LEGGE DI GAUSS

Legge di Coulomb metodo diretto per calcolare il campo elettrico prodotto da un corpo carico.

Legge di Gauss metodo più sofisticato per calcolare il campo elettrico prodotto da distribuzioni di carica con particolari simmetrie (es. sferica, cilindrica).

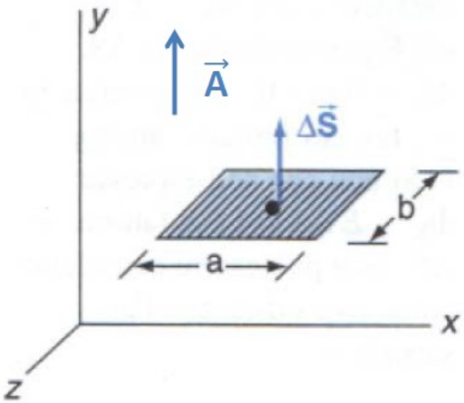
- La legge di Gauss è una delle equazioni di Maxwell $\longrightarrow$ leggi fondamentali dell'elettromagnetismo.

- La legge di Gauss esprime una proprietà fondamentale del campo elettrico e lo fa utilizzando il concetto di "flusso del campo elettrico".

Carl Friedrich Gauss
(1777-1855)

FLUSSO DI UN CAMPO VETTORIALE

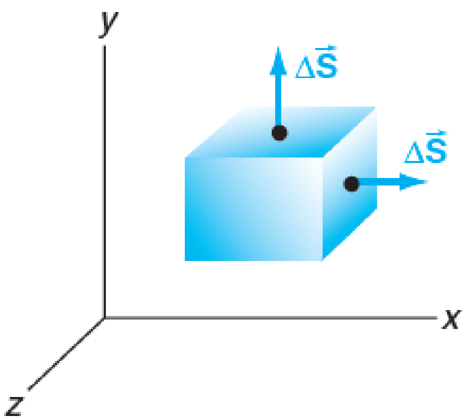
Il flusso Φ di un campo vettoriale è una **grandezza scalare** che dipende dal campo e dalla superficie rispetto alla quale viene calcolato.



1. Campo vettoriale A uniforme su una superficie piana

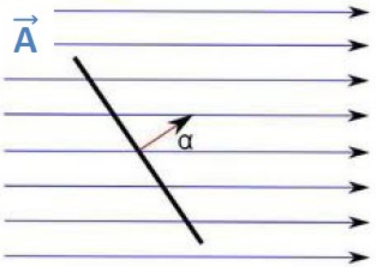
Si introduce un *vettore superficie* **Δ*S con modulo uguale all'area della*** superficie e direzione perpendicolare alla superficie stessa (due versi possibili)

$$\Delta\vec{S} = \Delta S\,\hat{\mathbf{n}}$$



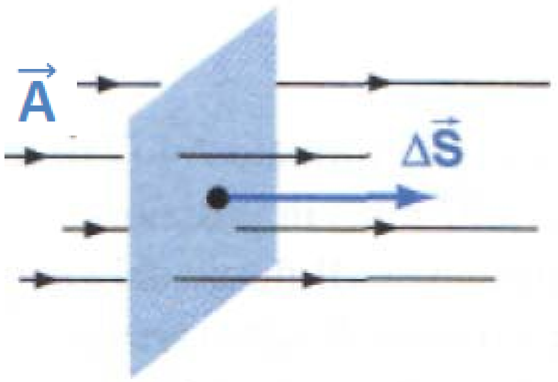
Se superficie è *chiusa si considera la normale uscente.*

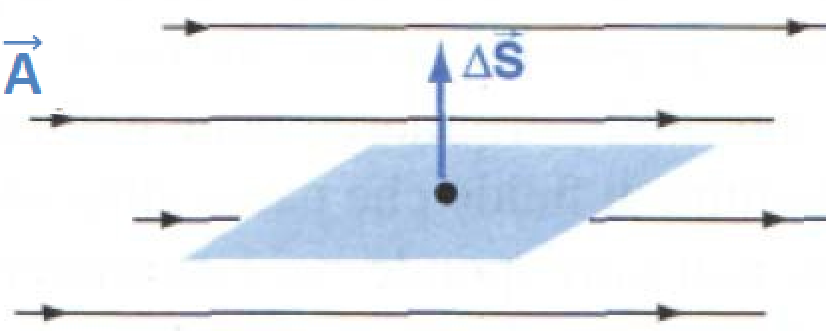
$$\boxed{\Phi = \vec{A} \cdot \Delta\vec{S}}$$



$$\boxed{\Phi = \vec{A} \cdot \Delta\vec{S} = A\,\Delta S\, cos\alpha}$$

Per farsi un'idea intuitiva del flusso si può ricorrere alle linee di forza: il numero delle linee che attraversano una superficie è proporzionale al flusso relativo a tale superficie.

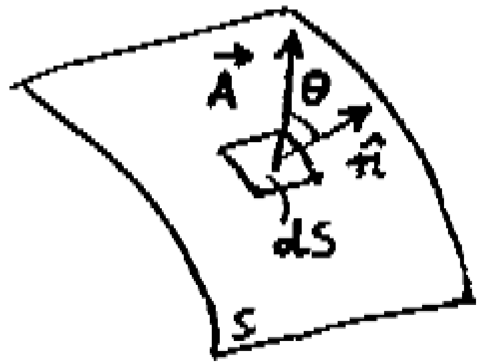




2. Campo vettoriale *A* qualunque (quindi anche non uniforme) su una superficie *S* qualunque (quindi anche curva)

1. Suddividere ***S*** in elementi di superficie d***S*** cosi' piccoli che:

   -possiamo trattare ogni elemento d***S*** come una superficie piana anche se ***S*** e' curva



$$\vec{dS} = \hat{n}\, dS$$

   -su ogni d***S*** possiamo considerare ***A*** uniforme.

$$d\Phi(\vec{A}) = \vec{A} \cdot \vec{dS} = \vec{A} \cdot \hat{n}\, dS = A\, dS \cos\theta$$

2. Calcolare il flusso su ***S*** come somma dei contributi dovuti a ciascuno dei piccoli elementi di superficie

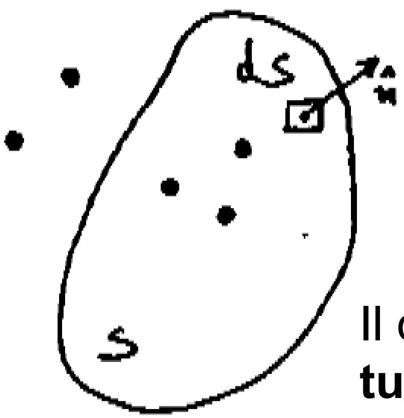
Facendo tendere a zero le dimensioni di ciascun elemento ed a infinito il loro numero, la somma diventa un integrale

$$\Phi_S(\vec{A}) = \int_S d\Phi(\vec{A}) = \int_S \vec{A} \cdot \vec{dS}$$

LEGGE DI GAUSS

Il flusso del campo elettrico attraverso una qualunque **superficie chiusa** è pari alla somma algebrica delle cariche contenute all'interno del volume racchiuso dalla superficie divisa per la costante dielettrica del vuoto.

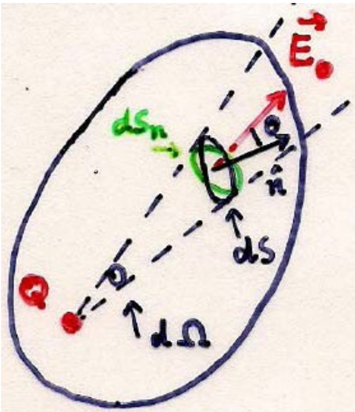
$$\Phi_S(\vec{E}_0) \equiv \int_S \vec{E}_0 \cdot \hat{n}\, dS = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum Q_{int} = \frac{Q_{tot}^{int}}{\varepsilon_0}$$



La superficie chiusa attraverso la quale si calcola il flusso del campo elettrico generalmente è una superficie geometrica immaginaria (**superficie gaussiana**) che non corrisponde alla superficie di un oggetto.

Il campo ***E_0*** **nell'integrale del flusso è il campo dovuto a tutte le cariche presenti** (interne o esterne alla superficie considerata) ma il **flusso** (netto) attraverso superficie è dovuto **soltanto alle cariche che si trovano all'interno**.

LEGGE DI GAUSS DEDOTTA DALLA LEGGE DI COULOMB
(CARICHE PUNTIFORMI)



1) Carica interna a superficie gaussiana

$$d\Phi(\vec{E}_0) = \vec{E}_0 \cdot \vec{dS} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{r}\cdot\hat{n}\, dS$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\cos\theta\, dS = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\, dS_n$$

Angolo solido del cono con vertice in Q delimitato da d***S***

$$d\Omega = \frac{dS_n}{r^2}$$

$$d\Phi(\vec{E}_0) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\, d\Omega$$

$$\Phi(\vec{E}_0) = \int_S d\Phi(\vec{E}_0) = \int_{4\pi}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\, d\Omega = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{4\pi} d\Omega = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

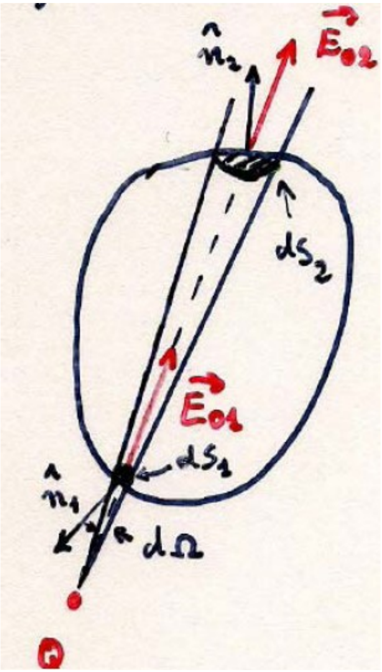
LEGGE DI GAUSS DEDOTTA DALLA LEGGE DI COULOMB
(CARICHE PUNTIFORMI)

Se si hanno più cariche interne $\boldsymbol{Q}_i$ (i=1,2,…,N)

$$\vec{E}_0 \cdot \vec{ds} = \left(\sum_i \vec{E}_{0i}\right) \cdot \vec{ds} = \sum_i \vec{E}_{0i} \cdot \vec{ds} = \sum_i d\Phi(\vec{E}_{0i})$$

$$\Phi(\vec{E}_0) = \int_S \sum_i d\Phi(\vec{E}_{0i}) = \sum_i \int_S d\Phi(\vec{E}_{0i}) = \sum_i \frac{Q_i}{\varepsilon_0}$$

LEGGE DI GAUSS DEDOTTA DALLA LEGGE DI COULOMB
(CARICHE PUNTIFORMI)



2) Carica esterna a superficie gaussiana

$$|d\Phi_1| = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|dS_{n1}|}{r_1^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}d\Omega$$

$$|d\Phi_2| = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|dS_{n2}|}{r_2^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}d\Omega$$

$$|d\Phi_1| = |d\Phi_2|$$

$$d\Phi_1 < 0 \qquad d\Phi_2 > 0$$

$$\Phi_S(\vec{E}_0) = 0$$

IN SINTESI

-La legge di Gauss è una delle proprietà fondamentali del campo elettrico

-Metodo alternativo alla legge di Coulomb per determinare il campo elettrico per distribuzioni di carica ad elevata simmetria.

- direzione e verso di ***E e le superfici*** su cui il modulo del campo è costante si deducono dalla simmetria senza bisogno di calcoli.

- Si procede per passi:

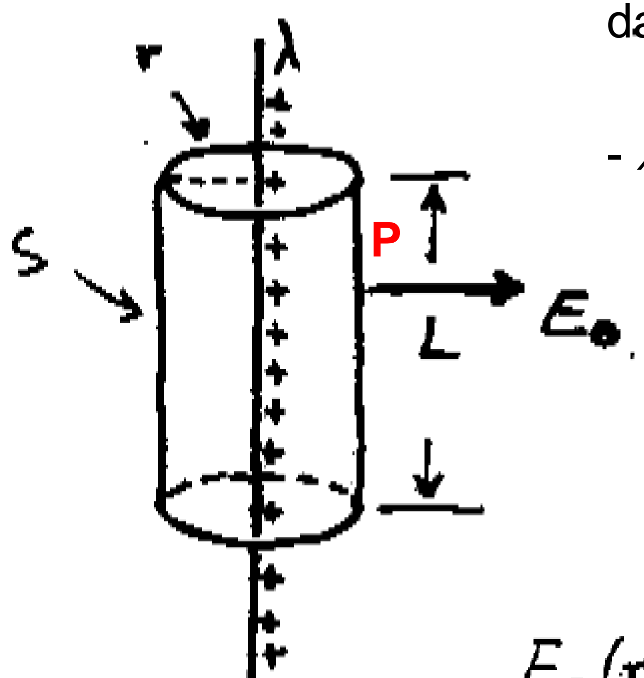
  -si sceglie una superficie chiusa che sfrutti la simmetria

  -si calcola il flusso in termini del modulo di ***E***

  -si scrive e si risolve l'equazione che deriva dall'applicazione della legge di Gauss.

ESEMPI

CAMPO ELETTRICO IN PROSSIMITÀ DI UNA DISTRIBUZIONE LINEARE DI CARICA MOLTO LUNGA



- Cerchiamo campo $\boldsymbol{E}_0$ in punto generico P lontano dagli estremi del filo

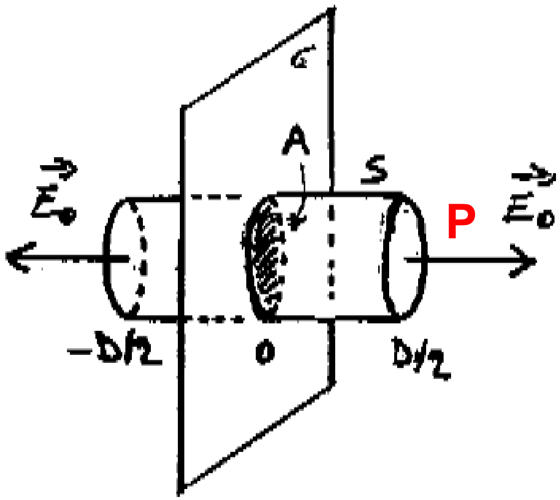
- λ densità lineare di carica uniforme (supposta positiva)

$$\begin{cases} \Phi_S(\vec{E}_0) = E_0(r) \cdot 2\pi r L \\ Q_{int} = \lambda L \end{cases}$$

$$E_0(r) \cdot 2\pi r L = \frac{\lambda L}{\varepsilon_0}$$

$$E_0(r) = \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0 r}$$

CAMPO ELETTRICO IN PROSSIMITÀ DI UNA GRANDE LAMINA PIANA



- cerchiamo campo $\boldsymbol{E}_0$ in punto generico P lontano dagli estremi della lamina

-σ densità superficiale di carica uniforme (supposta positiva)

-Per simmetria campo $\boldsymbol{E}_0$ diretto perpendicolarmente alla lamina e il suo valore dipende solo dalla distanza dalla lamina.

-Il flusso attraverso la superficie laterale è nullo

$$\begin{cases} \Phi_S(\vec{E}_0) = 2AE_0 \\ Q_{int} = \sigma A \end{cases}$$

$$E_0 \cdot 2A = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0}$$

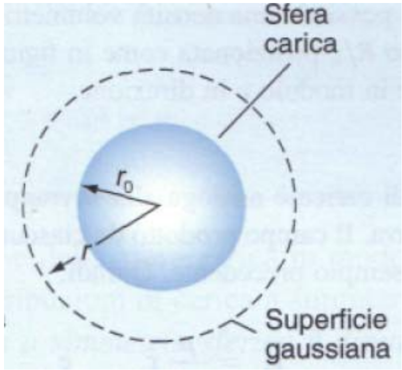
$$E_0 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

CAMPO ELETTRICO SFERA UNIFORMEMENTE CARICA

Per simmetria ci aspettiamo che ***E*** **abbia soltanto una componente radiale** $\boldsymbol{E}_r$ e che il suo modulo dipenda solo dalla distanza *r* dal centro della sfera.

$$\rho = \frac{Q}{4\,\pi\, r_0{}^3/3}$$

CAMPO ELETTRICO IN PUNTI ESTERNI ALLA SFERA



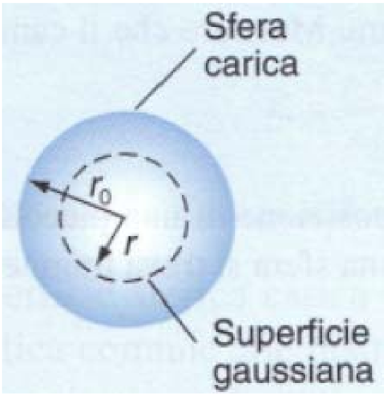
$r > r_0$

$$E_r\, 4\,\pi\, r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$E_r = \frac{Q}{4\,\pi\varepsilon_0 r^2}$$

il campo elettrico è identico a quello generato da una particella di carica *Q posta nel centro* della sfera.

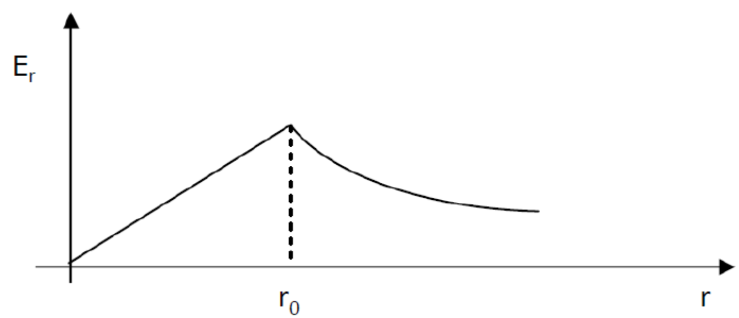
CAMPO ELETTRICO IN PUNTI INTERNI ALLA SFERA



$r < r_0$

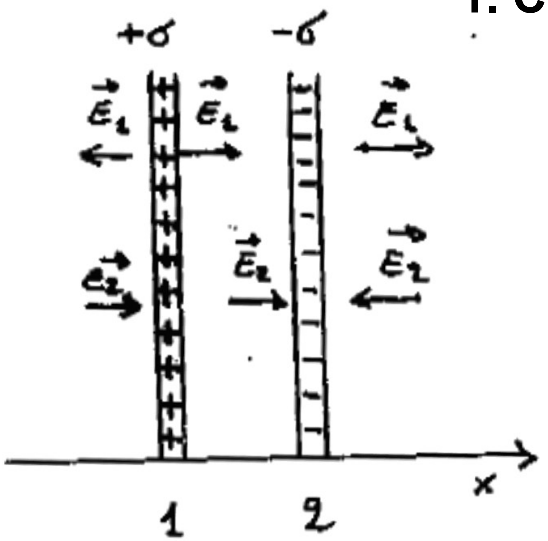
$$Q_{int} = \rho \frac{4\,\pi\, r^3}{3} = \frac{Q}{4\,\pi\, {r_0}^3/3}\frac{4\,\pi\, r^3}{3} = Q\,\frac{r^3}{{r_0}^3}$$

$$E_r\, 4\,\pi\, r^2 = \frac{Q\,\frac{r^3}{{r_0}^3}}{\varepsilon_0} \Longrightarrow E_r = \frac{Q\, r}{4\,\pi\varepsilon_0 {r_0}^3}$$

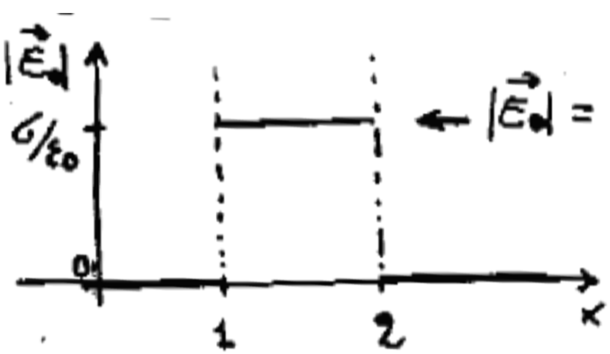


CAMPO ELETTRICO DI UNA DOPPIA LAMINA

1. CON CARICHE OPPOSTE



$$\boxed{|\vec{E}_1| = |\vec{E}_2| = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$$



$\leftarrow |\vec{E}_d| = |\vec{E}_1| + |\vec{E}_2|$

$E_0 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$

$\leftarrow |\vec{E}_0| = |\vec{E}_1| - |\vec{E}_2|$

CAMPO ELETTRICO DI UNA DOPPIA LAMINA

2. CON CARICHE UGUALI