

Corrente elettrica stazionaria



Negli atomi di un metallo gli **elettroni periferici** non si legano ai singoli atomi, ma sono **liberi di muoversi nel reticolo** formato dagli ioni positivi e sono detti **elettroni di conduzione**.

Nel rame vi è un elettrone libero per atomo e quindi il numero di elettroni di conduzione è di **circa 8×10^{22} elettroni/cm³**.

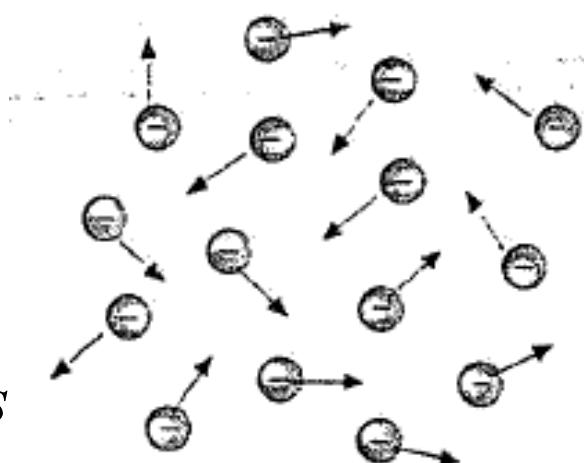
L'ordine di grandezza è lo stesso per tutti i conduttori metallici.

$$e = -1.6 \times 10^{-19} \text{ C}, m = 9.1 \times 10^{-31} \text{ Kg}$$

Il moto degli elettroni liberi in un conduttore in equilibrio elettrostatico è disordinato. In qualsiasi volume piccolo su scala macroscopica ma contenente un numero N di elettroni abbastanza elevato (in un μm^3 si hanno circa 10^{11} elettroni), la velocità media è nulla:

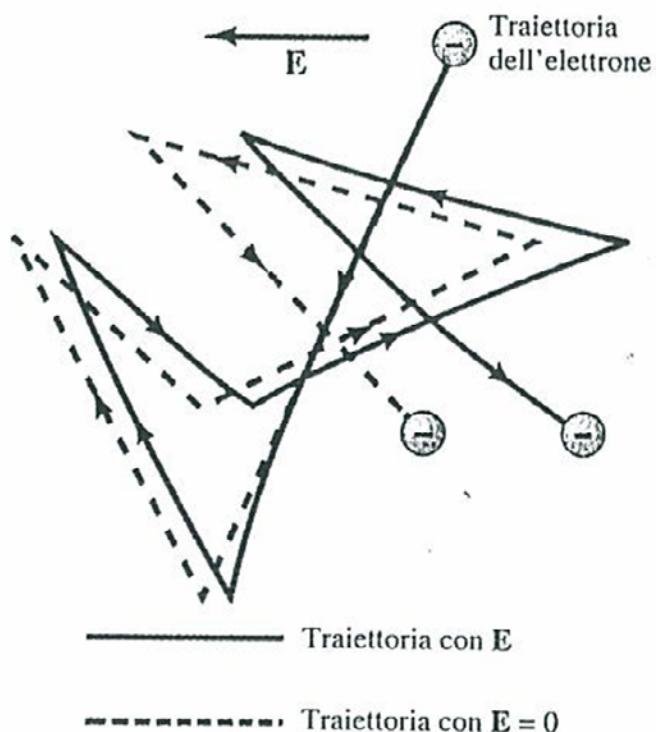
$$\mathbf{v} = \frac{1}{N} \sum_{i=1,N} \mathbf{v}_i = 0$$

$$v = \sqrt{3KT/m} \approx 10^5 \text{ m/s}$$



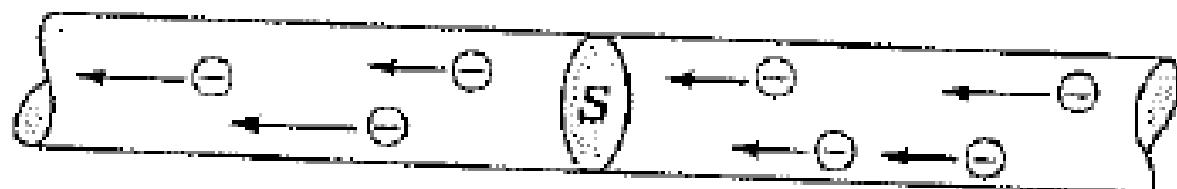
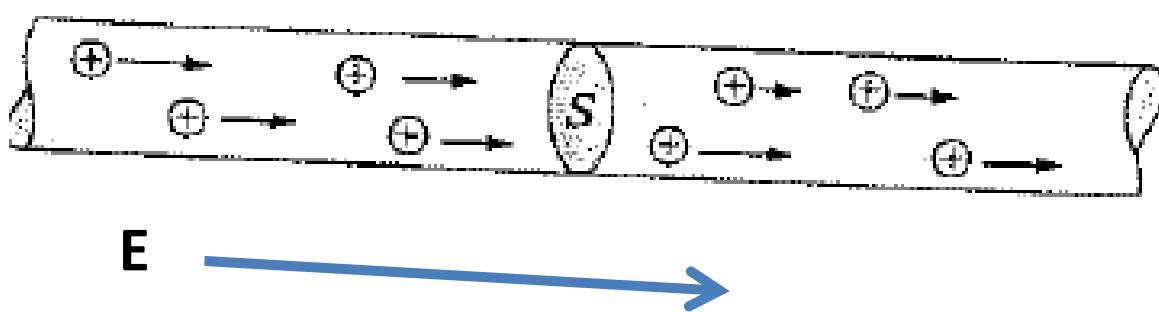
Non esiste una direzione di moto preferenziale per gli elettroni.

Occasionalmente un elettrone “urta” uno ione del cristallo subendo una brusca variazione di direzione del moto.

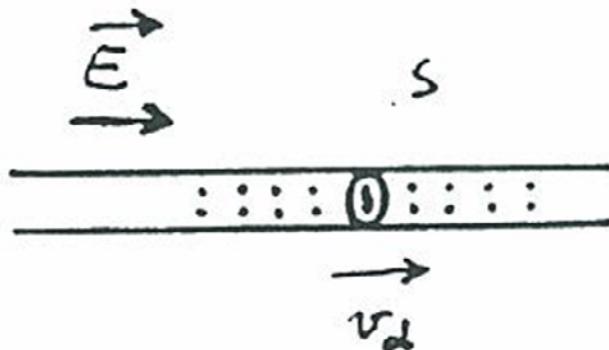


τ tempo medio trascorso tra una collisione e l'altra.

Quando si applica un campo elettrico E gli elettroni sono sottoposti ad una forza $F = -e E$ e modificano il loro moto casuale migrando lentamente in verso opposto al campo con una velocità di deriva v_d (tipicamente dell'ordine di 10^{-5} m/s). 



Il flusso ordinato di cariche elettriche è detto **corrente elettrica**.



Una quantità di carica dq transita nel tempo dt attraverso un'area S , ad es. la sezione trasversale di un filo percorso da corrente. Si definisce **intensità di corrente i** la carica netta che attraversa tale superficie nell'unità di tempo:

$$i = \frac{dq}{dt}$$

Convenzione: il verso della corrente è quello in cui si muovono le cariche positive, anche quando nella realtà i portatori di carica sono negativi.

Si ha l'intensità di corrente di 1A quando, attraverso una data superficie, passa una carica di un Coulomb in un secondo.

$$[A] = [C/s]$$

Densità di corrente

La **carica netta** che attraversa la superficie in un certo tempo si trova **integrando la corrente nel tempo**:

$$q = \int i \, dt \quad \equiv$$

Una grandezza vettoriale legata alla corrente è la **densità di corrente**, ossia la **corrente per unità di area**, il cui modulo è (S perpendicolare al filo e velocità dei portatori uniforme su S)

$$\mathbf{j} = \frac{\mathbf{i}}{S}$$

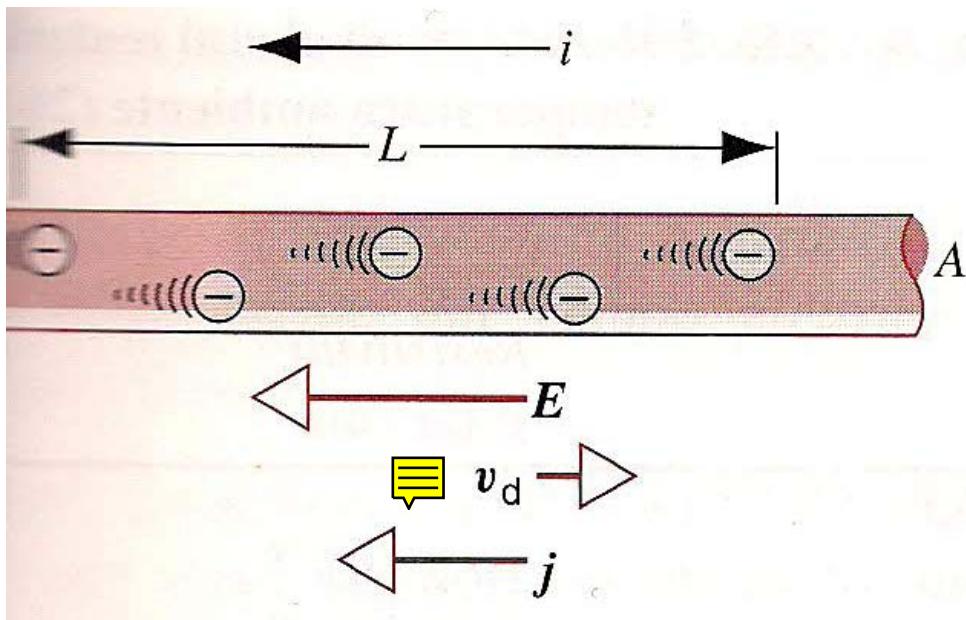
La direzione e il verso di \mathbf{j} coincidono con quelli del moto delle cariche positive.

La corrente che scorre attraverso una generica superficie, suddivisa in elementi di area individuati da $d\mathbf{S}$ (ortogonale all'elemento di area e con verso concorde a \mathbf{j}), si determina integrando \mathbf{j} su tutta la superficie:

$$i = \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}$$

L'intensità di corrente attraverso una superficie è il **flusso della densità di corrente** attraverso quella superficie.

Densità di corrente



Se ho n elettroni per unità di volume, percorrono un tratto L nel tempo $t = L/v_d$. Attraverso la sezione A nel tempo t transitano tutti gli elettroni contenuti nel volume AL .

La carica netta che attraversa la superficie in un tempo t è quindi

$$q = -neAL$$

$$j = \left| \frac{q}{At} \right| = \frac{enAL}{AL/v_d} = env_d$$

$$j = -env_d$$

Ha lo stesso verso di E

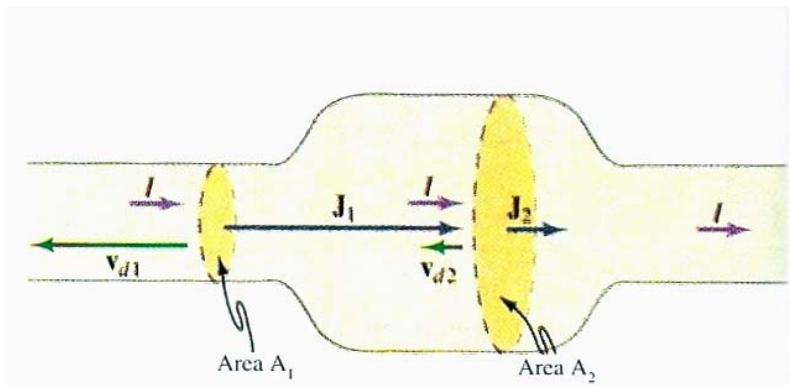
In generale se si hanno n portatori di carica q per unità di volume.

$$\mathbf{j} = nq\mathbf{v}_d$$

Ha sempre lo stesso verso di \mathbf{E}

Se si hanno due tipi di portatori:

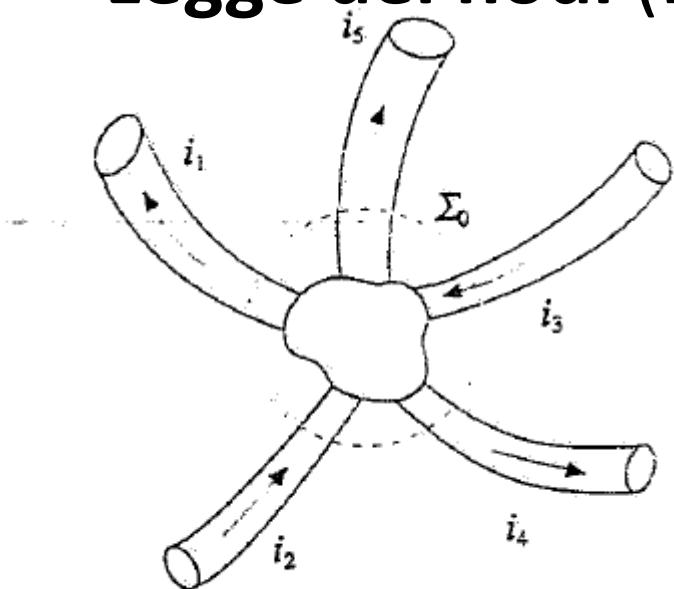
$$\mathbf{j} = n_a q_a \mathbf{v}_{da} + n_b q_b \mathbf{v}_{db}$$



Per la **conservazione della carica elettrica**, in condizioni stazionarie l'intensità di corrente è la stessa attraverso ogni sezione del conduttore (la carica non si accumula, la densità di carica è costante).

Se il conduttore è a sezione variabile la densità di corrente, e quindi la velocità di deriva sono maggiori dove la sezione è minore.

Legge dei nodi (1° legge di Kirchhoff)



$$\sum_i i_i = 0$$

Un nodo è un punto nel quale convergono almeno tre conduttori

$$i_1 + i_2 + i_3 + i_4 + i_5 = 0$$

In condizioni stazionarie la **somma algebrica delle correnti uscenti da un nodo è nulla** (per convenzione si prendono come positive le correnti uscenti).

Legge di Ohm

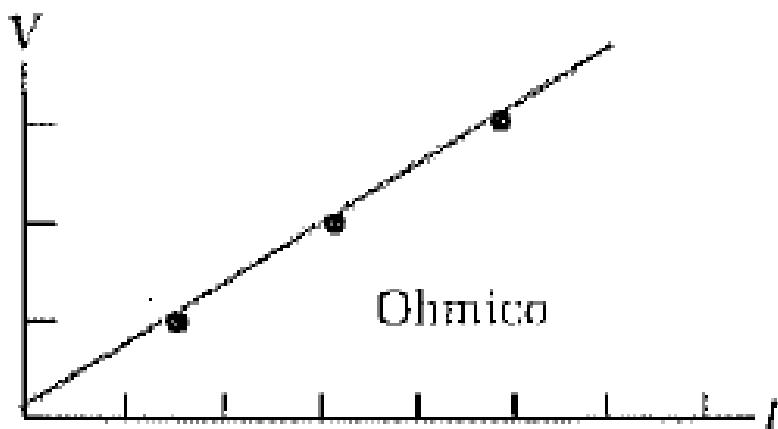
Se agli estremi di un tratto di conduttore come un filo metallico viene applicata una differenza di potenziale ΔV , nel conduttore si produrrà una corrente di intensità i .

L'intensità di corrente che circola in un conduttore è, per molti materiali, direttamente proporzionale alla differenza di potenziale ΔV :



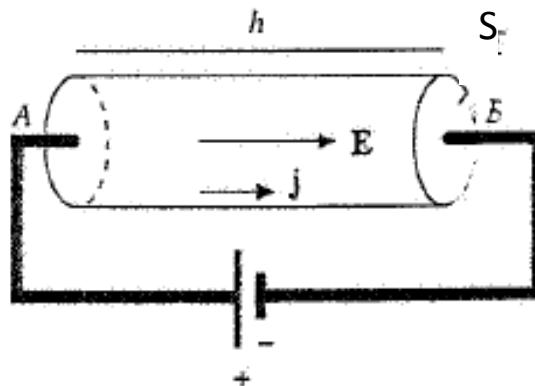
$$\Delta V = Ri$$

R è una proprietà del conduttore ed è chiamata **resistenza** e si misura in Ohm ($\Omega = V/A$).



Resistività

La resistenza di un conduttore dipende dalle sue dimensioni, dalla sua forma e dal materiale di cui è fatto. Considerando un conduttore a sezione costante:



Si trova

$$R = \frac{\rho h}{S} \quad [\Omega] = \frac{V}{A} \quad (\text{Ohm})$$

La dipendenza della resistenza di un conduttore dal materiale è rappresentata da un fattore di proporzionalità chiamato resistività ρ (si misura in $\Omega \text{ m}$).

$$\sigma = \frac{1}{\rho} \quad \text{conducibilità}$$

Tabella 28.1. RESISTIVITÀ DI METALLI*

Metallo	ρ
argento	$1,6 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$
rame	$1,7 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$
alluminio	$2,8 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$
ottone	$\sim 7 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$
nickel	$7,8 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$
ferro	$10 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$
acciaio	$\sim 11 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$
costantana	$49 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$
nickelcromo	$100 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$

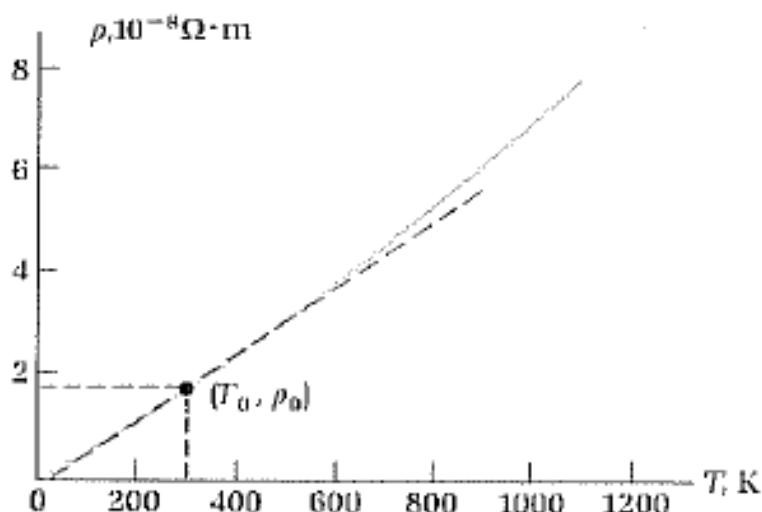
* Alla temperatura di 20 °C.

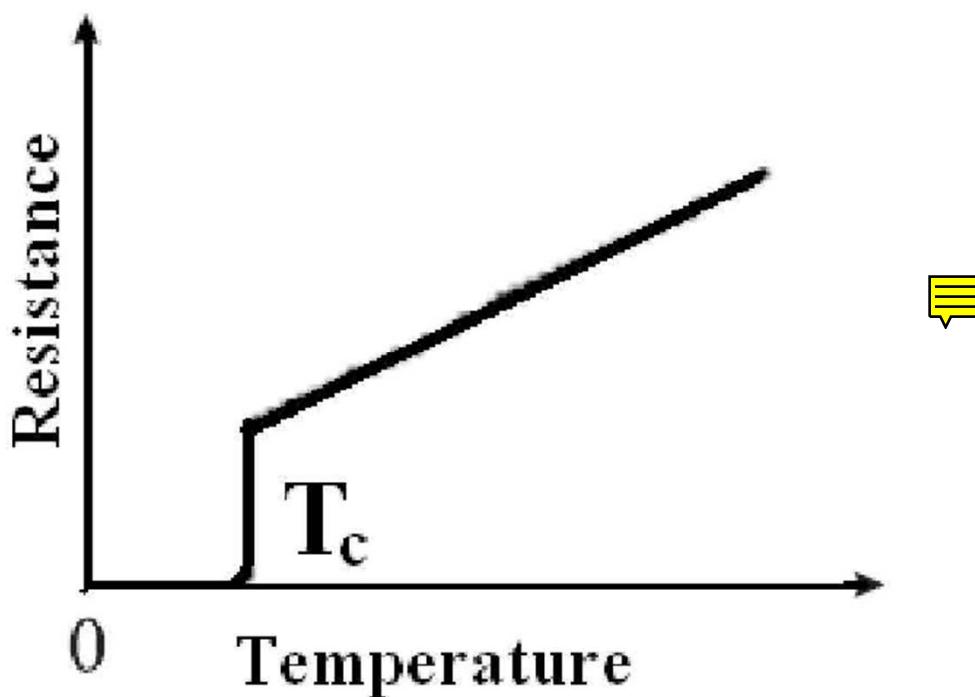
Tabella 28.2. RESISTIVITÀ DI ISOLANTI

Isolante	ρ
polietilene	$2 \cdot 10^{11} \Omega \cdot \text{m}$
vetro	$\sim 10^{12} \Omega \cdot \text{m}$
porcellana non vetrificata	$\sim 10^{12} \Omega \cdot \text{m}$
ebanite	$\sim 10^{13} \Omega \cdot \text{m}$
resina epossidica	$\sim 10^{15} \Omega \cdot \text{m}$

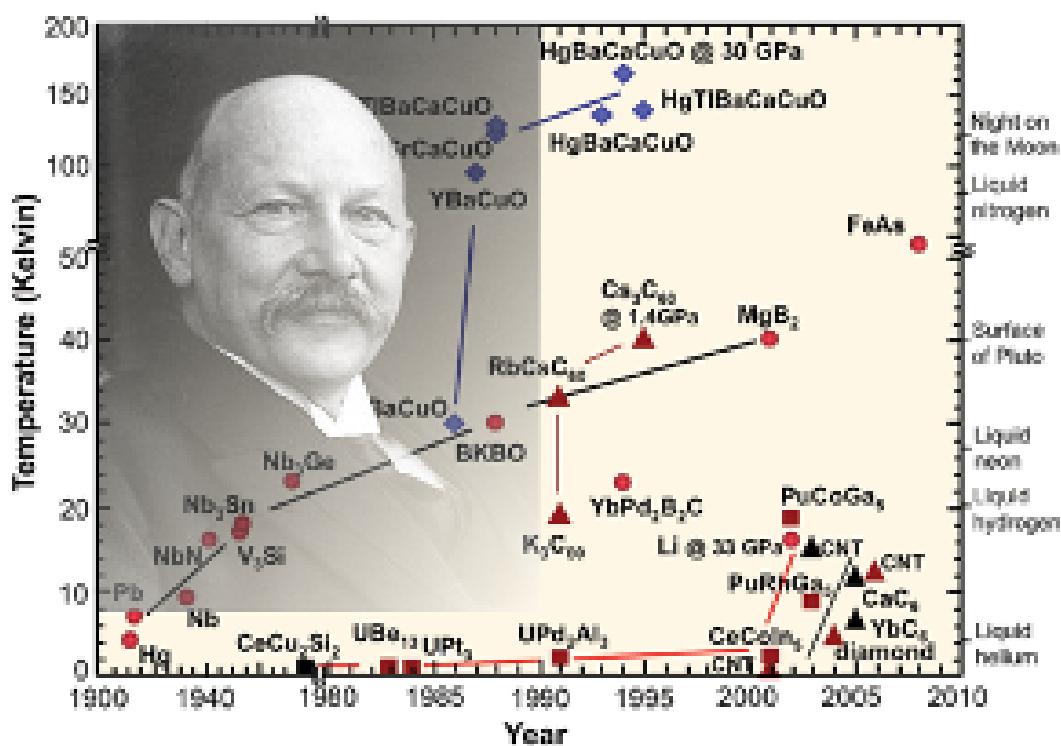
La resistività nella maggior parte dei conduttori metallici puri è una funzione crescente della temperatura. In un intervallo limitato (qualche decina di gradi) intorno alla temperatura di ambiente la relazione è praticamente lineare.

$$\rho = \rho_0 (1 + \alpha \Delta T)$$





L'8 Aprile 1911, Kamerlingh Onnes (Leiden) misurando la resistenza elettrica del mercurio trovò che questa diventa nulla entro gli errori a temperature inferiori ai 4.2 K (la temperatura alla quale Onnes era appena riuscito a liquefare l'elio).

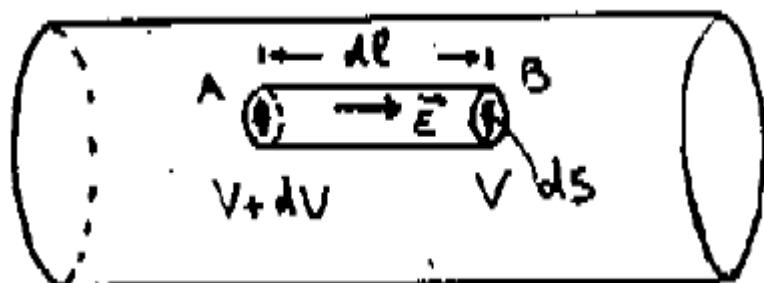


Legge di Ohm in forma locale



Se un campo elettrico \mathbf{E} viene applicato ad un materiale conduttore, nel materiale si produce una corrente di densità \mathbf{J} .

La densità di corrente in un punto del materiale dipende dal campo elettrico in quel punto.



$$V_A - V_B = dV = R dI = R \cdot J dS = \\ = S \frac{dl}{ds} J \cancel{dS} = \sigma J dl$$

$$dV = E dl = \sigma J dl$$

$$\vec{E} = \sigma \vec{J}$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

Modello di Drude per i metalli



La principale caratteristica della conduzione nei metalli che un modello microscopico soddisfacente deve riprodurre è la legge di Ohm.

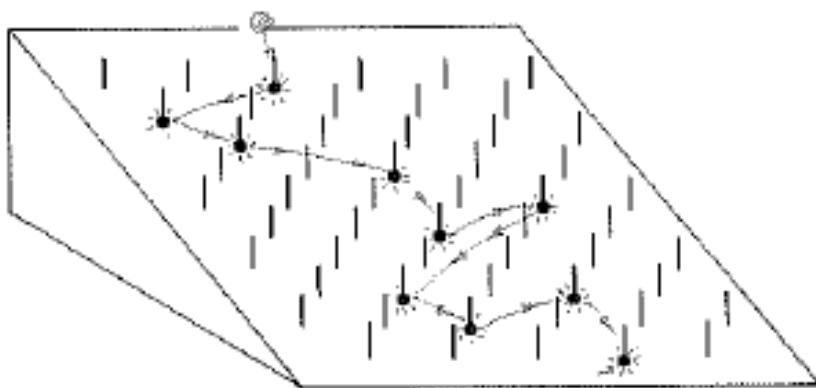
$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$$

Poiché $\mathbf{j} = nq\mathbf{v}_d$ si ha $\mathbf{v}_d = \frac{\sigma \mathbf{E}}{nq}$



I'applicazione di un campo fa muovere i portatori con una velocità media costante, ma se $q\mathbf{E}$ fosse l'unica forza in gioco i portatori si dovrebbero muovere di moto accelerato

Gli elettroni urtano gli ioni del cristallo subendo una brusca variazione di direzione del moto.



Quando si applica un **campo elettrico E** gli elettroni sono sottoposti ad una forza $F = -e E$. Questa è l'unica forza che agisce tra un urto e l'altro.

Dopo ogni collisione gli elettroni acquistano una direzione di moto casuale.

Dalla seconda legge di Newton (assumendo E diretto lungo x)

$$a_x = -e E/m$$

$$v_x(t) = v_x(0) - \frac{eEt}{m}$$

Mediando sugli elettroni ($\langle v_x(0) \rangle = 0$)

$$\langle v_x \rangle = v_d = -\frac{eE\tau}{m}$$

τ caratterizza l'intervallo di tempo medio tra gli urti.

$$\sigma = \frac{ne^2\tau}{m}$$

$v_d \ll v_T$ τ non dipende da E

Effetto Joule

Consideriamo una carica dq che si muova attraversando una differenza di potenziale $\Delta V = V_A - V_B$. Il campo elettrico compie il lavoro

$$dL = \Delta V dq = \Delta V i dt$$

Pertanto la potenza elettrica spesa è

$$P = \frac{dL}{dt} = \Delta V i$$

Se vale la legge di Ohm, si ha

$$P = \Delta V i = R i^2 = \frac{\Delta V^2}{R}$$

Il passaggio di corrente attraverso un conduttore metallico per un tempo t comporta dunque il lavoro

$$L = \int R i^2 dt$$

Questo lavoro è necessario per vincere la resistenza opposta dal reticolo cristallino al moto ordinato degli elettroni (urti).

Da un punto di vista termodinamico, esso viene assorbito dal conduttore la cui energia interna aumenta.

L'effetto di riscaldamento di un conduttore percorso da corrente si chiama **effetto Joule**.

Resistori in serie e in parallelo

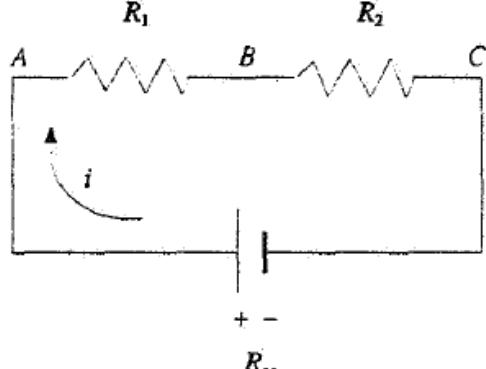
Conduttori ohmici caratterizzati da un determinato valore della resistenza (alla temperatura ambiente) sono elementi molto usati nei circuiti elettrici. Essi vengono chiamati **resistori**.



Più resistori possono essere collegati tra loro, tipicamente da fili o piattine metallici, la cui resistenza è trascurabile.

Resistori in serie

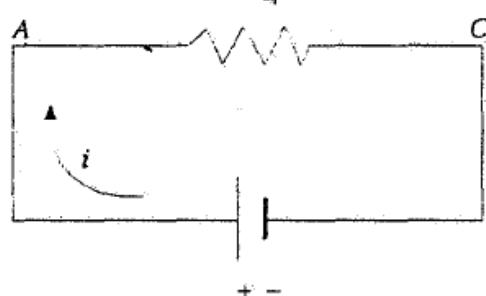
Due resistori sono collegati in serie quando hanno un estremo in comune e **la corrente che li attraversa è la stessa**. Applicando la legge di Ohm



$$V_A - V_B = R_1 i$$

$$V_B - V_C = R_2 i$$

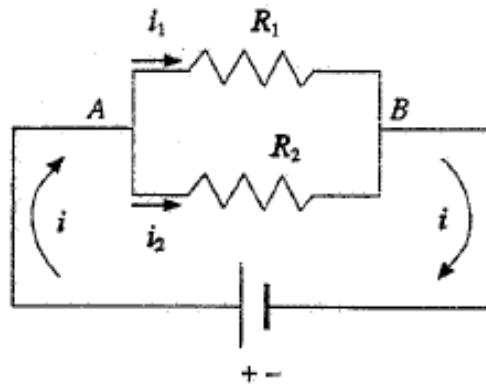
$$V_A - V_C = (R_1 + R_2) i = R_{eq} i$$



$$R_{eq} = R_1 + R_2$$

Resistori in parallelo

Due resistori si dicono in parallelo quando sono collegati tra loro in entrambi gli estremi e quindi la d.d.p. ai loro capi è la stessa.



$$i = i_1 + i_2 = \frac{\Delta V}{R_1} + \frac{\Delta V}{R_2} = \Delta V \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

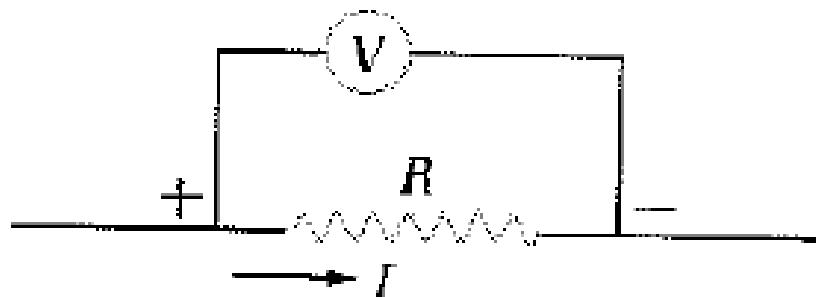
Il reciproco della resistenza equivalente è uguale alla somma dei reciproci delle singole resistenze.

R_{eq} risulta dunque minore di ciascuna delle R_i .

Amperometri e voltmetri



Richiede r_i piccola

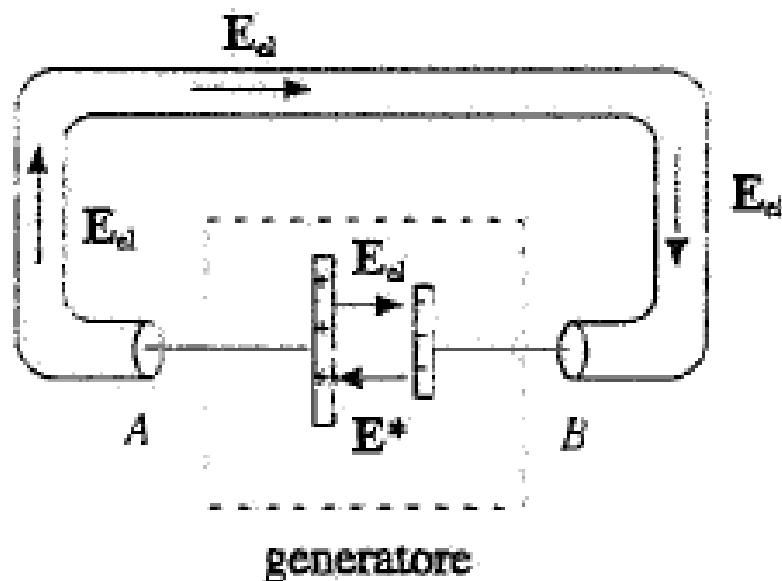


Richiede r_i grande

Forza elettromotrice

In un conduttore gli elettroni si muovono con una velocità v_d dai punti con potenziale minore ai punti con potenziale maggiore sotto l'effetto del campo elettrico presente nel conduttore.

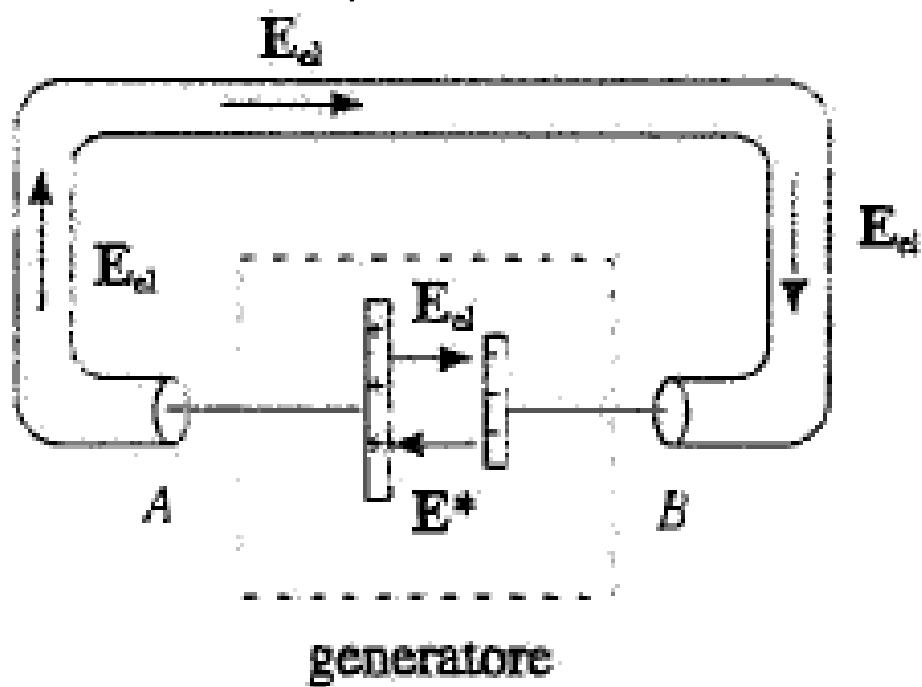
Il lavoro effettuato dal campo elettrico viene assorbito dagli ioni del conduttore la cui energia interna aumenta (effetto Joule).



Una sorgente esterna di energia è necessaria per far circolare con continuità una corrente in un circuito elettrico. Un dispositivo che mantenga una differenza di potenziale costante tra due punti del circuito è detto generatore di forza elettromotrice.

Forza elettromotrice

Esaminiamo il caso semplice di un conduttore collegato ai poli A e B di un generatore sui cui poli sono accumulate le cariche $+q$ e $-q$.



Il campo elettrostatico E_{el} prodotto da tali cariche è sempre diretto da A verso B, sia nel conduttore che all'interno del generatore. Quindi all'interno del generatore E_{el} si oppone al moto delle cariche.

$$\oint \mathbf{E}_{el} \cdot d\mathbf{s} = 0$$

Per ottenere nel circuito una corrente i è necessaria la presenza nel generatore di un campo E^* (campo elettromotore) che muove le cariche contro E_{el} e mantiene la differenza di potenziale tra A e B.

La sorgente di f.e.m. deve quindi avere al suo interno **forze di natura non elettrostatica**, non conservative, che possono determinare il moto continuo delle cariche.

\mathbf{E}^* *campo elettromotore*

$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{el}$ *nei conduttori*

$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{el} + \mathbf{E}^*$ *nel generatore*

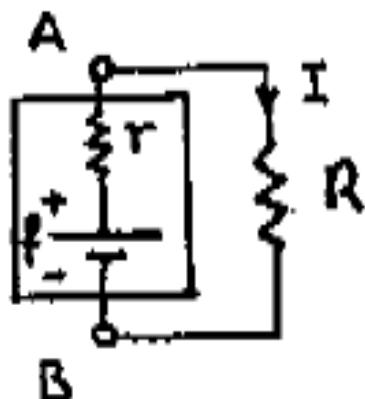
Il dispositivo che genera il campo elettromotore, e quindi la f.e.m., può sfruttare ad es. reazioni chimiche (pile e accumulatori) o il fenomeno dell'induzione elettromagnetica.

Pertanto la f.e.m. **f è il lavoro per unità di carica effettuato dal campo elettromotore**

$$f = \int_B^A \mathbf{E}^* \cdot d\mathbf{s} = \oint \mathbf{E}^* \cdot d\mathbf{s}$$

Si misura in Volt e non è una forza.

Un generatore non ideale è caratterizzato anche da un resistenza interna r . Quindi f è la d.d.p. misurata ai capi del generatore a circuito aperto.



$$V_A - V_B = f - Ir$$

A circuito aperto: $I = 0$



$$V_A - V_B = f$$

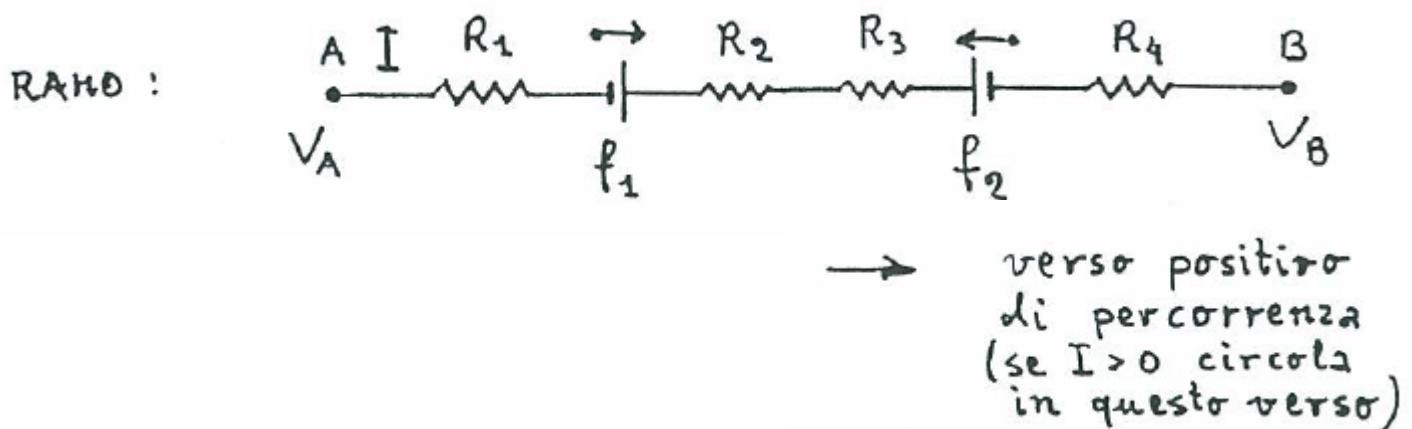
la f.e.m. è la differenza di potenziale tra i morsetti del generatore a circuito aperto

Legge di Ohm generalizzata e 2^a legge di Kirchhoff

Gli elementi geometrici distintivi di un circuito sono i nodi e i rami. Un nodo è un punto nel quale convergono almeno tre conduttori.

I nodi sono collegati da rami, in cui possono esserci componenti attivi (generatori) e componenti passivi (resistori).

All'interno di una rete è possibile individuare determinati cammini chiusi, detti maglie, costituiti da più rami; un dato ramo può pertanto appartenere a più maglie.

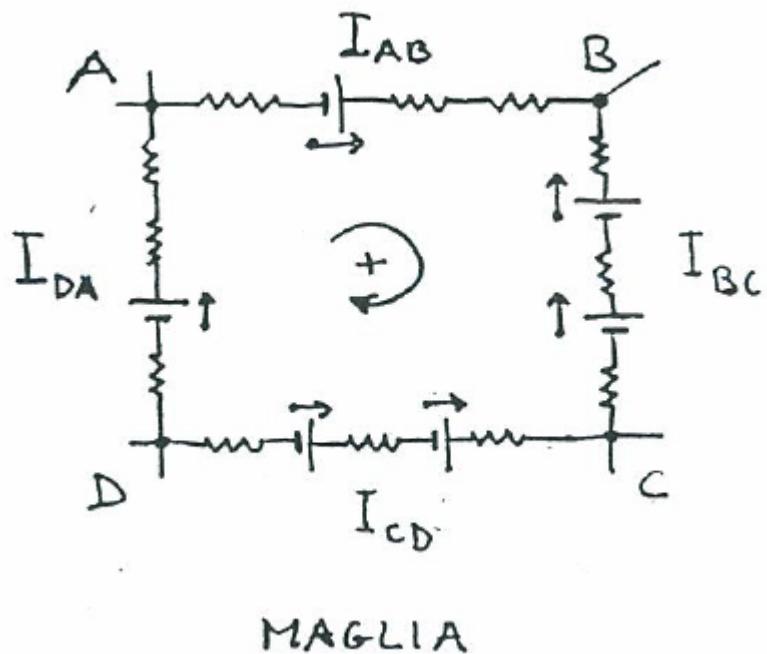


$$V_A - IR_1 + f_1 - IR_2 - IR_3 - f_2 - iR_4 = V_B$$

$$V_A - V_B + \sum_{ALG} f_i = \sum_{RAHO} I \cdot R_i$$

(comprendendo delle resistenze interne)

Una conseguenza è



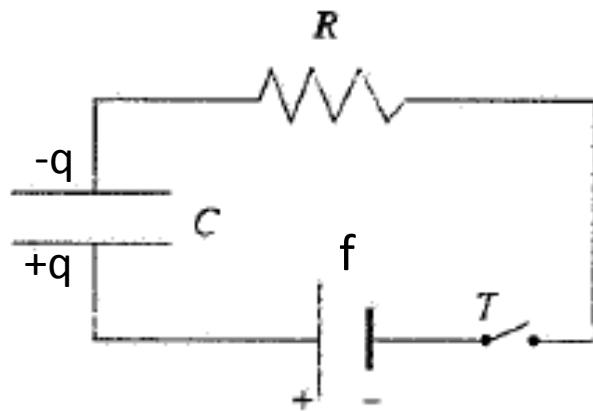
$$\sum_{\text{ALG}} f_i = \sum_{\text{MAGLIA}} R_i I_i$$

legge delle maglie
(2^a di Kirchhoff)

Esercizi

- 1) Un resistore è composto da due fili collegati in serie: il primo di rame ($\rho_{\text{Cu}} = 1.7 \cdot 10^{-8} \Omega \text{ m}$) è lungo $l_1 = 5 \text{ m}$ ed ha una sezione $S_1 = 2 \text{ mm}^2$; il secondo di alluminio ($\rho_{\text{Al}} = 2.7 \cdot 10^{-8} \Omega \text{ m}$) è lungo $l_2 = 2 \text{ m}$ ed ha una sezione $S_2 = 1 \text{ mm}^2$. Ai capi del resistore è applicata una differenza di potenziale $\Delta V = 0.2 \text{ V}$. Calcolare le differenze di potenziale ai capi dei due fili e le rispettive densità di corrente.
- 2) Un filo di lunghezza $l = 5 \text{ m}$ e diametro $d = 2 \text{ mm}$ è percorso da una corrente $i = 750 \text{ mA}$ quando è applicata una d.d.p. di 0.22 V . La velocità di deriva degli elettroni è $1.7 \cdot 10^{-5} \text{ m/s}$. Calcolare: a) la resistenza R del filo; b) la resistività ρ del materiale; c) il campo elettrico E all'interno del filo; d) il numero n di elettroni di conduzione per unità di volume.
- 3) Si consideri un circuito costituito da un generatore di forza elettromotrice $f = 1.5 \text{ V}$ e resistenza interna $r = 1 \Omega$ e da una resistenza variabile R . Calcolare la potenza dissipata su R per $R=R_1=100 \Omega$; per $R=R_2=0.1 \Omega$; per il valore di R per cui la potenza dissipata è massima.

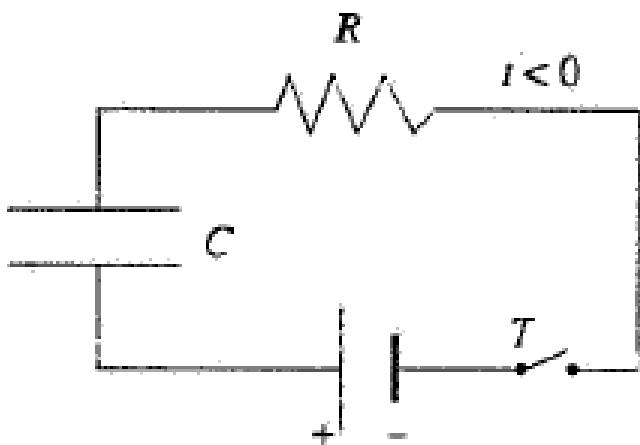
Carica di un condensatore attraverso un resistore



Al tempo $t=0$ viene chiuso l'interruttore e il generatore inizia a prelevare cariche positive dai conduttori connessi al polo negativo e a portarle al polo positivo. Quindi sulle armature del condensatore compaiono le cariche $+q$ e $-q$. Il processo continua fino a quando la carica del condensatore raggiunge il valore massimo $q_m = Cf$, cui corrisponde la d.d.p. tra le armature $V_A - V_B = f$.

$$f = Ri(t) + \frac{q(t)}{C}$$

$$i(t) = \frac{dq}{dt}$$



$$R \frac{dq}{dt} = f - \frac{q}{C}$$

$$\frac{dq}{q - Cf} = -\frac{dt}{RC}$$

$$\int_0^q \frac{dq'}{q' - Cf} = - \int_0^t \frac{dt'}{RC}$$

$$\ln \left(\frac{q - Cf}{-Cf} \right) = -\frac{t}{RC}$$

$$q(t) = Cf \left(1 - e^{-t/RC} \right)$$

$$\tau = R C$$

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{f}{R} e^{-t/RC}$$

$$\tau = R C$$

Grafico del potenziale in funzione del tempo

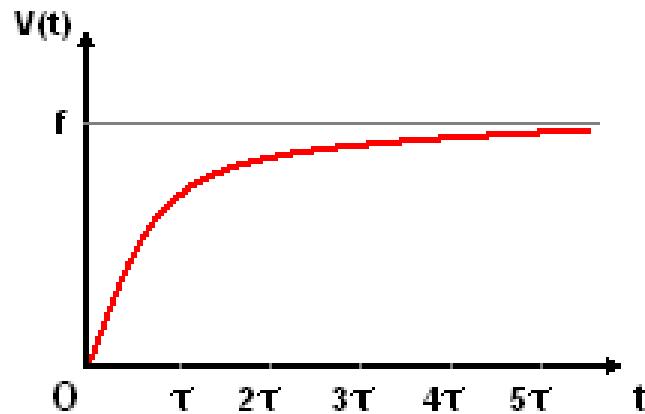
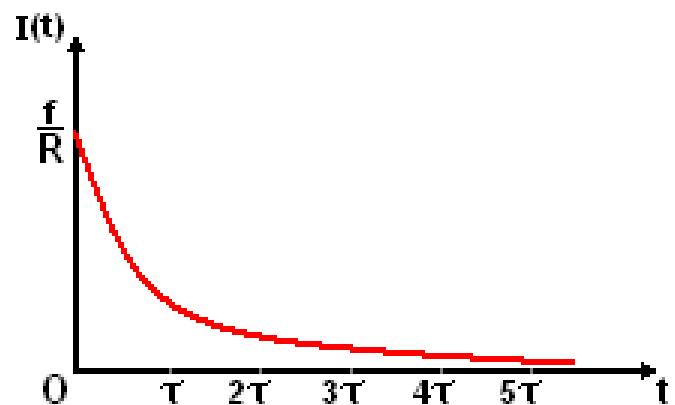


Grafico della corrente in funzione del tempo



Quando si carica un condensatore connettendolo ad un generatore, la d.d.p. finale ai capi del condensatore è uguale alla f.e.m. f del generatore e la carica finale è $q_m = Cf$.

Questi valori sono raggiunti asintoticamente. La corrente nel circuito è massima nell'istante $t=0$ e decresce esponenzialmente nel tempo, con costante di tempo $\tau = RC$.