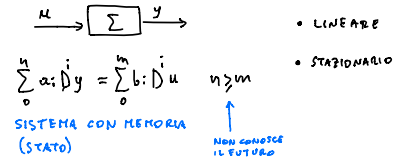
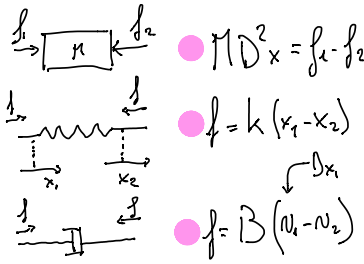
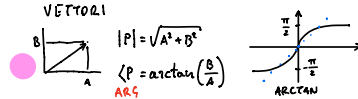
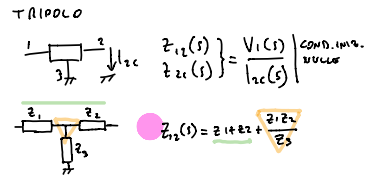
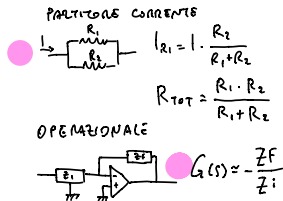


MODELLISTICA

$V = Ri$ $G = R$ (IMPEDENZA Z)
 $N = \frac{1}{C} \int i dt$ $G = \frac{1}{Cs}$
 $D_{NC} = \frac{i}{C}$
 $v = L Di$ $G = sL$



$D \frac{f}{g} = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ $D e^{f(x)} = f'(x) \cdot e^{f(x)}$
 $D f g = f'g + f g'$ $D k = 0$
 $D x^n = n x^{n-1}$ $\int e^{cx} dx = \frac{e^{cx}}{c}$
 QUADRATICA $x^2 + bx + c = 0$ MONICO
 $m = -b/2$ $d = m^2 - c$ $r, s = m \pm d$



LAPLACE

$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$ $s = \sigma + j\omega$
 $\mathcal{L}[D^i f] = s^i F(s) - \sum_{j=0}^{i-1} s^j D^j f(0)$
 $\mathcal{L}[\int_0^t f(\omega) d\omega] = \frac{1}{s} F(s)$
 VALORE FINALE, INIZIALE
 $\lim_{t \rightarrow \infty} f = \lim_{s \rightarrow 0} sF$ $\lim_{t \rightarrow 0^+} f = \lim_{s \rightarrow \infty} sF$

NOTEVOLI

$\mathcal{L}[1(t)] = \frac{1}{s}$ $\mathcal{L}[t^n 1(t)] = \frac{n!}{s^{n+1}}$ $\mathcal{L}[t^h e^{at}] = \frac{h!}{(s-a)^{h+1}}$ (TRASLAZIONE S)
 $\mathcal{L}[\delta] = 1$ $\mathcal{L}[\delta^{(i)}] = s^i$
 $\mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{s-a}$
 $\mathcal{L}[\sin(\beta t)] = \frac{\beta}{s^2 + \beta^2}$ $\mathcal{L}[\cos(\beta t)] = \frac{s}{s^2 + \beta^2}$ (CONVOLUZIONI)
 $\mathcal{L}[f * g] = F(s) \cdot G(s)$
 $f * g := \int_0^t f(\omega) \cdot g(t-\omega) d\omega$
 TRASLAZIONE TEMPO, S
 $\mathcal{L}[f(t-t_0) \cdot 1(t-t_0)] = F \cdot e^{-t_0 s}$
 $\mathcal{L}[f e^{at}] = F(s-a)$

ANTITRASFORMATA

$\mathcal{L}^{-1}[F] = f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_1 - j\infty}^{\sigma_2 + j\infty} F(s) \cdot e^{st} ds$
 $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-a)^h}\right] = \frac{1}{(h-1)!} t^{h-1} e^{at}$ (SIMILE A k_{ij})
 PARTI COMPLESSI CONIUGATI
 $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{k}{s-p} + \frac{\bar{k}}{s-\bar{p}}\right] = 2|k| e^{\alpha t} \cos(\omega t + \theta)$ $\bar{p} = \alpha + j\omega$ $k = |k| e^{j\theta}$

SCOMPOSIZIONE FRATTI SEMPL.

$F = \frac{b(s)}{(s-p_1)^{h_1} (s-p_2)^{h_2} \dots (s-p_h)^{h_h}}$
 $F = \frac{k_1}{(s-p_1)^{h_1}} + \frac{k_2}{(s-p_2)^{h_2}} + \dots + \sum_{j=1}^h \sum_{i=1}^{h_j} \frac{k_{ij}}{(s-p_j)^{h_j+i}}$
 $k_{ij} = \frac{1}{(j-1)!} D^{j-1} \left[(s-p_j)^{h_j+i} \cdot F \right]_{s=p_j}$
 TIPO $k_{12} + k_{23} + k_{30} = 0$
 OCCHIO AL SEGNO

DERIVATE GENERALIZZATE

$D^{n,h} f(t) = D^n f(t) + \underbrace{(D^{n-1} f_+ - D^{n-1} f_-)}_{\text{SALTO}} \delta(t) + \dots + (f_+ - f_-) \delta^{(n-1)}(t)$

EQUAZIONE F. IMPULSIVE

$C_1 + C_0 \delta + C_1 \delta^{(1)} + \dots$
 $d_1 + d_0 \delta + d_1 \delta^{(1)} + \dots$

VASCHY

$$y_{\text{FOR}}(t) = \int_0^t u(v) \cdot g_2(t-v) dv + u(0+) \cdot g_2(t)$$

FUNZIONE DI TRASFERIMENTO

$$Y = \frac{\sum_{i=0}^n b_i s^i}{\sum_{i=0}^m a_i s^i} U + \frac{\sum_{i=1}^n a_i \sum_{j=0}^{i-1} D^{i-1-j} y_+ s^j - \sum_{i=1}^m b_i \sum_{j=0}^{i-1} s^j \dots}{\sum_{i=0}^m a_i s^i}$$

$\sum a_i D^i y = \sum b_i D^i u$

Es: $Dy + 2y = 2Du + 2u \Leftrightarrow G = \frac{2s+2}{s+2} U + u(0+)$

RISPOSTA FORZATA G
 POLINOMIO CARATTERISTICO
 RISPOSTA LIBERA

POLO = RADICE DEL POLINOMIO $a_n s^n$
 = FREQUENZA CAVITICA
ZERO = RADICE DEL POLINOMIO $b_m s^m$

$g(t) = \mathcal{L}^{-1}(G) \uparrow$
 $g_s(t) = \mathcal{L}^{-1}(G \cdot \frac{1}{s}) \Leftarrow$

$g(t) = D^* g_s(t)$

INALZO
 GRADINO (STEP)

$G = \frac{\text{USCITA}}{\text{INGRESSO}}$

$K = G(0) = \frac{b_0}{a_0}$

FUNZ. DI TRASFERIMENTO
 GUADAGNO STATICO

POLI
 $\sum a_i s^i \Leftrightarrow (s-p_1)(s-p_2) \dots$

RADICI EQUAZIONE
 $\rightarrow (s+5)(s+3) \dots$
 SEGNO!

MODI DI UN POLO

$e^{pt}, t e^{pt}, \dots, t^{n-1} e^{pt}$

$e^{\sigma t} \sin(\omega t + \phi), t e^{\sigma t} \sin(\omega t + \phi)$

ATTENTO A GRADO
 h = molteplicità
 COMPLESSI
 $p_{1,2} = \sigma \pm j\omega$

$(s-\sigma)^2 + \omega^2$

POLI SINUSOIDE

TIPO DI UN SISTEMA

\dots
 $s^h (s-p_1)(s-p_2) \dots$

QUANTI POLI IN ORIGINE

GRADO MAX CONTINUITA'

$f \in C^{k, \infty}$

DERIVATA CONTINUA FINO A K-ESIMA
 \rightarrow MASSIMO TRA GRADO $M(F)$ E GRADO RELATIVO G

ANALISI ARMONICA

$u(t) = U \sin(\omega t)$

SEGNALE INGRESSO

$F(\omega) := \frac{Y(\omega)}{U} e^{j\varphi(\omega)}$

FUNZIONE RISP. ARMONICA

ES. $Y(\omega)$

$y_{\text{FOR}}(t) = U Y(\omega) \cdot \sin(\omega t + \varphi(\omega))$

ES. $\omega = \omega \dots$

$Y(s) = G(s) \cdot U(s) \leftarrow \frac{\beta^2}{s^2 \beta^2}$

$\varphi(\omega) = \angle G(j\omega)$
 ARGOMENTO

FORME STANDARD

$K_1 \frac{s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{s^h + a_{h-1} s^{h-1} + \dots + a_0}$

POLINOMI MONICI

$[(s+z)^2 + 1]^2 \rightarrow$ MOLTEPLICITA' 2
 $\rightarrow s^2 + 2s + 5 \rightarrow$ RAGGI
 $\rightarrow -1 \pm 2j$

$K_1 \frac{(s-z_1)(s-z_2) \dots}{(s-p_1)(s-p_2) \dots}$

POLI E ZERI

$K \frac{(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s) \dots}{s^h (1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s) \dots}$

COSTANTE TRASF.
 SISTEMI 1° ORDINE
 SISTEMI 2° ORDINE
 COPPIA POLI/ZERI COMP. CONIUGATI

TIPO SISTEMA
 POLO ORIGINE
 COSTANTI DI TEMPO
 OCCHIO A SEGNI

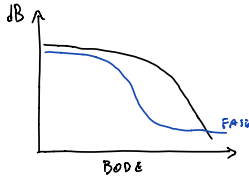
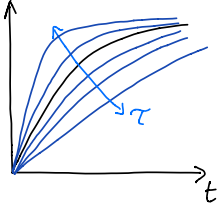
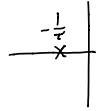
$K = K_1 \cdot \frac{b_0}{a_0}$

SISTEMI DINAMICI ORDINE 1

QUADRO STATICO NORMALIZZATO

$$G(s) = \frac{1}{(1+\tau s)}$$

cost. di tempo



RISPOSTA A GRADINO

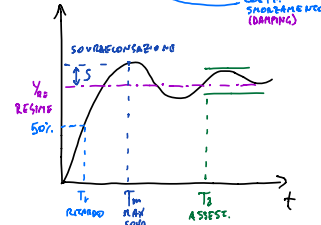
$$g_s(t) = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \quad t \geq 0$$

$$t = 3\tau \Rightarrow 95\%$$

ORDINE 2

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2}$$

ω_n : PULSAZIONE NATURALE
 δ : COEFF. SMORZAMENTO (DAMPING)
 $0 < \delta < 1$



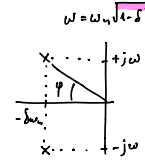
RISPOSTA A GRADINO

$$y(t) = 1 - A e^{-\delta\omega_n t} \sin(\omega_d t + \phi)$$

$\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\delta^2}$
 $\phi = \arcsin \delta$
 $= \arctan \frac{\sqrt{1-\delta^2}}{\delta}$

POLI: $-\delta\omega_n \pm j\omega_n \sqrt{1-\delta^2}$

MODI: $e^{-\delta\omega_n t} \sin(\omega_d t + \phi)$



$$S = 100 \exp\left\{-\frac{\delta\pi}{\sqrt{1-\delta^2}}\right\}$$

DEVE AVERE POLI COMPL.

$$T_A \approx \frac{3}{\delta\omega_n} \quad T_S \approx \frac{1.8}{\omega_n}$$

STABILITA'

STABILE	y_{sig} LIMITATA PER $t \rightarrow \infty$		NO POLI $Re > 0$, nessun. lin. multipl. = 1	
ASINTOT. STABILE	$\lim_{t \rightarrow \infty} y_{sig} = 0$		$\forall Re p < 0 \Rightarrow$ BIBO STABILE	
SEMPL. STABILE	$\lim_{t \rightarrow \infty} y_{sig} \neq 0 \vee \neq y_{ss}$		\exists poli non. lin.	
INSTABILE	NON LIMITATA		$\exists Re p > 0 \vee$ poli non. lin. mult. > 1	

BIBO

LIMITATEZZA AZIONE FORZATA \rightarrow FORZATA

$$\int_0^{\infty} |g(\tau)| d\tau < \infty$$

RISPOSTA AD INPUT HA ENERGIA FINITA

POLI \equiv RADICI $a(s) \Rightarrow$ RADICI POSITIVE

CRITERIO ROUTH

EVOLUZIONE CARATTERISTICA

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0 = 0$$

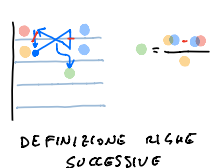
STABILITA' LEGATA A RADICI (= POLI)

$$G = \frac{b(s)}{a(s)} \quad \left(\leftarrow 1 + L(s) \right)$$

IN CASO DI SISTEMI IN RETROAZIONE

DETERMINA I SEGNI DELLE RADICI

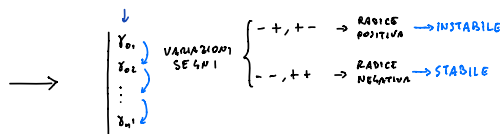
SE SEGN a_n DIVERSI \Rightarrow INSTABILE



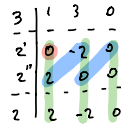
\rightarrow RIGA MOLTIPLICARE PER $K > 0$

$$\begin{matrix} 8 & 24 & 48 & 8 \\ 1 & 3 & 6 & 0 \end{matrix}$$

PRIMA COLONNA

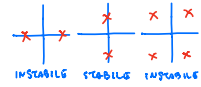


- PRIMO ELEMENTO = 0
 ⇒ INSTABILE
 → MOLTIPLICA PER (-1)^P ← NUMERO DI ZERI
 → TRASLA DI P POSTI ← -1, -1, -1
 NUOVA RIGA
 → SOMMA LE DUE RIGHE



- TUTTI ELEM. NULLI
 ⇒ POLI COMP. CONIUGATI
 ⇒ TROVA POLINOMIO AUSILIARIO

RADICI SIMMETRICHE RISPETTO A C



$$z^i | \begin{matrix} \gamma_{n-2i,1} & \gamma_{n-2i,2} & \dots & \gamma_{n-2i,m} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{matrix}$$

$$\beta(s) = \gamma_{n-2i,1} s^{2i} + \gamma_{n-2i,2} s^{2i-2} + \dots + \gamma_{n-2i,m} s^2 + \gamma_{n-2i,1}$$

- DERIVA
- SOSTITUISCI ZERI IN TABELLA
- RADICI IMMAGINARIE ATTENZIONE A MOLTEPLICITÀ

DIAGRAMMI BODE

$$G(s) \rightarrow G(j\omega) = |G(j\omega)| + e^{j\arg(G(j\omega))}$$

FORMA POLARE

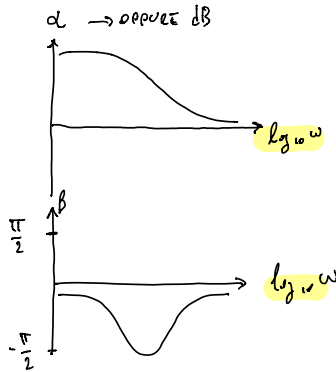
$$\alpha = \log_{10} |G(j\omega)| \quad dB = 20\alpha$$

AMPIEZZA

$$\beta = \arg(G(j\omega))$$

FASE

→ POSSIBILE SOMMARE I DIAGRAMMI



PER TRACCIARE BODE

- TRASFORMA IN FORMATO STANDARD CON COSTANTI DI TEMPO
- SCOMPONI IN DIAGRAMMI ELEMENTARI ← OSSERVA COST. DI TEMPO
- SOMMA I CONTRIBUTI
- POLI →
- ZERI →

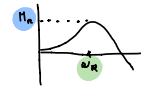
PARAMETRI TIPICI

$$\omega_R := \arg \max |G(j\omega)|$$

PULSAZIONE RISONANZA

$$M_R := |G(j\omega_R)|$$

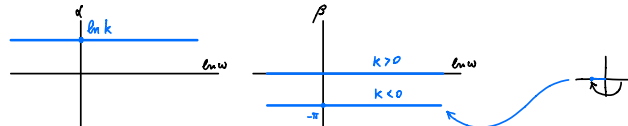
PICCO RISONANZA



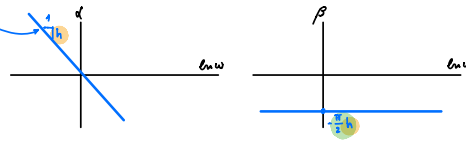
DIAGRAMMI ELEMENTARI

PER I POLI

K
 COSTANTE



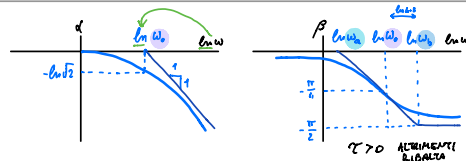
$(j\omega)^{-h}$
 POLO ORIGINE
 ESISTE ANCHE IN ALTRO SEMIPIANO → NO PER ZERI
 COME SE STESI SOMMANDO CONTRIBUTI



$$G(j\omega) = -h \ln|\omega| - j \frac{\pi}{2} h$$

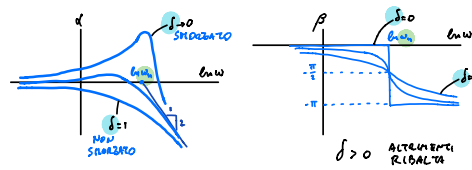
SCALA

$(1 + \tau j\omega)^{\pm 1}$
 POLO/ZERO
 ORDINE 1



- $\omega_0 := \frac{1}{\tau}$ $f_0 = \frac{1}{\tau}$? COST. TEMPO = PERIODO
 - PULSAZIONE D'ANGOLO/DI ROTAZIONE / FREQ. DI TAGLIO
 - $\frac{\omega_0}{\omega_a} = \frac{\omega_b}{\omega_0} = e^{\frac{\pi}{2}} \approx 4.81$
- PER +1 SI OTTIENE PERL SIMMETRIA

$\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + 2\zeta \frac{j\omega}{\omega_n}\right)^{\pm 1}$
 POLI ZERI COMPLESSI
 CONIUGATI



$$\omega_R = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2} \quad M_R = \frac{1}{2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}}$$

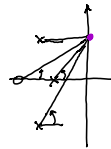
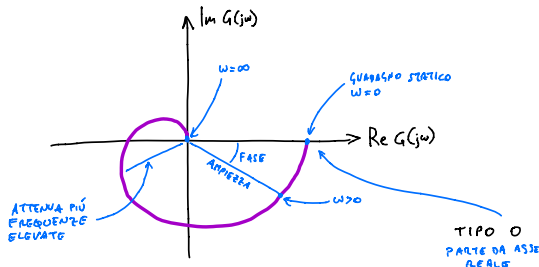
PULSAZIONE NATURALE

$$B_{\omega} = \omega_n \sqrt{(1 - 2\zeta^2)^2 + (2\zeta)^2} + 1 \quad \delta = \frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}} - 1$$

LARGHEZZA BANDA

DIAGRAMMI NYQUIST

o DIAGRAMMI POLARI



$$\sigma_{ij} = \sum_{k>1} \angle z_k - \sum_{k>1} \angle p_k$$

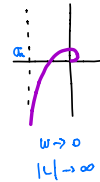
$$K_1 \frac{b_n s^n + \dots + b_0}{a_m s^m + \dots + a_0}$$

$$K_1 \frac{(1 + \tau_1 s) \dots}{s^h (1 + \tau_2 s) \dots}$$

$$\sigma_a = K_1 \frac{a_1 b_1 - a_2 b_0}{a_1^2} = k \left[\sum \tau_1' - \sum \tau_2' + \sum 2 \frac{\delta_1'}{\omega_{d1}} - \sum 2 \frac{\delta_2'}{\omega_{d2}} \right]$$

$$= k (\tau_1' + \tau_2' + \dots - \tau_2' - \tau_3' - \dots)$$

TIPO 1
PARTE DI
ASINTOTO
NON SEMBRA
APPLICABILE
A TIPO 24



METODO

- $L(s) \rightarrow L(j\omega)$ FORMA STANDARD
- TROVA $|G(j\omega)|$ E $\angle G(j\omega)$, σ_a
- $\omega \rightarrow 0^+$, $\omega \rightarrow \infty$
 - STATO PIU' PROXIMO
- IMMERSEZ. RE + IM $\angle G = \pi \rightarrow$ TROVA ω
 - VIA IL RISOLTORE
 - METODO ITERATIVO APPROSSIMATO
- RIFLETTI X

CALCOLA PER SINGOLI CONTRIBUTI

CONSIDERA COME VETTORI!

$$k \frac{(1 + \tau_1' s)^2}{s^3 (1 + \tau_2' s)}$$

$$|| = \omega^3 \quad || = \sqrt{1 + \tau_2'^2 \omega^2}$$

$$\angle = -\frac{3}{2}\pi \quad \angle = -\arctan \tau$$



$$\arctan(-\omega) = -\arctan(\omega)$$

$$\frac{1}{j\omega} \leftarrow -\frac{1}{j\omega}$$

SEMPRE SEMPRE ANTICIPAZIONE, PER RIFLETTI.

SISTEMI A FASE MINIMA

SE FDT G È:

- RAZIONALE
- $\text{Re}(p/z) < 0$ = NESSUN POLO/ZERO POSITIVO

BANDA PASS. $\rightarrow |G| \text{ cost} \Rightarrow \sigma_{ij} \rightarrow 0$

$|G| \searrow \Rightarrow \sigma_{ij} \sim$ RITARDO

$|G| \nearrow \Rightarrow \sigma_{ij} \sim$ ANTICIPA

BASTA IL MODULO PER RAPPRESENTARE IL SISTEMA \rightarrow FORMULA DI BODE

APPROSSIM. PADÉ RITARDO FINITO

$$e^{-t_0 s} \xrightarrow{\text{ONNOME 2}} G_2(s, t_0) = \frac{1 - \frac{t_0}{2} s + \frac{t_0^2}{12} s^2}{1 + \frac{t_0}{2} s + \frac{t_0^2}{12} s^2}$$

SOSTITUISCI NELLE FDT QUANDO INCONTRI UN RITARDO

$$P(s) = \frac{e^{-2s}}{1+4s}$$

METODO ITERATIVO ARCTAN

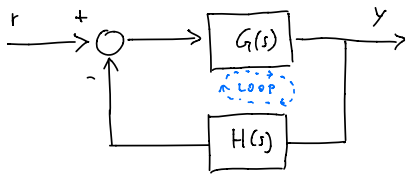
VARIABILE ISOLATA

$$\omega = f(\omega) \leftarrow \text{FUNZIONE MALEFICA PIENA DI ARCTAN}$$

$$\omega = 1 \quad \omega' = f(\omega) \quad \omega'' = f(\omega') \dots$$

SISTEMI RETROAZIONATI

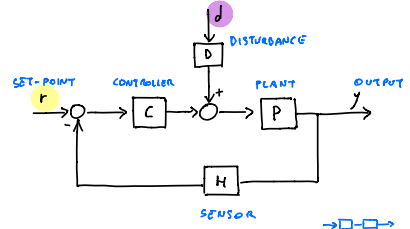
SOSTANZIALMENTE DEI SISTEMI DI INSEGUIMENTO



$$T_{ky} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} = \frac{FF}{1 + L}$$

EQUAZIONE CARATTERISTICA STABILE SE RADICI $Re < 0$ ($\mu > 0$)

FEED FORWARD
L(s) → LOOP GUARDANDO ANELLO
DI SOLITO STUDIAMO QUESTO



$$T_{ky} = \frac{C P}{1 + C P H}$$

$$T_{dy} = \frac{D P}{1 + C P H}$$

ANALISI A REGIME

QUANTO BENE RIESCE AD INSEGUIRE IL SET POINT

$$G(s) = K \frac{(s + \sigma'_1) \dots}{s^h (s + \tau_1) \dots}$$

$$e_r = \lim_{t \rightarrow \infty} (r(t) - y(t))$$

ERRORE A REGIME

TIPO	K_p	K_v	K_a	$\frac{r_0}{1+s}$	$\frac{r_1 t}{s^2}$	$\frac{r_2 t^2}{s^3}$
0	K	0	0	$e_r = \frac{r_0}{1+K_p}$	$e_r = \infty$	$e_r = \infty$
1	0	K	0	$e_r = 0$	$e_r = \frac{r_1}{K_v}$	$e_r = \infty$
2	0	0	K	$e_r = 0$	$e_r = 0$	$e_r = \frac{r_2}{K_a}$

SISTEMA FERMO SISTEMA IN AZIONE

VELOCITÀ POSITIONE ↓ ACCELERAZIONE
NON CE LA FA AD INSEGUIRE LA RAMP

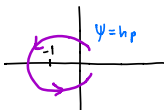
$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = G(0)$$

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot G(s)$$

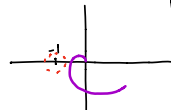
CRITERIO DI NYQUIST

SISTEMA ASINT. STABILE SE IL DIAGRAMMA POLARE COMPLETO DI $L(s)$

GIÀ C'È CURVA IMMAGINE DI $1+L(s)$ INTORNO A ORIGINI (O DI $L(s)$ INTORNO A -1)



SE \exists POLI $Re > 0$
SIAT AZIONALI SU -1
QUANTI POLI > 0



SE \nexists POLI $Re > 0$
NON TOCCA O
CIRCONFERENZA -1

$$\Psi = n_z - n_p$$

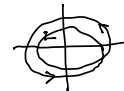
TEOR. INDICE LOG.



GIÀ CURVA IMMAGINE ANTI-ORARIO ATTORNO ORIGINI

SEMIPIANO POSITIVO

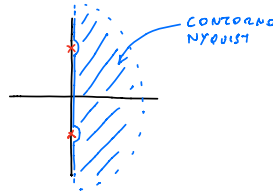
$$= N_z - N_p$$



METODO

- TROVA $|L|$ E $\angle L$
- LIMITI $\omega \rightarrow 0$ $\omega \rightarrow \infty$
- ASINTOTI, POLI SU Im
- TROVA ω PER $\angle = -\frac{\pi}{2}$
- TROVA $|L|$ PER ω → MARGINE AMPIEZZA → QUADRO MAX $K \cdot |L| < -1$

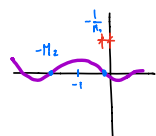
DA EQ. CARATTERISTICA
DIAGRAMMA DI $L(s)$ PER CAPIRE STABILITÀ $1+L(s)$ GUARDANDO IL PUNTO -1



TROVA POLI E ZERI CW PARTE REALE POSITIVA

TROVA GIRI ATTORNO A -1 PER ANALIZZARE SISTEMA IN RETROAZIONE

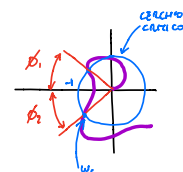
MARGINI DI STABILITÀ



$$M_A = \min \{ M_1, M_2 \}$$

$$M_A(\text{dB}) = 20 \log M_A$$

MARGINE AMPIEZZA



$$M_F = \min \{ \phi_1, \phi_2 \}$$

MARGINE FASE

METODO

- TROVA ω PER $\angle G = -\pi$

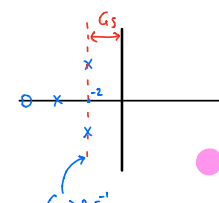
$$M_A = \frac{1}{|G(\omega)|}$$

$$L(s, \alpha) = \frac{1}{M_A} \left| \frac{1}{|Z|} \right|$$

METODO

- TROVA ω PER $|L| = 1$
- $M_F = \pi - \angle G(\omega)$

GRADO DI STABILITÀ



$$T_A \approx \frac{3}{G_S}$$

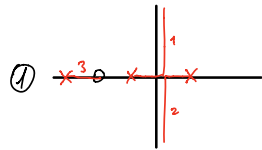
TEMPO ASINT.

DISTANZA MINIMA POLI DA ASS E Im

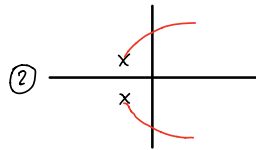
LUGO DELLE RADICI

diretto $k_1 > 0$ inverso $k_1 < 0$

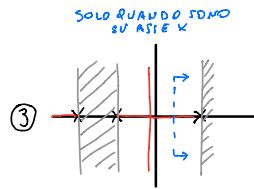
RADICI EQ. $1+K_1L(s)$



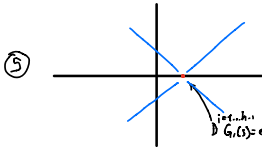
RAMI QUANTI POLI



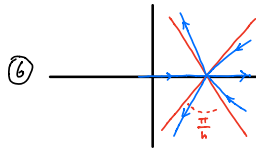
SIMMETRICO X



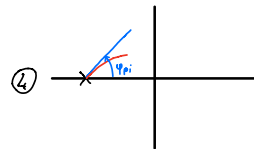
N° DISPARI POLI/ZERI A DESTRA $K_1 > 0$



RADICI DI MOLTIPLICITA' h



h RAMI ENTRANTI / USCENTI ALTERNATI



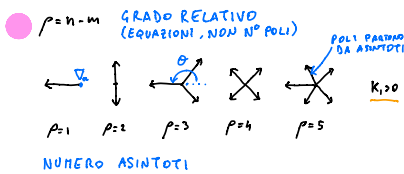
ANGOLO PARTENZA POLO SEMPLICE

PROCEDURA

- INDIVIDUARE POLI E ZERI RELATIVI A GUADAGNO AMPLIO
- GRADO RELATIVO \rightarrow ASINTOTI
- ∇_a , INTERSEZ. ASCISSA, φ_p
- ZONE AMMISSIBILI $\left[\frac{d_1}{d_2} \right]$



ASINTOTI



$\nabla_a = \frac{\sum p_i - \sum z_i}{p}$ ASCISSA CENTRO ASINTOTI

$\theta = \frac{(k+1)\pi}{p}$ ANGOLI

INTERSEZ. ASCISSA

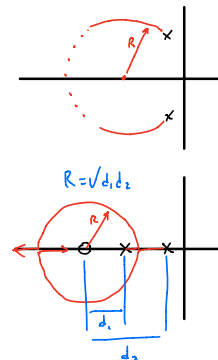
$\sum \frac{1}{s - p_i} - \sum \frac{1}{s - z_i} = 0$

ANGOLI PARTENZA

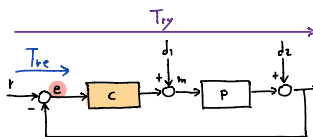
$\varphi_p = \pi + \sum_{j=1}^m \arg(p - z_j) - \sum_{i=1}^n \arg(p - p_i) \text{ mod } 2\pi$

PER POLI CON MOLTIPLICITA' h

SECONDO ORDINE



PROGETTO SIST. IN RETROAZIONE



$T_{re} = \frac{1}{1+L(s)} = S$ SENSIBILITA'

$T_{ry} = 1 - T_{re} = T$ COMPLEMENTARE

	ORDINE PREFISSATO
0	$C(s) = k$ ZERO FACOLTATIVO
1	$C(s) = \frac{b_1s + b_0}{s + a_0}$
2	$C(s) = \frac{b_2s^2 + b_1s + b_0}{s^2 + a_1s + a_0}$

COME USARE UN TEMPLATE

	STRUTTURA PREFISSATA
	PARAMETRAZZIONE FDT
	$C(s) = k \frac{s - a}{s - b}$
	• RETI CORRETTICI PER COMPENSAZ. DINAMICA
	• REGOLAZORI PID

REQUISITI

• INTERN. ASINT. STABILE \iff

TUTTE FUNZIONI DI TRASFERIMENTO
 \forall FDP $\{r, d, d_i\} \rightarrow \{e, m, j\}$
 ASINT. STABILI

• BEN CONNESSO $\lim_{s \rightarrow 0} 1+L(s) \neq 0$

$C(s)$ PROPRIA $n \geq m$ $P(s)$ STRETT. PROPRIA $n > m$

• RADICI $1+L(s)=0 \text{ Re} < 0$
 • CANCELLAZ. POLI/ZERI C.

• PREST. STATICHE/ASINTOTICHE
 e_r

• PREST. DINAMICHE
 $RISP. \tau, S, T_A \dots$

• ROBUSTEZZA SIMULAZIONI NON LINEARI

SPECIFICHE DI PROGETTO

• $e_r = 0$
 ERRORE A REGIME

\rightarrow ORDINE CONTROLLORE ≥ 1
 ALMENO UN POLO IN ORIGINE ??
 DIPENDE DA SEGNALE? $T_{\eta}(s)=1 \rightarrow F \frac{L(s)}{1+L(s)}=1$

• T_A PREFISSATO
 TEMPO ASSESTAM.

$\rightarrow T_A = \frac{3}{G_s} \rightarrow G_s \geq \dots \rightarrow$ ROUTH?
 $1+K L(s) \Big|_{s=G_s} = 0$
 GRADO STABILITÀ

• $S = 0$
 SOVRACORR.

\rightarrow POLO DOMINANTE REALE NESSUNA OSCILLAZIONE

• TIPO N

\rightarrow N POLI IN ORIGINE

• ORDINE N

\rightarrow USA IL TEMPLATE ES. $K \frac{s-b}{s-a}$

• REGIONE FREQ.

\rightarrow POLI CC CHE ANNULANO SEGNALE IN INGRESSO IN CONTROLLER
 \star TEOR. ANALISI ARMONICA
 $(s+j3)(s-j3) = (s^2+9)$

• POLI SPECIFICI

\rightarrow POLINOMIO CARATT. SISTEMA PARAMETRIZZATO
 $1+CP=0 \quad C = \frac{b(s)}{a(s)} \quad P_c(s) = (s+p_1)(s+p_2) \dots$

TECNICHE

• STUDIO LUOGO RADICI, ROUTH
 PER SPOSTARE I POLI NELLE ZONE DI STABILITÀ $K > 0$ $K < 0$
 TROVA IL GUADAGNO GIUSTO $G_s M_A$

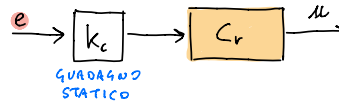
• CANC. POLO-ZERO
 SE NON SI PUO' FARE ALTRIMENTI

• EQUAGLIA POLINOMI
 COSTRUISCI POLINOMIO PARAMETRICO ED EQUAGLIA CON SISTEMA CHE SI VUOLE OTTENERE

• DIAGRAMMI NYQUIST, FORM. INVERS.
 PROGETTI IN FREQ. CON MARGINI STAB.

• DIAGRAMMI BODE
 SPECIFICHE FREQUENZIALI

RETI CORRETRICI



INTEGRATRICE

$$C_I = \frac{1}{1 + \tau s}$$

RITARDO E ANTICIPAZIONE
 ...

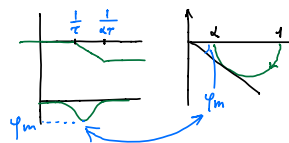
DERIVATRICE

$$C_D = \frac{\tau s}{1 + \tau s}$$

T PONTICQUATO
 ...

RITARDAZIONE (DI FASE)

$$C_R = \frac{1 + \alpha \tau s}{1 + \tau s}$$



$$\varphi_m = -\arcsin \frac{1-\alpha}{1+\alpha}$$

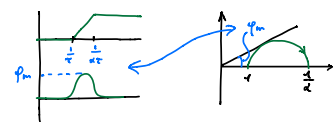
$$\omega_m = \frac{1}{\sqrt{\alpha} \cdot \tau}$$

POCO USATO, TAGLIA ALTE FREQ.

ANTICIPATRICE

ANTICIPA IL CAMBIAMENTO?

$$C_A = \frac{1 + \tau s}{1 + \alpha \tau s}$$



$$\varphi_m = \arcsin \frac{1-\alpha}{1+\alpha}$$

REGOLATORI STANDARD

PROPORZIONALE P

$$R(s) = k_p$$

INTEGRALE I

$$R(s) = \frac{k_p}{T_i s}$$

↑ PARAMETRO TEMPO

PROPORZ. INTEGRALE PI

$$\Rightarrow R(s) = k_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right)$$

PROPORZIONALE DERIVATIVO PD

$$R_s = k_p (1 + T_d s)$$

$$\rightarrow R_s = k_p \left(1 + \frac{T_d s}{1 + \tau s} \right) \quad \tau \ll T_i$$

= RETE ANTICIPATRICE

PID

$$R(s) = k_p \left(1 + \frac{T_d s}{1 + \tau s} + \frac{1}{T_i s} \right) \equiv k_p \frac{T_d T_i s^2 + T_i s + 1}{T_i s (1 + \tau s)}$$

FORMULE INVERSIONE

RICERCA DELLE FORMULE INVERSE DELLE RETI

$$R(s) = M e^{j\varphi} \begin{cases} \alpha = \frac{M \cos \varphi - 1}{M(H - \cos \varphi)} \\ \tau = \frac{H - \cos \varphi}{\omega_0 \sin \varphi} \end{cases}$$

← TROVA PARAMETRI PARTENDO DA MARGINI

$$M = \frac{\sqrt{1 + (\tau\omega)^2}}{\sqrt{1 + (\alpha\tau\omega)^2}}$$

$$\varphi = \text{atg}(\tau\omega) - \text{atg}(\alpha\tau\omega)$$

$$R(s) = \frac{1 + \tau\omega j}{1 + \alpha\tau\omega j}$$

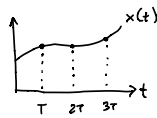
RETE ANTICIPATRICE

OMESSI: RETI T, AR, DIFANTCA ECC..

CONTROLLO DIGITALE

CONVERTITORE A/D

$$x(t) \rightarrow \tilde{x}(k) = x(kT) \quad k \in \mathbb{Z}$$



CONVERSIONE D/A

→ CAMPIONAMENTO SHANNON

RICOSTRUIBILE DA $\tilde{x}(k)$: $f_s = \frac{f_{max}}{T} \geq 2f_s$

\uparrow SGR. CAMPIONI
 PULSANZA CAMPIONAMENTO
 \uparrow SPETTRO LIMITATO 0- ω_c

SOTTOCAMPION. \Rightarrow ALIASING \Rightarrow FILTRO LP

TRASFORMATA Z

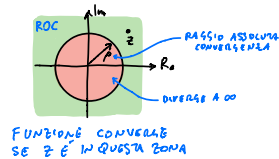
• LINEARE

$$\mathcal{Z}[x(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k}$$

\uparrow
VARIABILE COMPLESSA

$$\parallel$$

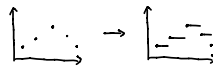
$$X(z) = x(0) + x(1)z^{-1} + \dots$$



$$z = \sigma + j\omega$$

CONVERTITORE ZOH

ZERO-ORDER HOLD



PROPRIETA' $X(z) = \mathcal{Z}[x(k)]$

K E' LA VARIABILE, NON UNA COSTANTE R

RITARDO N PASSI

$$\mathcal{Z}[x(k-h)] = z^{-h} \mathcal{Z}[x(k)] + \sum_{k=0}^{h-1} x(k-h)z^{-k}$$

$\leftarrow x(i)z^{-1} \cdot z^{-h}$
COME SI GANNA IL SISTEMA DURANTE IL RITARDO
CONDIZ. INIZIALI NON NULLE

ANTICIPO N PASSI

$$\mathcal{Z}[x(k+h)] = z^h \mathcal{Z}[x(k)] + \sum_{i=0}^{h-1} x(i)z^{-i}$$

$$\mathcal{Z}[1(k)] = \frac{z}{z-1}$$

$$\mathcal{Z}[a^k x(k)] = X\left(\frac{z}{a}\right)$$

$$\mathcal{Z}[k^1(k)] = \frac{z}{(z-1)^2}$$

$$\mathcal{Z}[a^k 1(k)] = \frac{z}{z-a}$$

\downarrow
VEDI ANTITRASF.

$$\mathcal{Z}[k^2(k)] = \frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$$

VALORE INIZIALE

$$x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$$

VALORE FINALE

$$\lim_{z \rightarrow \infty} x(k) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) X(z)$$

CONVOLUZIONI

$$(x * y)(k) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x(k-i)y(i)$$

$$\mathcal{Z}[x * y] = X \cdot Y$$

DERIVATA

$$-z \frac{dX(z)}{dz} = \mathcal{Z}[k \cdot x(k)]$$

DOVE ANALITICA

ANTITRASF.

METODO RESIDUI

$$x(k) = \sum_i \text{Res} \left\{ X(z) z^{k-1}, p_i \right\}$$

POLI

- $\mathcal{Z}^{-1} \left[\frac{1}{z-a} \right] = a^{k-1} 1(k-1)$
 - $\mathcal{Z}^{-1} \left[\frac{z}{z-a} \right] = a^k 1(k)$
 - $\mathcal{Z}^{-1} [a] = a \cdot \delta(k)$
 - $\mathcal{Z}^{-1} \left[\frac{1}{(z-a)^2} \right] = (k-1) a^{k-2} 1(k-1)$
 - $\mathcal{Z}^{-1} \left[\frac{z}{(z-a)^2} \right] = k a^{k-1} 1(k)$
 - $\mathcal{Z}^{-1} \left[\frac{1}{(z-a)^3} \right] = \frac{(k-1)(k-2)}{2} a^{k-3} 1(k-1)$
 - $\mathcal{Z}^{-1} \left[\frac{z}{(z-a)^3} \right] = \frac{k(k-1)}{2} a^{k-2} 1(k)$
 - $\mathcal{Z}^{-1} \left[\frac{1}{(z-a)^h} \right] = \frac{(k-1)(k-2) \dots (k-h+1)}{(h-1)!} a^{k-h} 1(k-1)$
 - $\mathcal{Z}^{-1} \left[\frac{z}{(z-a)^h} \right] = \binom{k}{h-1} a^{k-(h-1)}$
- USUALE

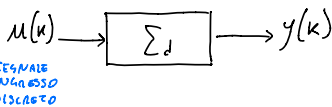
... OMBESSI COMPLESSI

$$c \frac{z}{z-p} + \bar{c} \frac{\bar{z}}{\bar{z}-\bar{p}}$$

METODO SVILUPPO FRATTI

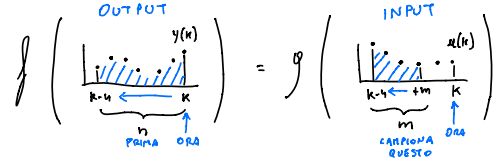
- $F(z) = \frac{b(z)}{(z-p_1)^{r_1} (z-p_2)^{r_2} \dots (z-p_h)^{r_h}} = c_0 + \frac{c_{1,1}}{(z-p_1)^{r_1}} + \dots + \frac{c_{i,r_i}}{z-p_i} + \dots + \frac{c_{h,1}}{(z-p_h)^{r_h}} + \dots$
 - $c_{ij} = \frac{1}{(j-1)!} D^{j-1} \left[(z-p_i)^{r_i} F(z) \right] \Big|_{z=p_i}$ i=1, \dots, h j=1, \dots, r_i
- UAGUALE
- $c_0 = \lim_{z \rightarrow +\infty} F(z)$ → AGGIUNGI $\delta(k)$ QUANDO ANTITRASF.

SISTEMI A TEMPO DISCRETO



EQ. ALLE DIFFERENZE DESCRIVE COME SI COMPORTA IL MODELLO DEL SISTEMA

$$f(y(k), y(k-1), \dots, y(k-n)) = g(u(k-n+m), u(k-n+m-1), \dots, u(k-n)) \quad m \leq n \leftarrow \text{CAUSALITA'}$$



LA USCITA DIPENDE SOLO DAL PASSATO DELL'ENTRATA

→ PER f, g LINEARI

$$a_n y(k) + a_{n-1} y(k-1) + \dots + a_0 y(k-n) = b_m u(k-n+m) + \dots + b_0 u(k-n)$$

EQUAZIONE ALLE DIFFERENZE

$$y(-1) \dots y(-n) + u(k) \longrightarrow y(k) \quad k \geq 0$$

CONDIZIONI INIZIALI SEGNALE INGRESSO DETERMINARE SEGNALE USCITA

FUNZIONI TRASFERIMENTO

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i y(k-n-i) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i u(k-n-i)$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i \mathcal{Z}[y(k-n-i)] = \sum_{i=0}^{n-1} b_i \mathcal{Z}[u(k-n-i)]$$

$$a(z) Y(z) = b(z) U(z) + c(z)$$

\downarrow \downarrow \downarrow
 $\sum a_i z^i$ $\sum b_i z^i$ $\sum \dots - \sum \dots$

ES.

$$y(k) + 0.5y(k-1) + 0.4y(k-2)$$

$$\downarrow z^2 + 0.5z + 0.4$$

APPLICANDO LA TRASFORMAZA

$$Y(z) = \frac{b(z)}{a(z)} U(z) + \frac{c(z)}{a(z)}$$

$$H(z) = \frac{b(z)}{a(z)} = \frac{b_n z^m + \dots + b_0}{a_n z^k + \dots + a_0}$$

RISPOSTA FORZATA RISPOSTA LIBERA

$$\mathcal{Z}[y(k)] = H(z) \mathcal{Z}[u(k)]$$

CONDIZIONI INIZIALI NULLI

$$y_{f.m.}(k) = \sum_{i=0}^k h(k-i) u(i)$$

CONVOLUZIONE

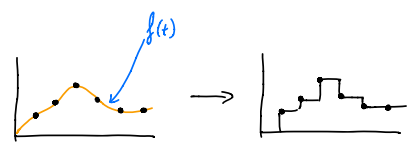
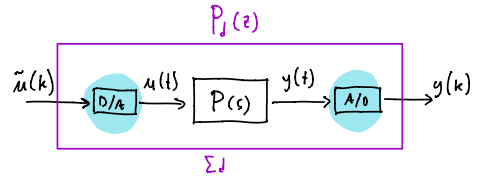
$$G_S = \mathcal{Z}(1)$$

QUADRATO STATICO

$$h(k) = \mathcal{Z}^{-1}[H(z)]$$

RISPOSTA A IMPULSO

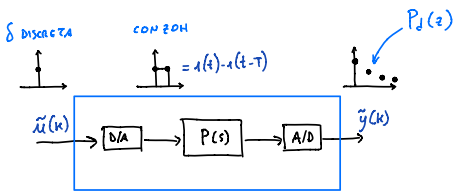
ZERO ORDER HOLD (ZOH)



$$\mathcal{Z}[f(t), T] \triangleq \mathcal{Z}[f(kT)]$$

DEFINIZIONE TRASFORMAZA Z
 SEGNALE CONTINUO
 CAMPIONATO

II PERIODO CAMPION. CAMPIONO F. CONTINUO



$$\mathcal{Z}[F(s), T] \triangleq \mathcal{Z}[\mathcal{Z}^{-1}[F(s)]_{t=kT}]$$

$$p_s(t) = \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{P(s)}{s}\right]$$

RISPOSTA A GRADINO

$$\tilde{y}(k) = p_s(kT) - p_s(kT-T)$$

POSIZIONE NEL SEGNALE CONTINUO

QUANDO INDICHIAMO Z DI OPERAZE F SOTTO LA STESSA COSA

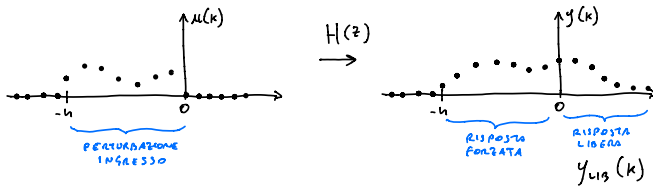
$$P_d(z) = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z}\left[\frac{P(s)}{s}, T\right]$$

SISTEMA REALE INTEGRA PER ZOH

TRASF Z RISPOSTA IMPULSO f APPLICATA A ZOH

- METODO
- USA FORMULA
 - $\mathcal{Z}^{-1} P/s \rightarrow p(t) \frac{k}{T}$
 - $\mathcal{Z} P(s) \rightarrow P(kT) \rightarrow P(z)$
 - CAMPIONA CON T
 - SIST. RETROAZ. $T(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)}$
 - $1+L(s) = 0 \rightarrow EQ.$
 - CRITERIO JURY 1, 2, 3

STABILITÀ



• STABILE	$y_{LIB}(k)$ LIMITATA	POLI DENTRO CIRCULO UNITARIO		MOLTIPLICAZIONE E FRAZIONARIA
• ASINT. STABILE	$\lim_{k \rightarrow \infty} y_{LIB}(k) = 0$			⇒ BIBO STABILE
• SEMP. STABILE	$\nexists \lim_{k \rightarrow \infty} y_{LIB}(k)$			DEVE ESISTERE
• INSTABILE				ESTERNO MOLTIPLICAZIONE

CRITERIO DI JURY PER STUDIARE STABILITÀ

$$a(z) = a_n z^n + \dots + a_0 \quad a_n > 0$$

PER AVERE RADICI $|p| < 1$ QUINDI UN SISTEMA STABILE

- ① $a(1) > 0$
 - ② $(-1)^n a(-1) > 0$
 - ③ $|a_0| < |a_n|$
- ④ CRITERIO
- $$\begin{cases} |b_0| > |b_{n-1}| \\ |c_1| > |c_{n-2}| \\ \vdots \end{cases} \quad \text{SOLO PER } n > 2$$

TABELLA

z^0	z^1	...	z^n
a_0	a_1	...	$a_{n-k} \dots a_n$
a_1	a_{n-k}	...	a_n
b_0	...		b_{n-1}
b_{k-1}			b_0

$b_k = \begin{vmatrix} a_0 & a_{4-k} \\ a_n & a_k \end{vmatrix}$

INUTILE CALCOLE QUI

RADICI MODULO < 1 SE

- $a(-1) \neq 0 \Rightarrow OK$
- ZERI DI $a\left(\frac{1+w}{1-w}\right)$ $Re < 0$

PERIODO CAMPIONAMENTO

ω_b → PULSAZIONE BANDÀ DESIDERATA

IN PRATICA $6 \leq \frac{\omega_b}{\omega_s} \leq 20$

$\omega_s \geq 2\omega_b$ → BANDÀ CAMPIONAMENTO (SHANNON)

$\omega_s = \frac{2\pi}{T}$ → TEMPO CAMPIONAMENTO (PERIODO)

CONVERSIONE CONTROLLER A → D

EULERO IN AVANTI

INDIETRO

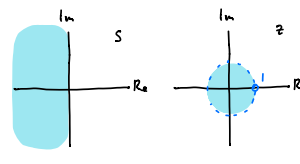
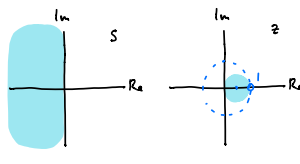
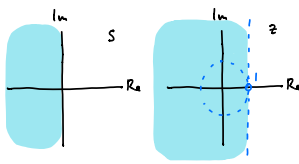
TUSTIN

$$s = \frac{z-1}{T}$$

$$s = \frac{z-1}{Tz}$$

$$s = \frac{z-1}{T(z+1)}$$

STABILE SE



SE $C(s)$ ASINT. STABILE, $C(z)$ PUÒ ESSERE INSTABILE

$C(s)$ ASINT. STABILE ⇒ $C(z)$ ASINT. STABILE