la velocità angolare è ortogonale al foglio (schermo).



Troverete la dimostrazione di queste affermazioni nelle pagine finali della lezione. Per adesso controlliamo la validità di 1-2-3 con un piccolo esempio. Nel caso del cilindro che rotola sul piano inclinato l'energia cinetica è $\frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} \mathcal{I} \omega^2$ riferendosi al sistema del CM. Se invece prendiamo come asse la retta di contatto, questa di trova istantaneamente in quiete ($V'=0$), la vel. ang. è sempre ω e l'energia cinetica è perciò $\frac{1}{2} \mathcal{I}' \omega^2$, ma per 'Steiner' $\mathcal{I}' = \mathcal{I} + M r^2$ e dunque

$$\frac{1}{2} \mathcal{I}' \omega^2 = \frac{1}{2} (\mathcal{I} + M r^2) \omega^2 = \frac{1}{2} \mathcal{I} \omega^2 + \frac{1}{2} M V^2.$$

c.v.d.

Momento angolare

Dopo l'energia cinetica, la grandezza più importante per il CR è il momento angolare. Questo è definito relativamente a uno specifico riferimento, preferibilmente quello del CM.

$$\vec{M} = \int d^3x\, \rho(x)\, \vec{x} \wedge \vec{v}$$

$$= \int d^3x\, \rho(x)\, \vec{x} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{x})$$

Ricordate il 'doppio prodotto vettoriale?
Tornate a vedere 'esercizi.pdf';
si trova:

$$x \wedge (\omega \wedge x) = x^2 \omega - (\omega . x) x$$

E qui quasi per miracolo ricompaiono gli stessi momenti di inerzia già coinvolti con la energia cinetica, infatti

$$\vec{M} = \int d^3x\, \rho(x)(x^2\, \vec{\omega} - (\omega \cdot \vec{x})\, \vec{x})$$

$$M_i = \sum_j \mathcal{I}_{ij}\, \omega_j$$

La stessa matrice dei momenti di inerzia che serve a esprimere l'energia cinetica ci dà anche la relazione tra velocità angolare e momento angolare. Ma c'è un fatto molto importante: M e ω NON sono paralleli in generale. La relazione è lineare ma non è una necessariamente una proporzionalità diretta. Solo per certi assi di rotazione avviene che $M = \mathcal{I}\, \omega$,

per qualche costante $\mathcal{I}$: le direzioni per cui ciò avviene sono dette *assi principali di inerzia*

Conclusione: ***gli assi principali di inerzia sono le uniche direzioni possibili di ω per le quali ω e M sono paralleli.***

Se le forze applicate al CR sono tali da avere momento nullo allora M è costante nel tempo. Questo non vale per ω, ma se ω è diretta lungo un asse principale allora la sua direzione coincide con quella di M ed è costante nel tempo. Questo fatto è importante per comprendere certe caratteristiche non proprio intuitive nel moto di un CR.

Come si trovano gli assi principali - se non ci sono proprietà di simmetria a guidarci? L'equazione da risolvere è la seguente

$$M_i = \sum_j \mathcal{I}_{ij}\,\omega_j = \lambda\,\omega_i$$

che deve valere per un qualche scalare λ. Si tratta di un sistema lineare omogeneo che ammette soluzione se e solo se il determinante del sistema di annulla. Dunque dobbiamo trovare le radici dell'equazione del terzo grado

$$\det[\mathcal{I}_{ij} - \lambda\,\delta_{ij}] = 0$$

che significa esplicitamente

$$\begin{vmatrix} I_{11}-\lambda & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22}-\lambda & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Naturalmente, se i momenti di inerzia con indici diversi I_{12}, I_{13}, I_{23} si annullano, allora siamo già nel sistema di assi principali e sulla diagonale troviamo già i momenti di inerzia principali. Altrimenti c'è da lavorare...

L'equazione dinamica per il momento angolare di un CR si ricava direttamente dall'equazione di Newton.

$$\vec{L} = \sum_j m_j \, \vec{x}_j \wedge \vec{v}_j$$

$$\frac{d}{dt}\vec{L} = \sum_j m_j \, \vec{x}_j \wedge \vec{a}_j = \sum_j \vec{x}_j \wedge \vec{F}_j$$

Dunque *la derivata rispetto al tempo del momento angolare di un CR coincide con il momento delle forze esterne*. Insieme con la legge del moto per il momento lineare totale queste formano le equazioni dinamiche fondamentali del corpo rigido:

P=momento lineare, F=risultante delle forze esterne,

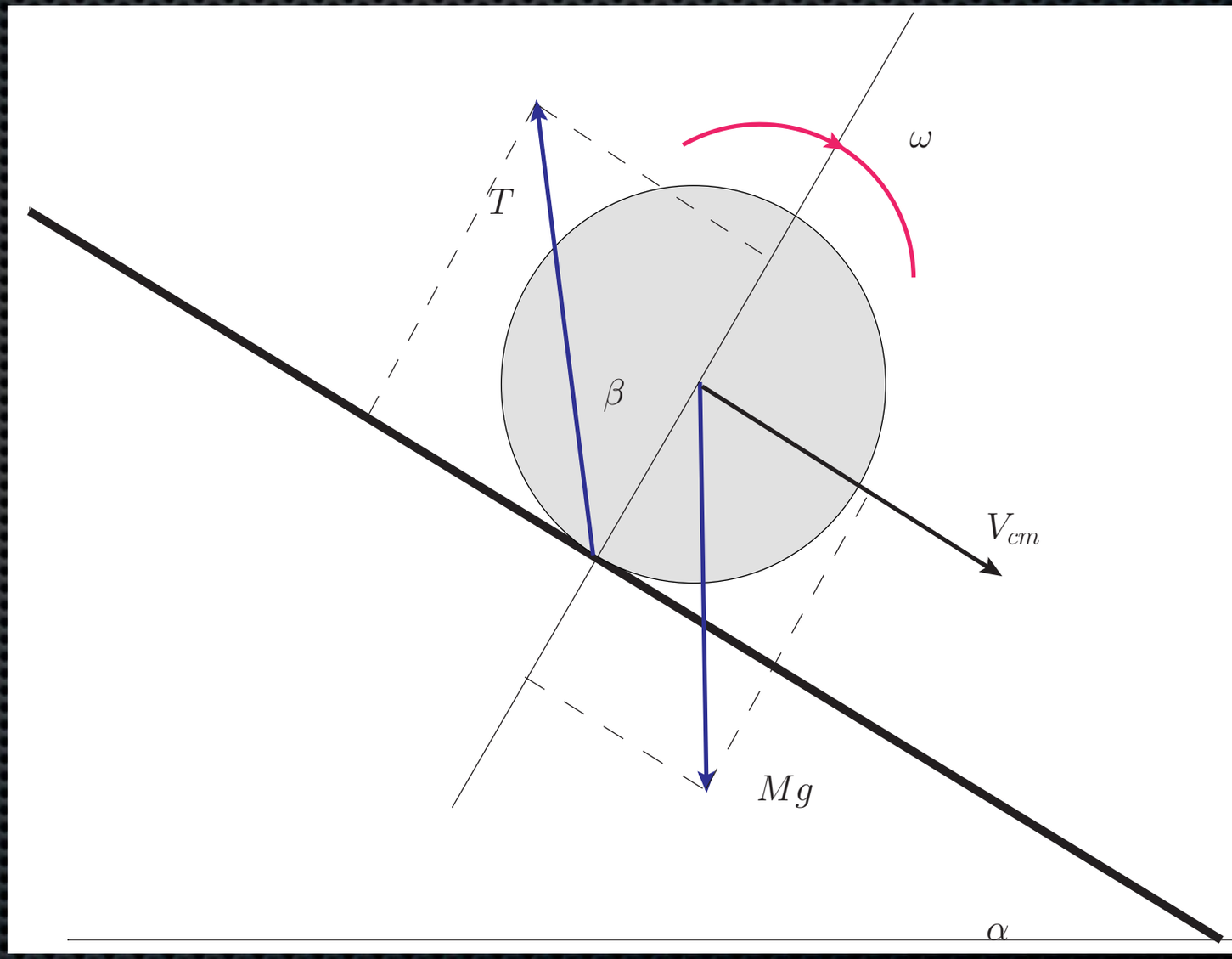
$$\frac{d}{dt}\vec{P} = \vec{F}$$

L=momento angolare, K=momento delle forze esterne

$$\frac{d}{dt}\vec{L} = \vec{K}$$

Analizziamo il moto del cilindro che rotola sul piano inclinato alla luce delle equazioni dinamiche. Dovremo riottenere quanto calcolato con il metodo di Lagrange.

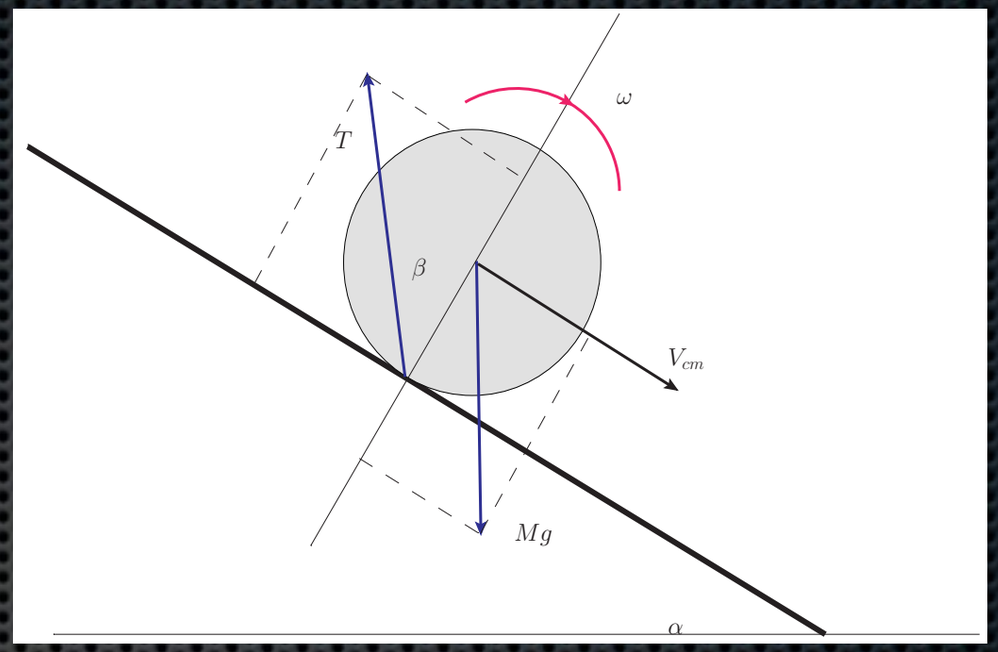
Il cilindro è soggetto a due forze, il peso Mg e la reazione vincolare T. Si assume che il contatto sia tale che non ci sia strisciamento (come un pneumatico di buona qualità sull'asfalto) ossia la generatrice del cilindro a contatto con il piano è istantaneamente in quiete; ne segue che tra velocità del CM e velocità angolare ω vale la relazione V=ωR.



Scriviamo le leggi di Newton per il CM:

$$Ma = Mg\sin\alpha - T\sin\beta$$

$$Mg\cos\alpha = T\cos\beta$$



Manca ovviamente un pezzo di informazione. Infatti accelerazione *a* e reazione T (sia in modulo che direzione) costituiscono tre incognite, ma abbiamo solo due equazioni. Dove trovare la terza? La differenza con il punto materiale che scivola senza attrito sta nel fatto che in quel caso β=0 e allora $a = g\,sin\alpha$. Ma nel caso del cilindro che rotola senza strisciare β è diverso da zero ed è proprio questo induce la rotazione!

L'equazione mancante è fornita da $dL/dt=K$. Solo T contribuisce al momento delle forze in quanto il peso agisce giusto sul centro di massa. Il momento di T è precisamente $T\,R\,sin\beta$. Arriviamo cosí alle equazioni...

$$1) \quad Ma = Mg\sin\alpha - T\sin\beta$$

$$2) \quad Mg\cos\alpha = T\cos\beta$$

$$3) \quad I\dot{\omega} = TR\sin\beta$$

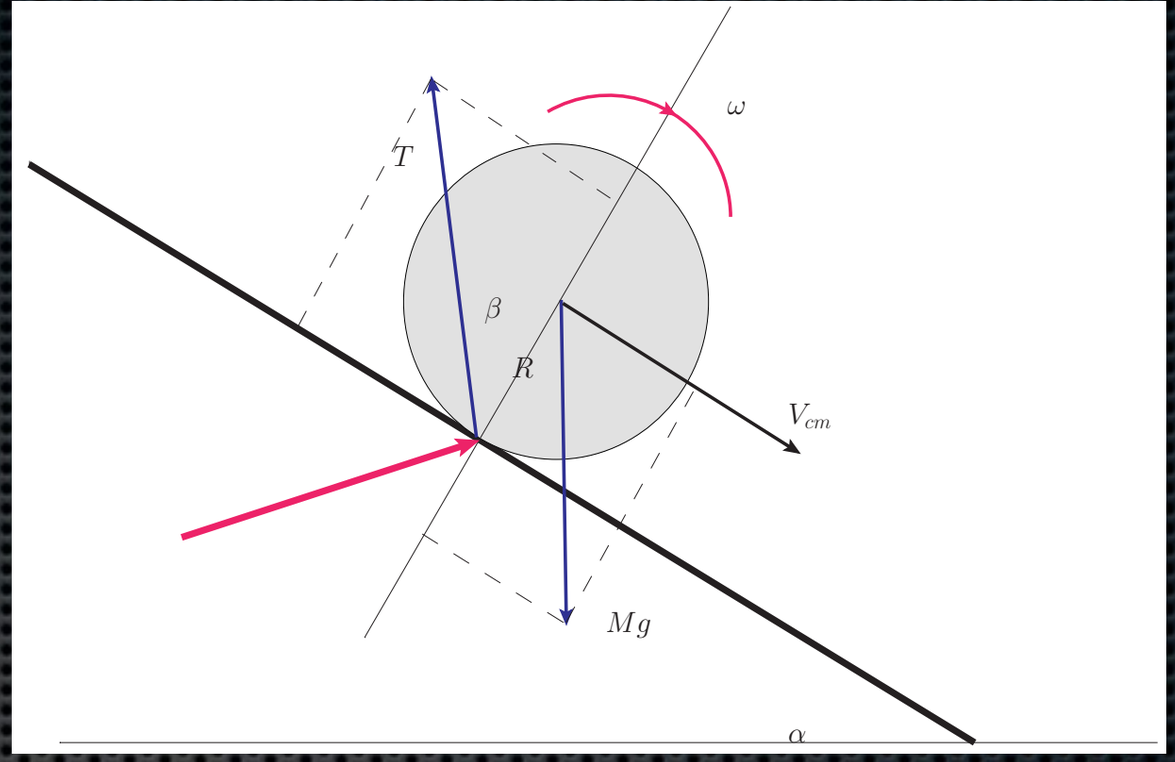
$$4) \quad \omega R = v \rightarrow \dot{\omega} R = a$$

Dall'eq.3)-4) otteniamo Tsinβ che inserita nella eq.1) dà $a = 2g/3\ sin\alpha$, come sappiamo già. Ma in più possiamo ricavare anche T e β: $T\ sin\beta = Mg\ sin\alpha/3$ da cui

$tan\beta = ⅓\ tan\alpha$, $T = Mg\ cos\alpha/cos\beta = Mg\ \sqrt{\{(1+8\ cos^2\alpha)\}}/3$

Allora: *T ha il ruolo di bilanciare il peso e anche di fornire il momento che mette il cilindro in rotazione, e la sua componente Tsinβ è responsabile della minore accelerazione rispetto allo scivolamento senza attrito.*

C’è un modo alternativo per calcolare il moto del cilindro. Centriamo il riferimento nel punto di contatto. Cosí *T ha momento nullo* ed è il peso a fornire il momento delle forze per far ruotare il cilindro. Le equazioni cambiano un pò faccia ma sono equivalenti:



I’=I+MR² (Steiner)

$$1') \quad Ma = Mg\sin\alpha - T\sin\beta$$

$$2') \quad Mg\cos\alpha = T\cos\beta$$

$$3') \quad MgR\sin\alpha = I'\dot{\omega} = \frac{3}{2}MR^2 a/R$$

Dall' eq.3') si vede che ritroviamo l'accelerazione corretta, e dalle 1'),2') si ritrova T. Ma *se non ci interessa T questa è la strada più veloce!*

Conclusioni

Conviene avere a disposizione sia il metodo diretto basato direttamente sulle equazioni di Newton sia il metodo di Lagrange. Quest'ultimo permette di ricavare le equazioni del moto nel modo più economico. Il primo metodo d'altra parte va più a fondo nella Fisica dei fenomeni e permette quindi una maggiore comprensione a livello intuitivo.

Appendice

Dimostriamo le affermazioni di pag.20

1. La velocità angolare del CR è indipendente dalla scelta dell'origine delle coordinate solidali con il CR. *Prova*: immaginiamo di centrare un secondo sistema nel punto che dista Δx dal centro di massa e ammettiamo che con questa scelta di riferimento la velocità angolare sia ω'. La velocità del punto Δx è $V+\omega\wedge \Delta x$ e quella di ogni altro punto sarà

$$v = V+\omega\wedge \Delta x + \omega'\wedge(x-\Delta x) = V + \omega\wedge x$$

Da qui discende che

$$(\omega-\omega')\wedge(x-\Delta x)=0$$

Ma il vettore $x-\Delta x$ è arbitrario e dunque ω=ω'.

2. (*Steiner*) I momenti di inerzia relativi a due assi paralleli di cui uno passa per il centro di massa sono legati dalla relazione $I_1 = I_0 + M\, d^2$

essendo M la massa del CR e d la distanza tra i due assi.

`

Partiamo dalla definizione della matrice dei momenti d'inerzia. Se spostiamo l'origine degli assi di un vettore d si avrà

$$\mathcal{I}'_{ij} = \int \rho\, d^3x \left((\vec{x} - \vec{d})^2 \delta_{ij} - (x_i - d_i)(x_j - d_j) \right)$$

$$= \mathcal{I}_{ij} + M(d^2 \delta_{ij} - d_i d_j)$$

Troviamo allora, se d è ortogonale a ω, e |d| è la distanza dei due assi

$$\mathcal{I}'_{ij}\, \omega_i \omega_j = \mathcal{I}_{ij}\, \omega_i \omega_j + M\, d^2\, \omega^2$$

e questo equivale a quanto esprime il teorema: detto *n il versore in direzione ω si ha*

$$\boldsymbol{\mathcal{I}}'_{ij}\, n_i\, n_j = \boldsymbol{\mathcal{I}}_{ij}\, n_i\, n_j + M\, d^2$$

$$\boldsymbol{\mathcal{I}}' = \boldsymbol{\mathcal{I}} + M\, d^2$$

3. Se V e ω sono ortogonali, come nel cilindro che rotola su un piano inclinato, questa proprietà si mantiene se spostiamo l'origine del riferimento cartesiano, dato che $V'=V+\omega\wedge d$. Ora scegliamo $d = \omega\wedge V/\omega^2$. La velocità della nuova origine degli assi è $V'=V+\omega\wedge(\omega\wedge V)/\omega^2$. Applichiamo la formula del doppio prodotto vettoriale

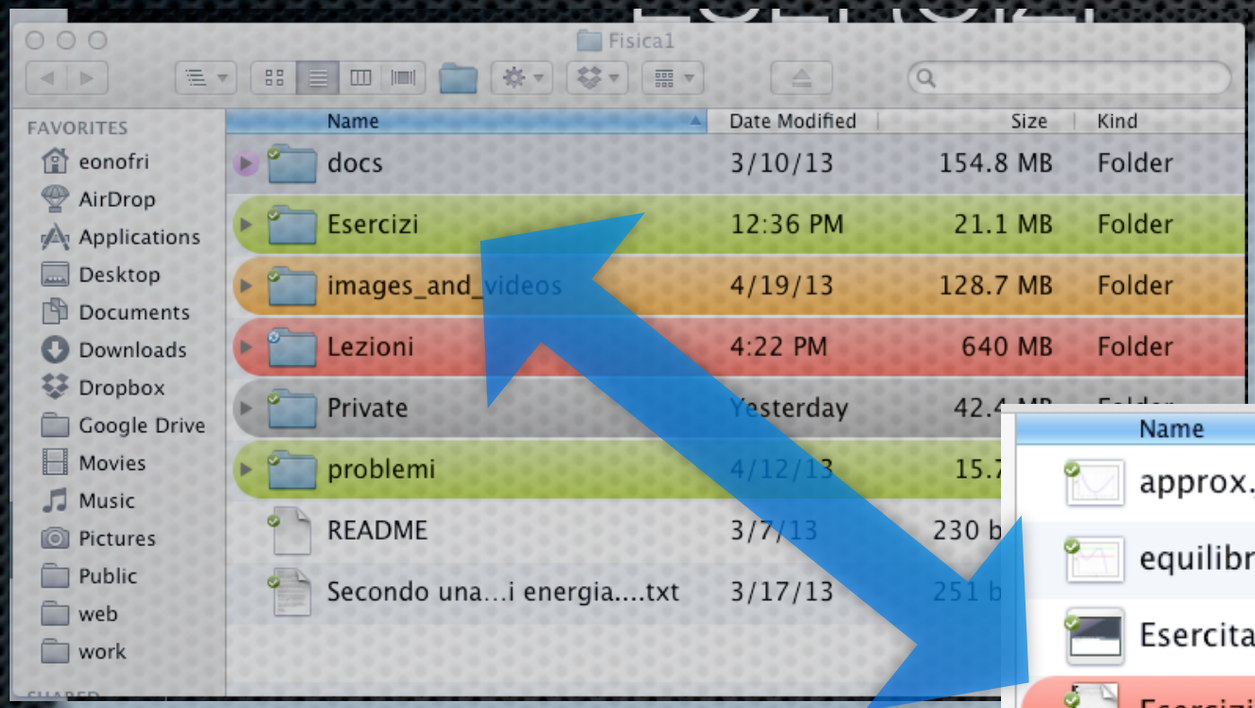
$$\vec{w}\wedge(\vec{u}\wedge\vec{v}) = (\vec{v}\cdot\vec{w})\,\vec{u} - (\vec{u}\cdot\vec{w})\,\vec{v}$$

che nel nostro caso si legge $\vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge\vec{V}) = (\vec{\omega}\cdot\vec{V})\,\vec{\omega} - \omega^2\,\vec{V}$

e infine $V' = (\omega.V)\omega/(\omega.\omega) = 0$ dato che V e ω sono ortogonali. Il caso più semplice è quello del cilindro che rotola senza strisciare su un piano: V e ω sono ortogonali e $d = \omega\wedge V/\omega^2$ *è il vettore di lunghezza pari al raggio del cilindro e che dal centro di massa punta verso il piano, dunque riscopriamo che il punto di contatto con il piano è istantaneamente a riposo.*

ESERCIZI

Si trova tutto su dropbox



le apparenze, puntiformi le masse sospese e di massa trascurabile tutte le componenti tranne le "flyballs" e il cilindro di appoggio). ■

Corpo rigido.

ESERCIZIO 19. *Calcolare la frequenza delle piccole oscillazioni di un pendolo costituito da una sbarra rigida omogenea lunga* L, *massa* M *e spessore trascurabile e che oscilla in un piano verticale.*

SOLUZIONE. Il parametro più comodo è l'angolo φ che la sbarra forma con la verticale. La velocità angolare coincide con $\dot{\varphi}$ e ci serve solo il momento d'inerzia relativamente a un riferimento centrato nel punto di sospensione:

$$\mathcal{I} = \rho \int_0^L dz\, z^2 = ML^2/3$$

essendo ρ la densità lineare e $M = \rho L$. L'enargia totale è perci'o ottenuta sommando energia cinetica ($\frac{1}{2}\mathcal{I}\omega^2$) all'energia potenziale (mg per la quota del centro di massa)

$$E = \tfrac{1}{6}ML^2\,\dot{\varphi}^2 - \tfrac{1}{2}MgL\cos\varphi$$

Per le piccole oscillazioni avremo

$$E \approx \tfrac{1}{6}ML^2\,\dot{\varphi}^2 + \tfrac{1}{4}MgL\,\varphi^2$$

e la frequenza è $\omega \approx \sqrt{\frac{3}{2}\frac{g}{L}}$ ossia $\sqrt{\frac{3}{4}}$ di quella che si avrebbe se il peso fosse concentrato tutto nel baricentro. Si confronti il risultato con quello del doppio pendolo (Es. 16). ■

ESERCIZIO 20. *Calcolare i momenti di inerzia principali riferiti al sistema del centro di massa per una cilindro omogeneo di massa* M, *altezza* h *e raggio di base* R.

SOLUZIONE. Calcoliamo $\mathcal{I}_{33}$ relativo all'asse di simmetria:

$$\mathcal{I}_{33} = \rho \int_{-h/2}^{h/2} dz \int_0^R r\,dr(x^2+y^2) \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi\rho\, h R^4/4 = MR^2/2\,.$$

(infatti $x^2+y^2=r^2$). Per $\mathcal{I}_{11}$ e $\mathcal{I}_{22}$ sfruttiamo il fatto che il loro valore coincide per simmetria e di conseguenza

$$\int_{-h/2}^{h/2} \qquad \int_0^R$$

ESERCIZIO 20. *Calcolare i momenti di inerzia principali riferiti al sistema del centro di massa per una cilindro omogeneo di massa* M, *altezza* h *e raggio di base* R.

SOLUZIONE. Calcoliamo $\mathcal{I}_{33}$ relativo all'asse di simmetria:

$$\mathcal{I}_{33} = \rho \int_{-h/2}^{h/2} dz \int_0^R r\,dr(x^2+y^2) \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi\rho\, h\, R^4/4 = MR^2/2\,.$$

(infatti $x^2+y^2=r^2$). Per $\mathcal{I}_{11}$ e $\mathcal{I}_{22}$ sfruttiamo il fatto che il loro valore coincide per simmetria e di conseguenza

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{11}+\mathcal{I}_{22} &= 2\pi \int_{-h/2}^{h/2} dz \int_0^R r\,dr(2z^2+r^2)\\ &= 2\pi\frac{M}{\pi R^2 h}\int_{-h/2}^{h/2} dz\,(z^2R^2+R^4/4)\\ &= \frac{Mh^2}{6}+\tfrac{1}{2}MR^2\end{aligned}$$

In definitiva

$$\mathcal{I}_{33} = \tfrac{1}{2}MR^2,\ \mathcal{I}_{11}=\mathcal{I}_{22} = \frac{Mh^2}{12}+\tfrac{1}{4}MR^2$$

SI riconosce che per spessore trascurabile ($R \to 0$) riotteniamo il risultato della sbarra per la quale il momento d'inerzia relativo al sistema del centro di massa si ottiene con il teorema di Steiner:

$$\mathcal{I}_{CM} = ML^2/3 - M(L/2)^2 = ML^2/12\,.$$

■

ESERCIZIO 21. *Un cilindro di raggio* a *rotola senza strisciare all'interno di una superficie cilindrica di raggio* $L > a$. *Detta* M *la massa del cilindro trovare la frequenza delle piccole oscillazioni.*

SOLUZIONE. Indichiamo con φ l'angolo formato dal raggio che congiunge i centri dei due cilindri. Allora la velocità del centro di massa è $V = (L-a)\dot{\varphi}$. La velocità angolare del cilindro mobile si deduce dalla condizione di rotolamento con aderenza perfetta, e cioè $\omega a = V = (L-a)\dot{\varphi}$. L'energia cinetica sarà perciò:

$$E_K = \tfrac{1}{2}MV^2 + \tfrac{1}{2}I\omega^2 = \tfrac{1}{2}M(L-a)^2\dot{\varphi}^2 + \tfrac{1}{4}Ma^2\left(\frac{L-a}{a}\right)^2\dot{\varphi}^2$$

$$= \tfrac{3}{4}M(L-a)^2\dot{\varphi}^2$$

L'energia potenziale è data in termini della quota del centro di massa, e cioè

$$V = -Mg(L-a)\cos\varphi \approx \tfrac{1}{2}Mg(L-a)\varphi^2 + \text{costante}$$

L'equazione del moto, utilizzando il metodo di Lagrange, risulta

$$\tfrac{3}{2}M(L-a)^2\ddot{\varphi} = -Mg(L-a)\varphi$$

per cui la frequenza è data dalla relazione

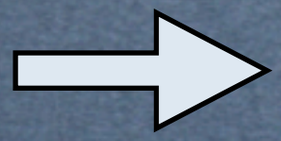
$$\Omega = \sqrt{\frac{2g}{3(L-a)}}$$

Il fattore 2/3 è lo stesso che compare nell'accelerazione di un cilindro che rotola su un piano inclinato, come illustrato nella Lezione 9.

FINE

della IX lezione

Prossima lezione lunedì



20 aprile

