

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica, Elettronica e delle
Telecomunicazioni

Lezione n. 2 di Fondamenti di Controlli Automatici
prof. Aurelio Piazzì

**Modellistica ed equazioni differenziali
lineari**

Università degli Studi di Parma – a.a. 2014-2015

- Cenni di modellistica (circuiti elettrici e sistemi meccanici)
- L'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti quale **modello** di un sistema dinamico scalare

Cenni di Modellistica

Modellistica = costruzione dei modelli matematici dei sistemi

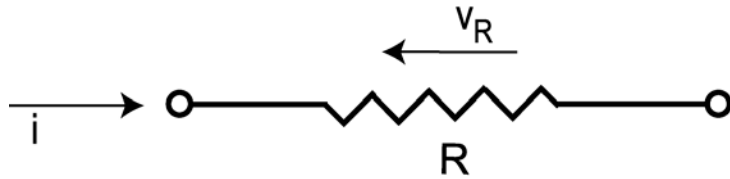
Modellistica:

1. a partire da leggi fondamentali  

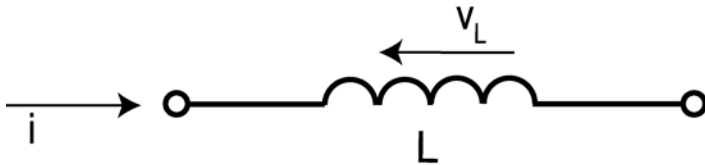
 2. a partire da dati sperimentali (identificazione)

Scegliendo il primo approccio riportiamo qualche cenno su circuiti elettrici e sistemi meccanici.

• Circuiti elettrici

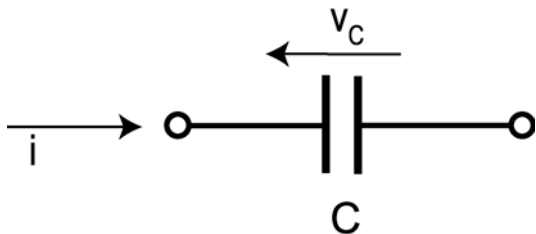


Resistenza: $v_R = Ri$



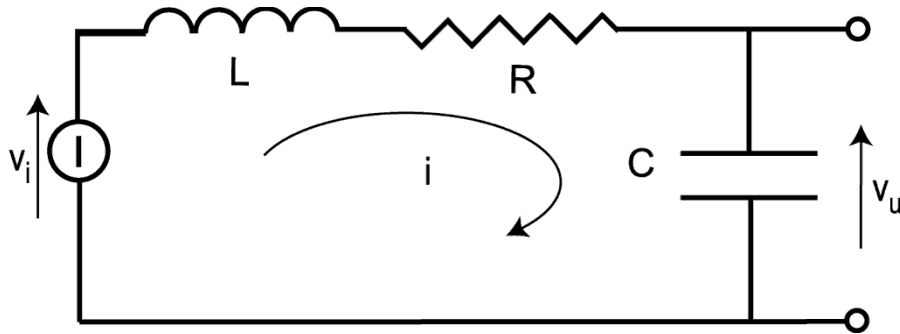
Induttanza: $v_L = L \frac{di}{dt} = LDi$

$D \equiv$ operatore derivata



Capacità: $v_C = \frac{Q}{C} = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau \Rightarrow Dv_C = \frac{i}{C}$

- Esempio: circuito RLC



$$v_i = v_L + v_R + v_C$$

$$v_i(t) = LDi(t) + Ri(t) + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau$$

Costruzione del m.m. del circuito RLC orientato da v_i (ingresso) ad i (uscita):



Eq. differenziale lineare a coefficienti costanti:

$$LD^2i + RDi + \frac{1}{C}i = Dv_i$$

Rappresentabile anche come:

$$\left(LD^2 + RD + \frac{1}{C} \right) i = Dv_i$$

Costruzione del m.m. del circuito RLC orientato da v_i (ingresso) ad v_u (uscita):

$$Dv_u = \frac{i}{C} \Rightarrow i = CDv_u$$

$$v_i = LD(CDv_u) + R(CDv_u) + v_u$$

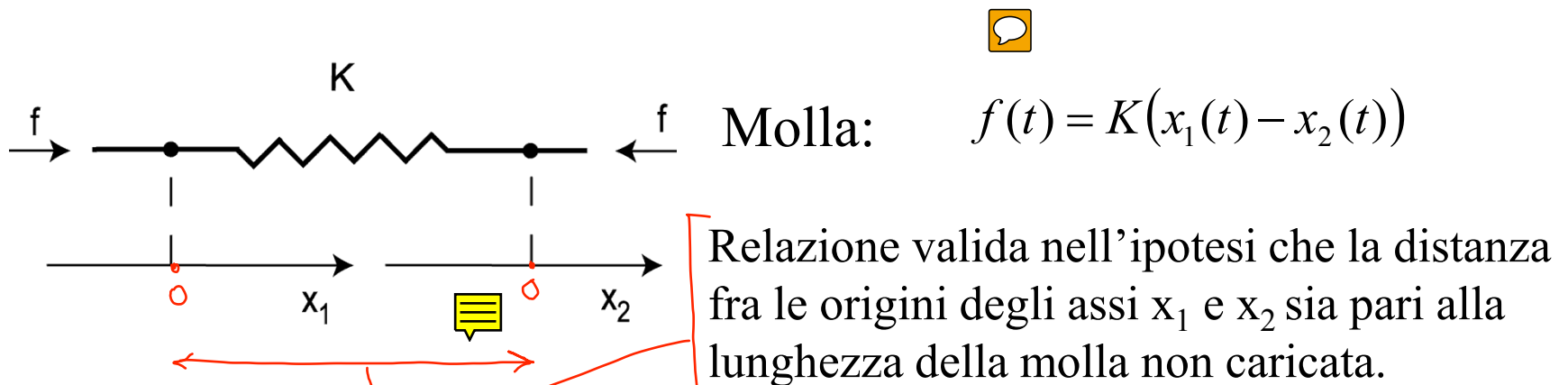
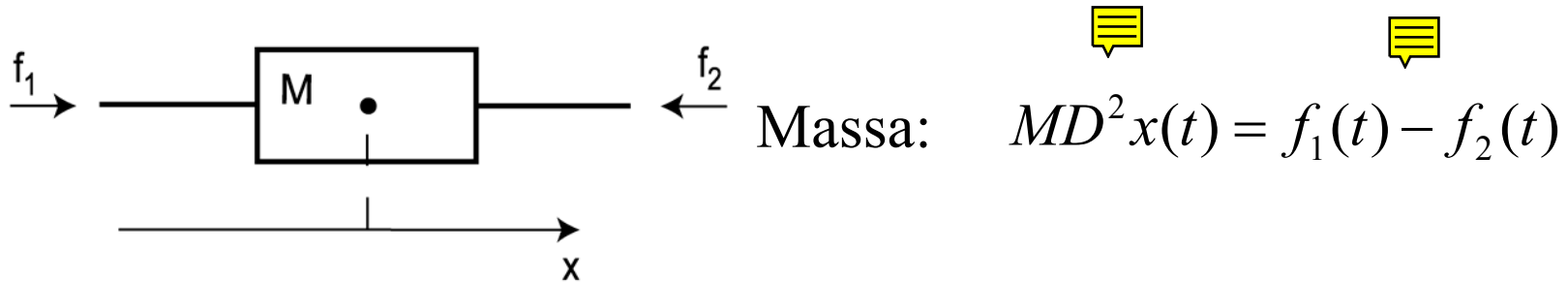


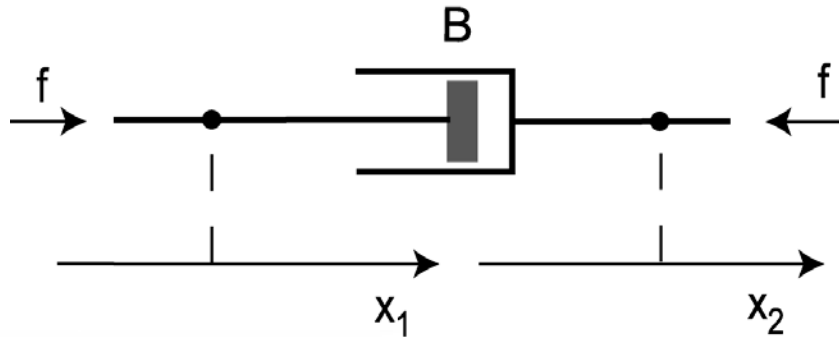
$$LCD^2v_u + RCDv_u + v_u = v_i$$

$$(LCD^2 + RCD + 1)v_u = v_i$$

- **Sistemi meccanici**

leggi del moto **unidimensionale** per “componenti” meccanici

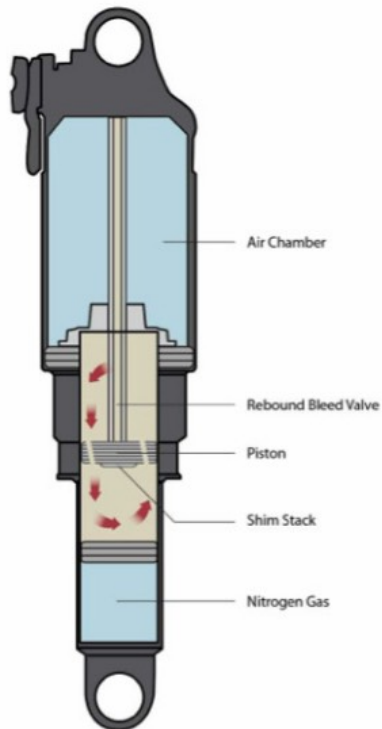




Ammortizzatore:

$$f(t) = B(v_1(t) - v_2(t))$$

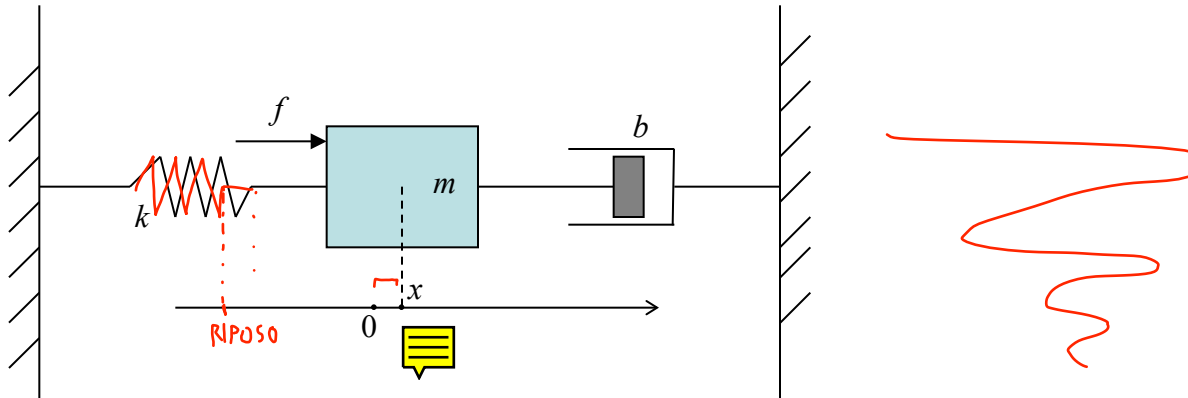
$$f(t) = BD(x_1(t) - x_2(t))$$



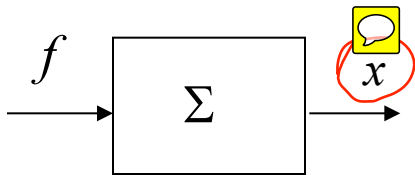
Legge che descrive un fenomeno di attrito viscoso: forza proporzionale alla velocità relativa ...

- Esempio: sistema meccanico vibrante

(quando il sistema è a riposo abbiamo $x = 0$)



$$mD^2x(t) = -kx(t) - bDx(t) + f(t)$$



equazione del sistema orientato da f ad x :

$$mD^2x(t) + bDx(t) + kx(t) = f(t)$$

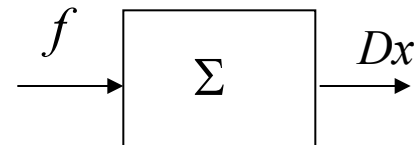
Equazione diff. del sistema orientato da f (forza applicata) a Dx (velocità della massa):

$$mD^3x + bD^2x + kDx = Df$$

$$y := Dx$$

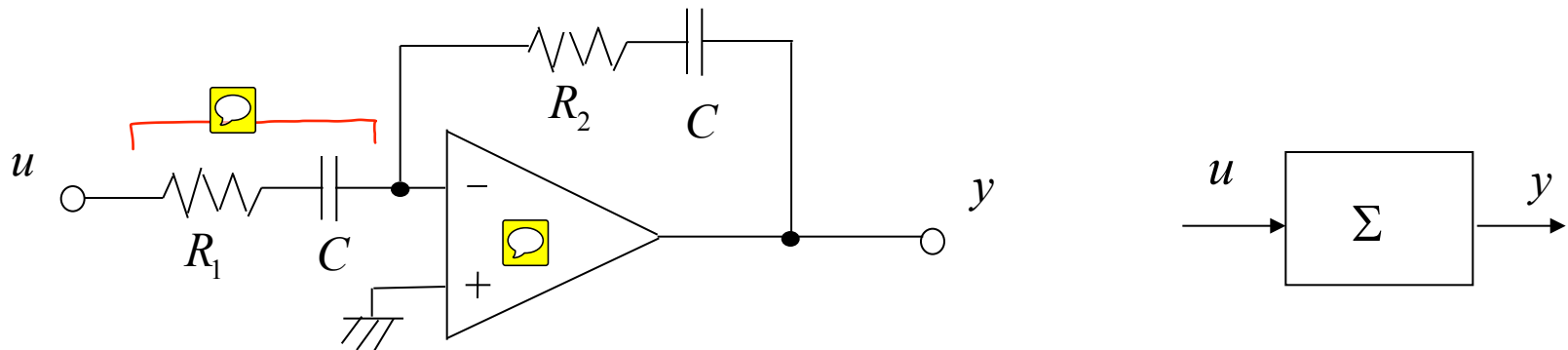


$$mD^2y + bDy + ky = Df$$



- **Circuiti elettrici con amplificatori operazionali**

Esempio:



u è la tensione in ingresso (variabile manipolabile o indipendente)

y è la tensione in uscita (variabile dipendente)

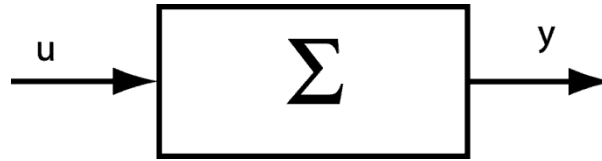
Si può dedurre

$$R_1 C D y + y = -R_2 C D u - u$$



Equazioni differenziali lineari

- Sistemi scalari rappresentati da eq. differenziali lineari a coefficienti costanti



$$a_n D^n y + a_{n-1} D^{n-1} y + \dots + a_1 D y + a_0 y = b_m D^m u + \dots b_1 D u + b_0 u$$

$$\sum_{i=0}^n a_i D^i y = \sum_{i=0}^m b_i D^i u \quad \Rightarrow$$

È un modello matematico formale del **sistema dinamico** (orientato) Σ , y = variabile d'uscita, u = variabile d'ingresso; $a_n \neq 0$, $b_m \neq 0$.

n = ordine dell'eq. diff., per estensione ordine di Σ , $n \geq m$;

$\rho := n - m$ ordine relativo o grado relativo di Σ .



- Insieme dei behaviors $\mathcal{B}$ di Σ :

$\mathcal{B} := \{(u(t), y(t)) : \text{la coppia dei segnali causa-effetto "soddisfa"}\}$ 

$$\left. \text{l'equazione differenziale } \sum_{i=0}^n a_i D^i y = \sum_{i=0}^m b_i D^i u \right\}$$

Se $u(t)$ e $y(t)$ sono derivabili tante volte quanto necessario

$$(u(\cdot) \in C^m \text{ e } y(\cdot) \in C^n)$$

"soddisfa" significa: 

$$\sum_{i=0}^n a_i D^i y(t) = \sum_{i=0}^m b_i D^i u(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

•**Proprietà:** Il sistema Σ è lineare.

Dim.

Siano $(u_i(\cdot), y_i(\cdot)) \in \mathcal{B}$, $i = 1, 2$. Allora $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ segue:

$$(\alpha_1 u_1(t) + \alpha_2 u_2(t), \alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t)) \in \mathcal{B}$$

Infatti (per semplicità $n = 1$, $m = 0$):

$$\begin{cases} a_1 D y_1(t) + a_0 y_1(t) = b_0 u_1(t) \\ a_1 D y_2(t) + a_0 y_2(t) = b_0 u_2(t) \end{cases}$$

$$\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} : \begin{cases} a_1 D [\alpha_1 y_1(t)] + a_0 [\alpha_1 y_1(t)] = b_0 [\alpha_1 u_1(t)] \\ a_1 D [\alpha_2 y_2(t)] + a_0 [\alpha_2 y_2(t)] = b_0 [\alpha_2 u_2(t)] \end{cases}$$

sommando le equazioni:

$$a_1 D [\alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t)] + a_0 [\alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t)] = b_0 [\alpha_1 u_1(t) + \alpha_2 u_2(t)]$$

$$\Rightarrow (\alpha_1 u_1(t) + \alpha_2 u_2(t), \alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t)) \in \mathcal{B}$$

□

•**Proprietà:** Il sistema Σ è stazionario.

Dim. $(u(t), y(t)) \in \mathcal{B} \Rightarrow (u(t-T), y(t-T)) \in \mathcal{B} \quad \forall T \in \mathbb{R}$

Infatti (ancora per semplicità $n = 1, m = 0$):

$$a_1 \frac{d}{d\tau} y(\tau) + a_0 y(\tau) = b_0 u(\tau) \quad \forall \tau \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \forall t, T \in \mathbb{R} : \quad a_1 \frac{d}{d\tau} y(t-T) + a_0 y(t-T) = b_0 u(t-T)$$

$$\frac{d}{dt} y(t-T) = \frac{d}{d\tau} y(\tau) \Big|_{\tau=t-T} \cdot \frac{d\tau}{dt} = \frac{d}{d\tau} y(t-T)$$

$$\Rightarrow a_1 \frac{d}{dt} y(t-T) + a_0 y(t-T) = b_0 u(t-T) \quad \forall t, T \in \mathbb{R} \quad \square$$

Un problema fondamentale nell'analisi di un sistema Σ :

Noto il segnale di ingresso $u(t)|_{[0,+\infty)}$
e le condizioni iniziali $y(0), Dy(0), \dots, D^{n-1}y(0)$
determinare il segnale di uscita $y(t)|_{[0,+\infty)}$.

•Esempi: Σ definito da $Dy(t) - y(t) = u(t)$

1) $u(t) = 0, t \geq 0$ e $y(0) = 1$ (eq. omogenea)

$y(t) = ce^t, c \in \mathbb{R}$ (insieme di tutte le soluzioni)

$$y(0) = 1 \Rightarrow c = 1$$

Soluzione: $y(t) = e^t, t \geq 0$.

2) $u(t) = 5, t \geq 0$ e $y(0) = 1$ (eq. non omogenea)

Individuata una soluzione particolare $y_p(t)$

$y(t) = ce^t + y_p(t), c \in \mathbb{R}$ è l'insieme di tutte le soluzioni.

$$y_p(t) ? \Rightarrow y_p(t) = -5 \Rightarrow y(t) = ce^t - 5$$

$$y(0) = 1 \Rightarrow c - 5 = 1 \Rightarrow c = 6$$

Soluzione: $y(t) = 6e^t - 5, t \geq 0$.

•Esempio:

Σ definito da $D^2 y(t) + 3Dy(t) + 2y(t) = u(t)$

Noto $u(t)$, $t \geq 0$

e le condizioni iniziali $y(0) = 1$ e $Dy(0) = 1$

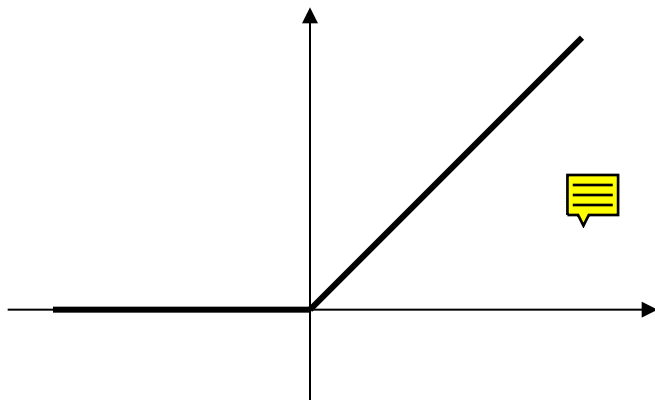
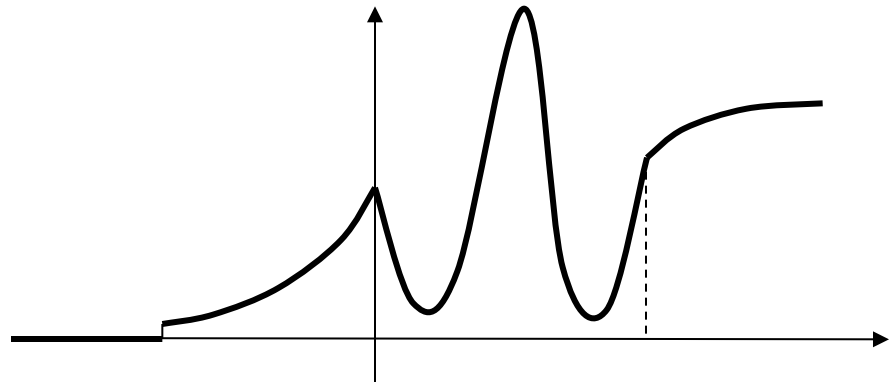
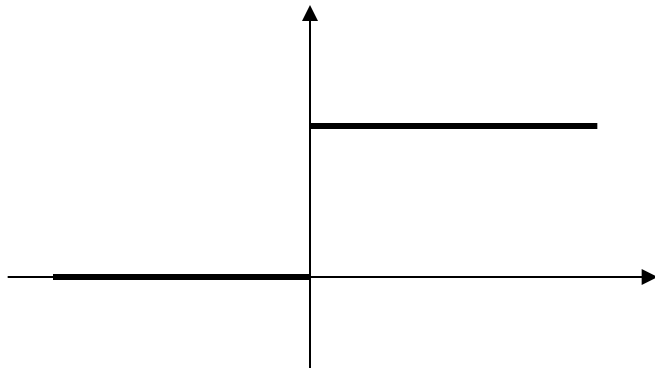
trovare $y(t)$, $t \geq 0$?



Emerge la necessità di:

- 1) disporre di un metodo generale per determinare il segnale di uscita noto il segnale di ingresso e le condizioni iniziali;
- 2) trattare anche il caso di segnali di ingresso e uscita continui e derivabili a tratti.

Esempi di segnali $u(t)$ per il controllo attivo:



La classe dei segnali con cui lavoreremo è

$PC^\infty \equiv$ Insieme delle funzioni a tratti indefinitamente derivabili
(*piecewise C^∞ -functions* or *piecewise smooth functions*)

Definizione:

PC^∞ è l'insieme di tutte le funzioni $f : \mathbb{R} - \{t_1, t_2, \dots, t_k, \dots\} \rightarrow \mathbb{R}$
tali che

1. $f \in C^\infty(\mathbb{R} - \{t_1, t_2, \dots, t_k, \dots\})$
2. $\exists$ i limiti (finiti) $\lim_{t \rightarrow t_k^-} D^i f(t)$ e $\lim_{t \rightarrow t_k^+} D^i f(t)$, $i = 0, 1, \dots$ 

- L'insieme $\{t_1, t_2, \dots, t_k, \dots\}$ può avere cardinalità finita, infinita od essere l'insieme vuoto. Quest'ultimo caso significa che $C^\infty(\mathbb{R}) \subset PC^\infty$.
- Negli istanti di discontinuità t_k la funzione f o una sua derivata $D^i f$ può essere o non essere definita.

I t_k sono istanti di possibile discontinuità per $f(t) \in PC^\infty$ e le sue derivate.



Se $f(t_k-) \neq f(t_k+)$ la fun. è discontinua in t_k ed ha qui il "salto" $f(t_k+) - f(t_k-)$

Se $f(t_k-) = f(t_k+)$ si può definire $f(t_k) := f(t_k-)$ e la fun. è continua in t_k .



Se $f^{(i)}(t_k-) \neq f^{(i)}(t_k+)$ con $i \geq 1$ la fun. derivata $f^{(i)}(t)$ è discontinua in t_k

ed ha qui il "salto" $f^{(i)}(t_k+) - f^{(i)}(t_k-)$

Se $f^{(i)}(t_k-) = f^{(i)}(t_k+)$ con $i \geq 1$ può accadere:

- esiste la derivata di ordine i -esimo in t_k e $f^{(i)}(t_k) = f^{(i)}(t_k-) = f^{(i)}(t_k+)$
- non esiste la derivata di ordine i -esimo in t_k

Esempio:

$$f(t) = \begin{cases} \cos t & t < 0 \\ 1 + \cos t & t \geq 0 \end{cases}$$

$f^{(i)}(0-) = f^{(i)}(0+)$, $i = 1, 2, \dots$ ma $f(t)$ non è derivabile in $t = 0$.

Proprietà di PC^∞



Se $f(t) \in PC^\infty \Rightarrow Df(t) \in PC^\infty$ ed anche $\forall a \in \mathbb{R}, \int_a^t f(v)dv \in PC^\infty$.

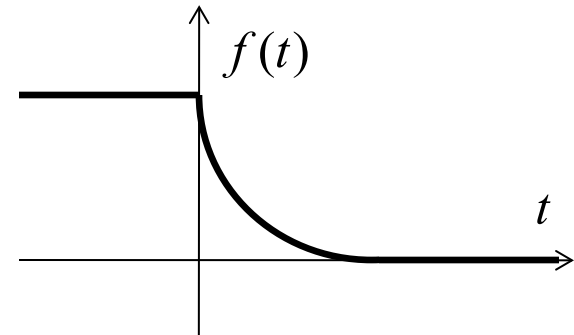
$$C^\infty \subset \dots \subset C^k \subset C^{k-1} \subset \dots \subset C^1 \subset C^0$$



e $C^\infty \subset PC^\infty$ ma in generale $\forall k \in \mathbb{N}, C^k \not\subset PC^\infty$

Esempio:

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{per } t < 0 \\ 1 - \sqrt{1 - (t-1)^2} & \text{per } t \in [0, 1] \\ 0 & \text{per } t > 1 \end{cases} ; \quad f \in C^0 \wedge f \notin PC^\infty$$



Considereremo la classe

$$C^k \cap PC^\infty = \{f \in PC^\infty : f(t) \text{ è derivabile con derivata continua fino all'ordine } k\}$$

$$C^{k,\infty} := C^k \cap PC^\infty$$



$$C^\infty \subset \dots \subset C^{k,\infty} \subset C^{k-1,\infty} \subset \dots \subset C^{1,\infty} \subset C^{0,\infty} \subset PC^\infty$$

Grado di continuità di una funzione o segnale

definizioni

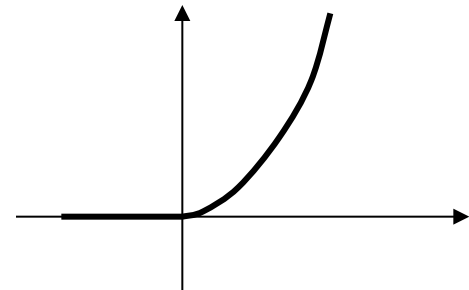
Se $f \in C^{k,\infty}$, k è il grado di continuità di f .

$$\overline{C^{k,\infty}} := \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f \in C^{k,\infty} \wedge f \notin C^{k+1,\infty} \right\}$$

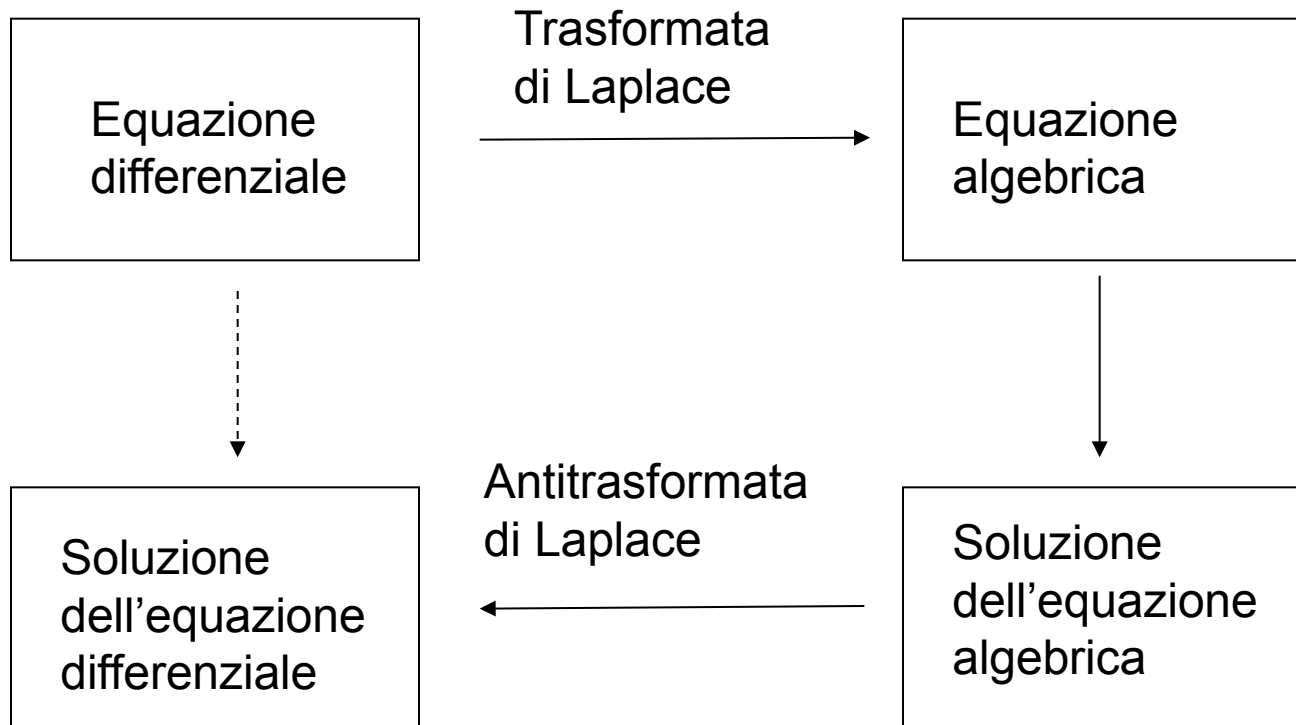
Se $f \in \overline{C^{k,\infty}}$ allora k è il grado massimo di continuità di f .

Esempio:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t^3 & t \geq 0 \end{cases}, f \in C^{0,\infty}, C^{1,\infty}, C^{2,\infty}, \overline{C^{2,\infty}}$$



- Il metodo generale proposto per “integrare” l’equazione differenziale di Σ si basa sulla **trasformata di Laplace**.
- La comprensione del metodo della trasformata di Laplace richiede l’introduzione di cenni di teoria delle funzioni complesse di variabile complessa (**analisi matematica complessa**)



I concetti introdotti dalla lezione:

- Le leggi elementari per la modellistica elettrica e dei componenti meccanici.
- L'equazione differenziale lineare quale modello matematico di un sistema dinamico orientato.
- L'insieme dei behaviors.
- Il problema della determinazione dell'uscita di Σ noto l'ingresso e le condizioni iniziali.
- La classe delle funzioni a tratti indefinitivamente derivabili.
- Grado di continuità di un segnale.