

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica, Elettronica e delle
Telecomunicazioni

Lezione n. 3 di Fondamenti di Controlli Automatici
prof. Aurelio Piazzì

Cenni di analisi complessa

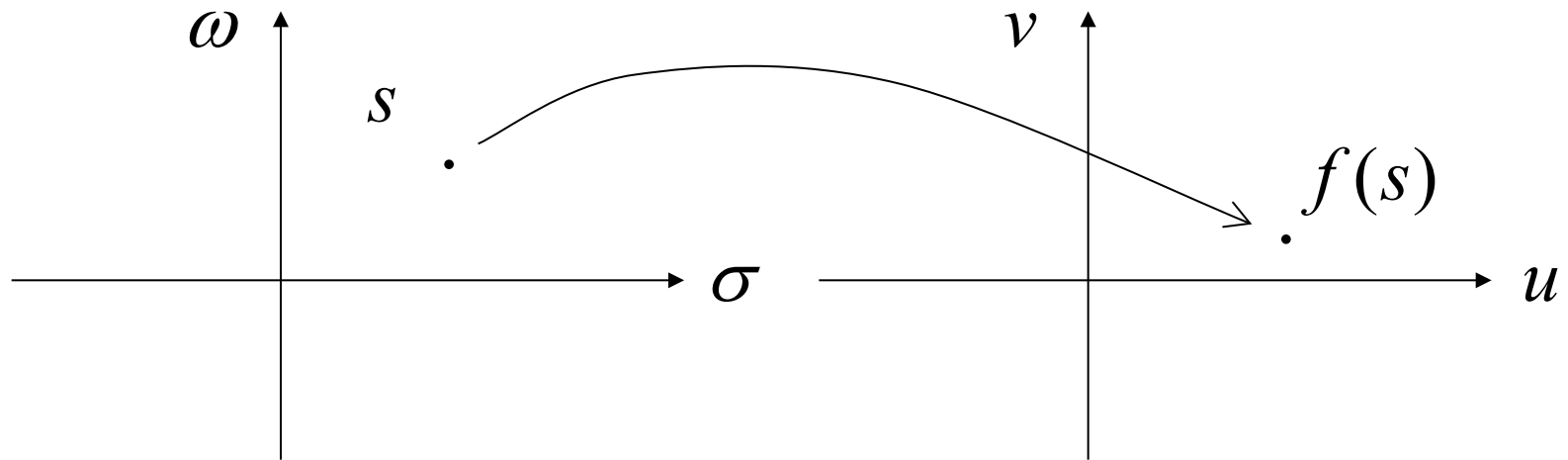
Università degli Studi di Parma – a.a. 2014-2015

Funzione complessa di variabile complessa

$$f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$s \rightarrow f(s)$$

$$\text{Se } s = \sigma + j\omega \Rightarrow f(s) = u(\sigma, \omega) + jv(\sigma, \omega)$$



AAA 4!!

Definizione di limite: $\lim_{s \rightarrow s_0} f(s) = \lambda$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \rho > 0$ tale che

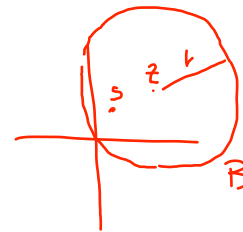
se s soddisfa $0 < |s - s_0| < \rho \Rightarrow |f(s) - \lambda| < \varepsilon$

Interpretazione geometrica:

Sia $B(z, r) := \{s \in \mathbb{C} : |s - z| < r\}$

(cerchio aperto di raggio r , centrato in z)

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \rho > 0$ tale che $f(B(s_0, \rho) - \{s_0\}) \subseteq B(\lambda, \varepsilon)$



Def. **Continuità**

$f(s)$ è continua in $s = s_0$ se $\lim_{s \rightarrow s_0} f(s) = f(s_0)$

Lemma

$f(s)$ è continua in $s_0 = \sigma_0 + j\omega_0$ se e solo se
le funzioni reali $u(\sigma, \omega), v(\sigma, \omega)$ sono continue in (σ_0, ω_0) .

Esempi:

$f(s) = 4s^2 + 5s + 3$ è continua su $\mathbb{C}$.

$f(s) = \frac{1}{s-1}$ è continua su $\mathbb{C} - \{1\}$.

Def. **Derivabilità**

$f(s)$ è derivabile in $s = s_0$ se esiste il limite

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{f(s_0 + \Delta s) - f(s_0)}{\Delta s}$$

Questo limite viene indicato con le notazioni $f'(s_0)$, $f^{(1)}(s_0)$, $\frac{df}{ds}(s_0)$, $Df(s_0)$.

Le regole base di derivabilità già note dall'analisi reale rimangono valide.

Esempi:

$$f(s) = 4s^2 + 5s + 3 \quad \Rightarrow \quad Df(s) = 8s + 5 \quad [f(s) \text{ è derivabile su } \mathbb{C}]$$

$$f(s) = \frac{1}{s-1} \quad \Rightarrow \quad Df(s) = -\frac{1}{(s-1)^2} \quad [f(s) \text{ è derivabile su } \mathbb{C} - \{1\}]$$

Def. **Analiticità**



$f(s)$ è **analitica** (o **olomorfa**) in $s = s_0$
se $f(s)$ è derivabile su di un intorno aperto contenente s_0 .

Esempi: $f(s) = 4s^2 + 5s + 3$ è analitica su $\mathbb{C}$; $f(s) = \frac{1}{s-1}$ analitica su $\mathbb{C} - \{1\}$.

$f(s) = |s|^2$ è derivabile in $s = 0$ ma non è analitica in $s = 0$.

Infatti

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{|\Delta s|^2 - |0|^2}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{|\Delta s|^2}{\Delta s} = \quad (\Delta s := re^{j\varphi})$$

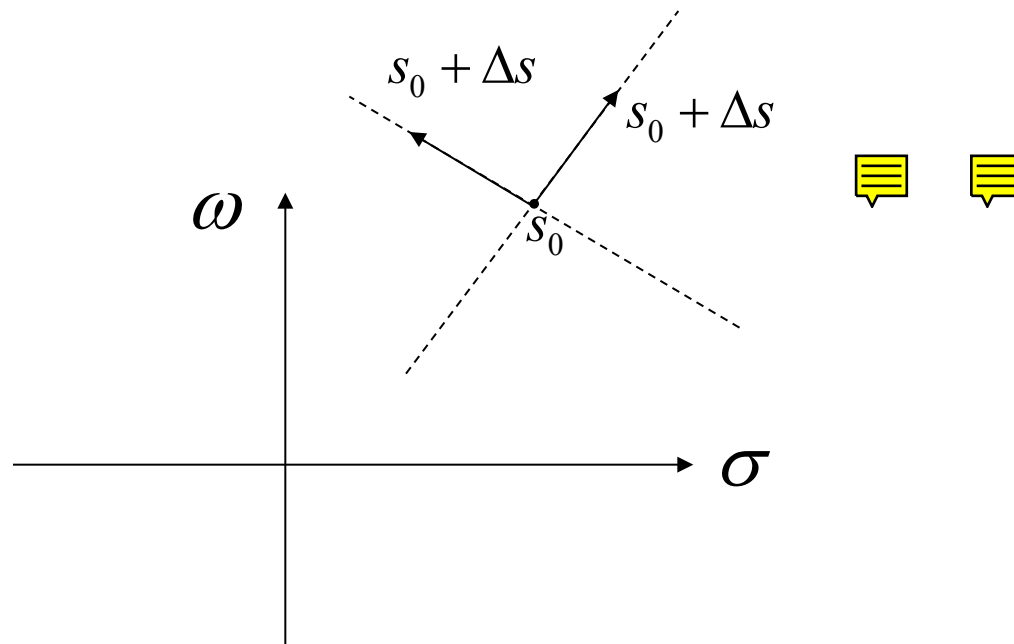
$$= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{|re^{j\varphi}|^2}{re^{j\varphi}} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^2}{re^{j\varphi}} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r}{e^{j\varphi}} = 0 \quad \forall \varphi$$

Non è analitica perchè...

Sia $f(s)$ derivabile in $s = s_0$:

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{f(s_0 + \Delta s) - f(s_0)}{\Delta s} = f^{(1)}(s_0)$$

Questo limite sussiste per ogni direzione di convergenza a zero di Δs :



Calcoliamo $f^{(1)}(s_0)$ con $\Delta s = \Delta \sigma \in \mathbb{R}$ e $\Delta s = j\Delta\omega \in j\mathbb{R}$ ($\Delta\omega \in \mathbb{R}$):



$s_0 = \sigma_0 + j\omega_0$ od anche $s_0 \equiv (\sigma_0, \omega_0)$

$$f^{(1)}(s_0) = \lim_{\Delta\sigma \rightarrow 0} \frac{f(s_0 + \Delta\sigma) - f(s_0)}{\Delta\sigma} =$$



$\rightarrow \Delta s$

$$= \lim_{\Delta\sigma \rightarrow 0} \frac{u(\sigma_0 + \Delta\sigma, \omega_0) + jv(\sigma_0 + \Delta\sigma, \omega_0) - u(\sigma_0, \omega_0) - jv(\sigma_0, \omega_0)}{\Delta\sigma} =$$

$$= \frac{\partial u}{\partial \sigma}(s_0) + j \frac{\partial v}{\partial \sigma}(s_0)$$



$$f^{(1)}(s_0) = \lim_{j\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{f(s_0 + j\Delta\omega) - f(s_0)}{j\Delta\omega} =$$

Δs $\uparrow$ j

$$= \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{u(\sigma_0, \omega_0 + \Delta\omega) + jv(\sigma_0, \omega_0 + \Delta\omega) - u(\sigma_0, \omega_0) - jv(\sigma_0, \omega_0)}{j\Delta\omega} =$$

$$= \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{jv(\sigma_0, \omega_0 + \Delta\omega) - u(\sigma_0, \omega_0 + \Delta\omega) - jv(\sigma_0, \omega_0) + u(\sigma_0, \omega_0)}{-\Delta\omega} =$$

$$= \frac{\partial v}{\partial \omega}(s_0) - j \frac{\partial u}{\partial \omega}(s_0)$$



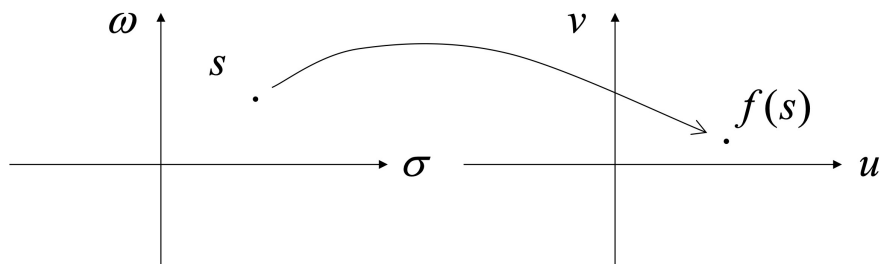
Quindi $\frac{\partial u}{\partial \sigma}(s_0) + j \frac{\partial v}{\partial \sigma}(s_0) = \frac{\partial v}{\partial \omega}(s_0) - j \frac{\partial u}{\partial \omega}(s_0)$ da cui si ottiene

$$\frac{\partial u}{\partial \sigma}(s_0) = \frac{\partial v}{\partial \omega}(s_0) \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial \omega}(s_0) = -\frac{\partial v}{\partial \sigma}(s_0) \quad \text{☞}$$

Def. **Condizioni di Cauchy-Riemann**

$u(\sigma, \omega), v(\sigma, \omega)$ soddisfano le condizioni (equazioni) di Cauchy-Riemann se

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \sigma} = \frac{\partial v}{\partial \omega} \\ \frac{\partial u}{\partial \omega} = -\frac{\partial v}{\partial \sigma} \end{cases}$$



$$\begin{aligned} \rightarrow / \rightarrow &= \uparrow / \uparrow \\ \rightarrow / \uparrow &= \downarrow / \rightarrow \end{aligned}$$

Teorema

Sia $f(s) = u(s) + jv(s)$. 

1. Se esiste $f^{(1)}(s_0)$ con $s_0 = \sigma_0 + j\omega_0$ allora esistono le derivate parziali di $u(\sigma, \omega)$ e $v(\sigma, \omega)$ in (σ_0, ω_0)  e soddisfano le condizioni di Cauchy-Riemann.
2. Se $u(\sigma, \omega)$ e $v(\sigma, \omega)$ e le loro derivate parziali sono  continue in (σ_0, ω_0) e soddisfano le condizioni di Cauchy-Riemann, allora esiste $f^{(1)}(s_0)$ con $s_0 = \sigma_0 + j\omega_0$.

Ritorniamo all'esempio $f(s) = |s|^2 = \sigma^2 + \omega^2$

$$\Rightarrow u = \sigma^2 + \omega^2, \quad v = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial \sigma} = 2\sigma, \quad \frac{\partial v}{\partial \omega} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial \omega} = 2\omega, \quad -\frac{\partial v}{\partial \sigma} = 0$$

$$\begin{cases} 2\sigma = 0 \\ 2\omega = 0 \end{cases}$$

$f(s)$ è derivabile solo in $0 + j0$

e quindi in $s = 0$ non può essere analitica.

Corollario

Sia $f(s) = u(s) + jv(s)$ con $u(\sigma, \omega)$, $v(\sigma, \omega)$ e le loro derivate parziali continue su di un dominio aperto $U \subseteq \mathbb{C}$. Allora $f(s)$ è analitica su U se e solo se $u(\sigma, \omega)$, $v(\sigma, \omega)$ soddisfano, su U , le condizioni di Cauchy-Riemann.

Teorema

Sia $f(s)$ analitica su di una regione aperta $U \subseteq \mathbb{C}$.

Allora la derivata $Df(s)$ è anch'essa una funzione analitica su U .

Corollario

Se $f(s)$ è analitica sulla regione aperta U
allora $f(s)$ è ivi derivabile indefinitamente.

Integrali di linea nel piano complesso

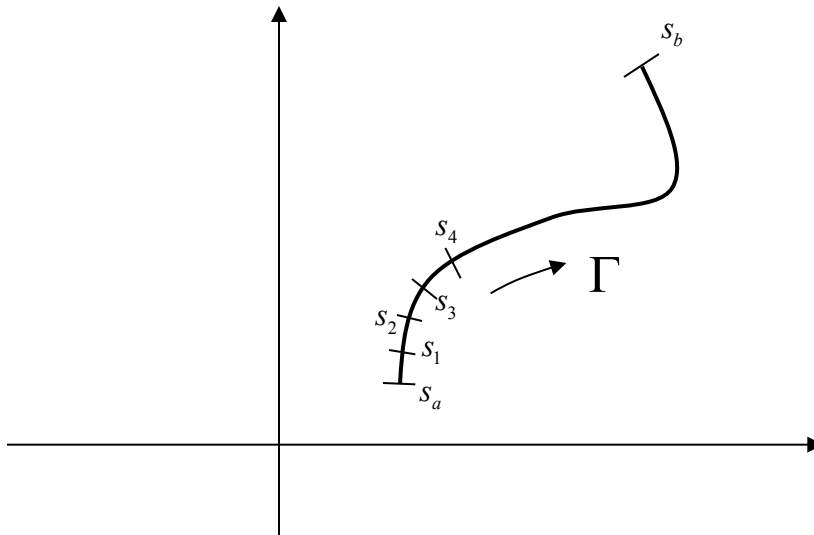
Def. **Integrale**

Data una funzione $f(s)$ ed una curva Γ su $\mathbb{C}$, percorsa da s_a a s_b , definiamo

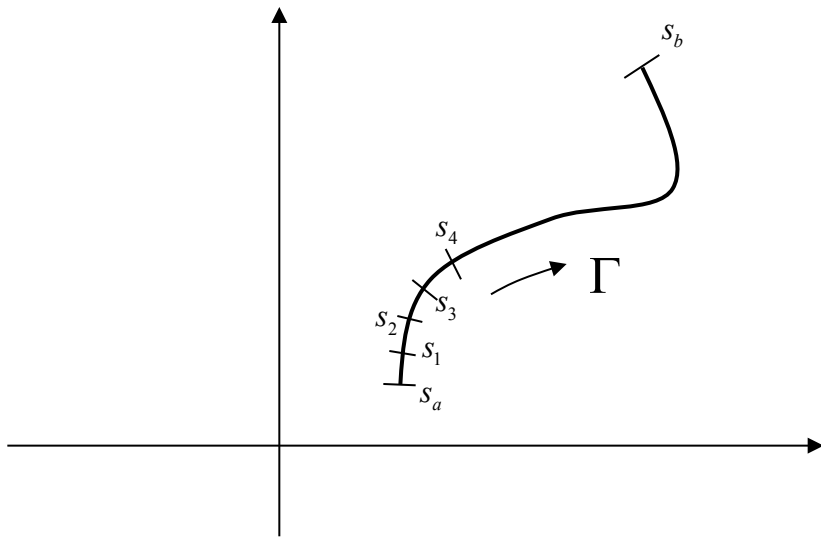
$$\int_{\Gamma} f(s) ds \triangleq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(s_i) (s_i - s_{i-1})$$



dove $s_0, s_1, \dots, s_n$ ($s_0 = s_a, s_n = s_b$) è una discretizzazione uniforme della curva Γ .



Calcolo dell'integrale di linea



Sia Γ una curva parametrica
di classe C^1 :

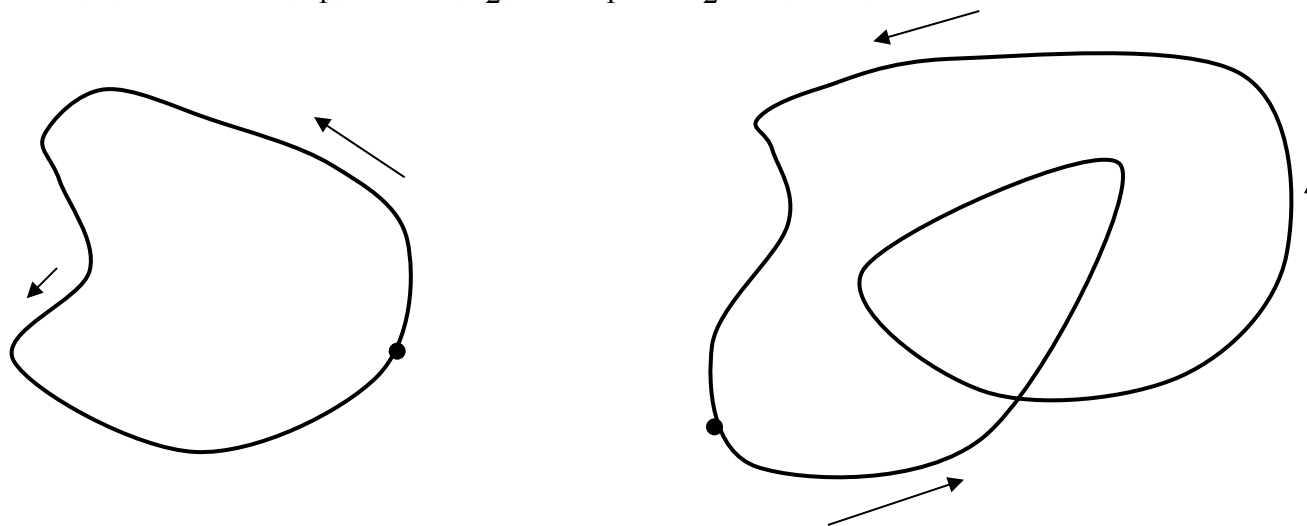
$$\Gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$u \rightarrow \Gamma(u)$$

$$\int_{\Gamma} f(s) ds = \int_a^b f(\Gamma(u)) \frac{d\Gamma}{du} du$$

Def. **Curva chiusa semplice**

Una curva continua $\Gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, $u \rightarrow \Gamma(u)$ è curva chiusa semplice se $\Gamma(a) = \Gamma(b)$ e $\Gamma(u_1) \neq \Gamma(u_2) \ \forall u_1 \neq u_2 \in (a, b)$. 



Teorema di Jordan

Se Γ è una curva chiusa semplice in $\mathbb{C}$ questa suddivide il piano complesso in due regioni distinte, una esterna ed una interna.

$$[\mathbb{C} - \Gamma = E \cup I, \quad E \cap I = \emptyset, \quad \partial E = \partial I = \Gamma] \quad \text{$$

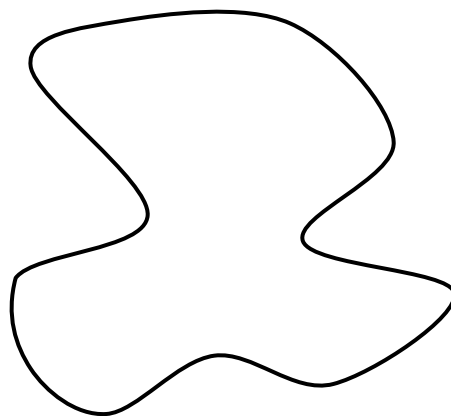
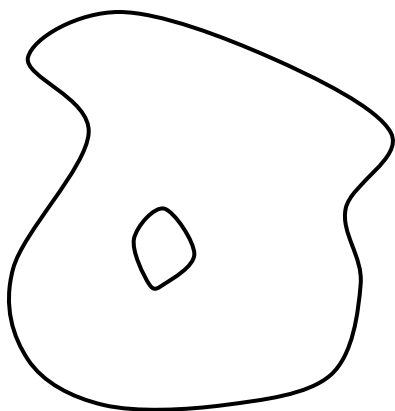


Def. **Insieme connesso**

Un insieme $R \subseteq \mathbb{C}$ è connesso se per ogni coppia di punti appartenenti all'insieme esiste una curva continua Γ che li congiunge tutta contenuta in R [$\Gamma \subseteq R$].

Def. **Insieme semplicemente connesso**

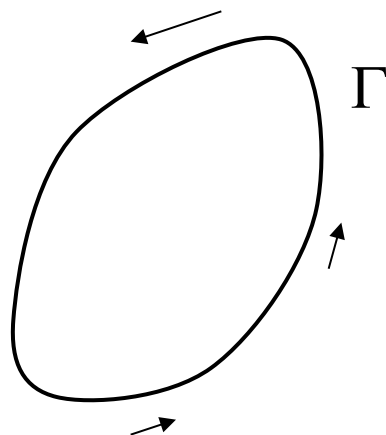
Un insieme $R \subseteq \mathbb{C}$ è semplicemente connesso se è connesso e per ogni curva chiusa semplice Γ appartenente all'insieme la regione interna di Γ è tutta contenuta in R .



Teorema dell'integrale di Cauchy

Sia $f(s)$ una funzione analitica su di una regione aperta e semplicemente connessa U e Γ una curva chiusa semplice ivi contenuta.

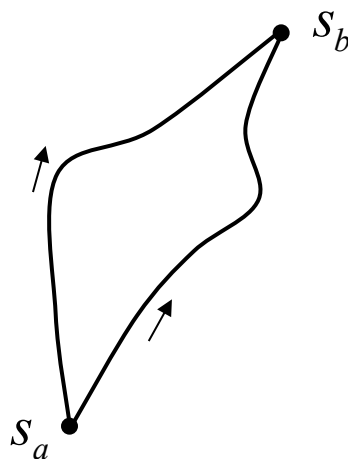
Allora $\oint_{\Gamma} f(s)ds = 0$ 



Corollario

Sia $f(s)$ una funzione analitica su di una regione aperta e semplicemente connessa U e Γ una curva ivi contenuta che congiunge s_a ad s_b . Allora l'integrale di linea $\int_{\Gamma} f(s)ds$ non dipende dal percorso Γ ma solo da s_a, s_b e $f(s)$:

$$\int_{\Gamma} f(s)ds = \int_{s_a}^{s_b} f(s)ds$$



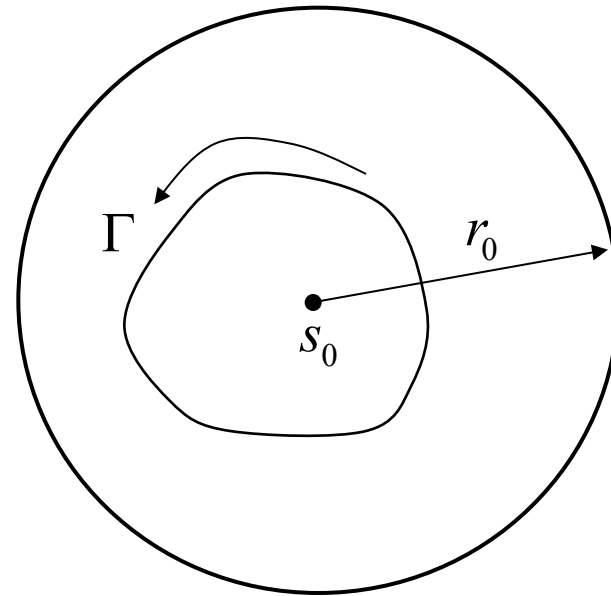
Teorema – Sviluppo in Serie di Taylor

Sia $f(s)$ una funzione analitica su di un cerchio $B(s_0, r_0)$ centrato su s_0 e con raggio r_0 . Allora $\forall s \in B(s_0, r_0)$

$$f(s) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i (s - s_0)^i = c_0 + c_1 (s - s_0) + c_2 (s - s_0)^2 + \cdots + c_i (s - s_0)^i + \cdots$$

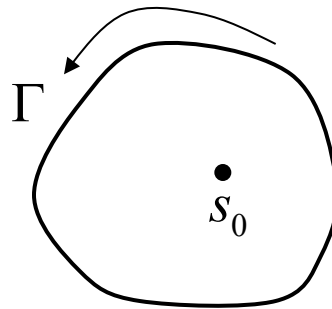
dove $(i = 0, 1, \dots)$

$$c_i = \frac{f^{(i)}(s_0)}{i!} = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \frac{f(s)}{(s - s_0)^{i+1}} ds.$$



Corollario – Formula integrale di Cauchy

$$f(s_0) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \frac{f(s)}{s - s_0} ds.$$



$$f(s) = c_0 + c_1(s - s_0) + c_2(s - s_0)^2 + \cdots + c_i(s - s_0)^i + \cdots$$
$$c_i = \frac{f^{(i)}(s_0)}{i!}, \quad i \in \mathbb{N}$$

Esempio

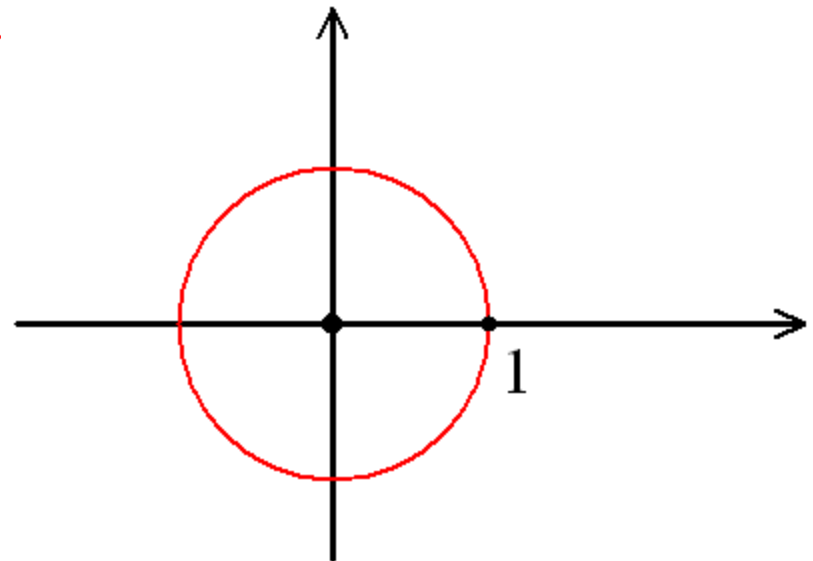
$$f(s) = \frac{1}{1-s}$$

Sviluppiamo $f(s)$ in serie di Taylor in un intorno dell'origine ($s_0 = 0$).

$f(s)$ è analitica in $B(0,1) = \{s \in \mathbb{C} : |s| < 1\}$.

$$f^{(i)}(s) = \frac{i!}{(1-s)^{i+1}} \Rightarrow f^{(i)}(0) = i!$$

$$f(s) = 1 + s + s^2 + s^3 + s^4 + s^5 + s^6 + \cdots$$



Teorema – Sviluppo in Serie di Laurent

Sia $f(s)$ una funzione analitica sul cerchio $B(s_0, r_0)$ ad eccezione del suo centro s_0 .

Allora $\forall s \in B(s_0, r_0) - \{s_0\}$

$\mathbb{Z}^-$

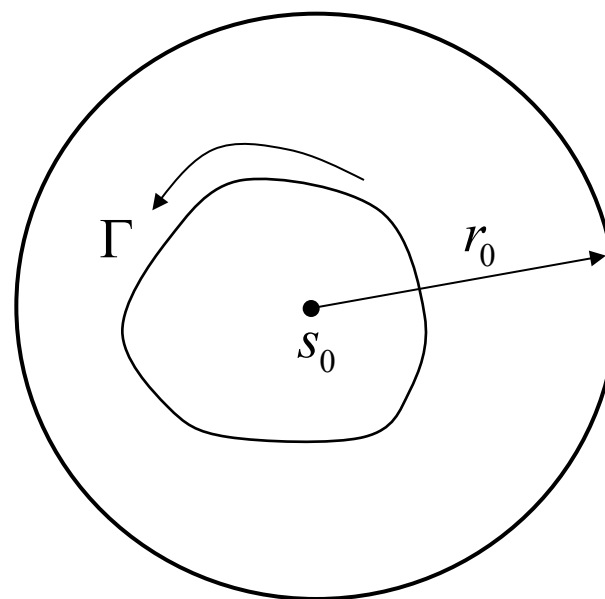


$\mathbb{Z}^+$

$$f(s) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} c_i (s - s_0)^i = \cdots + \frac{c_{-2}}{(s - s_0)^2} + \frac{c_{-1}}{(s - s_0)} + c_0 + c_1 (s - s_0) + c_2 (s - s_0)^2 + \cdots$$

dove

$$c_i = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \frac{f(s)}{(s - s_0)^{i+1}} ds \quad \forall i \in \mathbb{Z}.$$



$$f(s) = \dots + \frac{c_{-2}}{(s-s_0)^2} + \frac{c_{-1}}{(s-s_0)} + c_0 + c_1(s-s_0) + c_2(s-s_0)^2 + \dots$$

Classificazione del punto isolato s_0 :

- Se $c_i = 0 \quad \forall i \in \mathbb{Z}^-$ ($i = -1, -2, \dots$) 

definendo $f(s_0) = c_0$ risulta $f(s)$ analitica in $s = s_0$.

Es.: $f(s) = \frac{(s-1)(s+3)}{(s-1)(s-2)(s+1)}$, $f(s) = -2 - \frac{3}{2}(s-1) - \frac{7}{4}(s-1)^2 + \dots$ 

- Se $c_i \neq 0$ per qualche $i \in \mathbb{Z}^-$ s_0 è una **SINGOLARITA'** di $f(s)$:

1) **Singularità POLO** quando i $c_i \neq 0$ sono in numero finito; 

sia $-n = \min \{i \in \mathbb{Z}^- : c_i \neq 0\}$: s_0 è **polo di ordine n** .

Es.: $f(s) = \frac{s+3}{(s-1)^2(s+1)}$, $f(s) = \underbrace{2(s-1)^{-2} - \frac{1}{2}(s-1)^{-1}}_{\text{red box}} + \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{8}(s-1) + \frac{1}{16}(s-1)^2 + \dots \right]$  

$f(s) = \frac{1}{2}(s+1)^{-1} + \frac{3}{4} + \frac{5}{8}(s+1) + \frac{7}{16}(s+1)^2 + \dots$

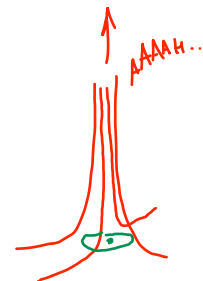
2) **Singularità ESSENZIALE** quando i $c_i \neq 0$ con $i \in \mathbb{Z}^-$ sono infiniti. 

Es.: $f(s) = e^{\frac{1}{s}} = 1 + \frac{1}{s} + \frac{1}{2!s^2} + \frac{1}{3!s^3} + \dots$ 

Proprietà

Assumiamo $f(s)$ analitica in $B(s_0, r_0) - \{s_0\}$.

s_0 è una singolarità di $f(s)$ se e solo se $f(s)$ assume valori illimitati in un intorno di s_0 .



Teorema di Picard

Sia s_0 una singolarità essenziale di $f(s)$. In ogni intorno di s_0 , la funzione $f(s)$ assume ogni valore complesso infinite volte con l'eventuale eccezione di un solo particolare valore.



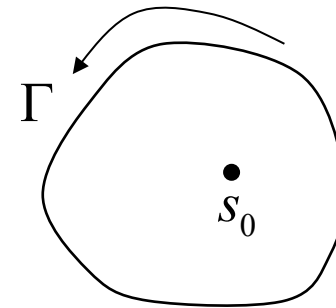
[ovvero: In ogni intorno di s_0 , esistono sempre infinite radici dell'equazione $f(s) = c$ tranne, al più, per un valore eccezionale di c .]

$$f(s) = \cdots + \frac{c_{-2}}{(s-s_0)^2} + \frac{c_{-1}}{(s-s_0)} + c_0 + c_1(s-s_0) + c_2(s-s_0)^2 + \cdots$$

Def. **Residuo**

Sia s_0 una singolarità di $f(s)$. Il coefficiente c_{-1} dello sviluppo in serie di Laurent si dice **RESIDUO**, $\text{Res}\{f, s_0\}$ della funzione $f(s)$ in s_0 .

$$\text{Res}\{f, s_0\} = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} f(s) ds$$



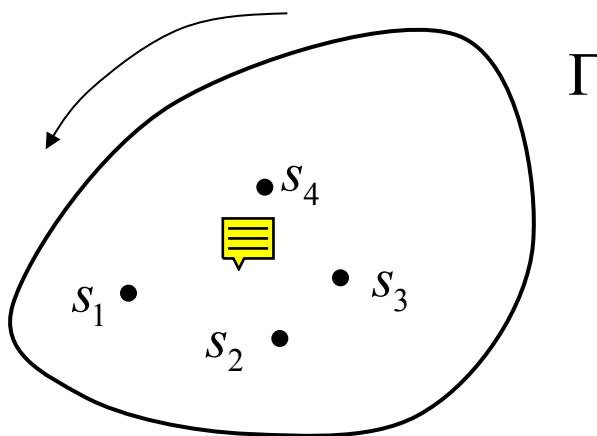
$$f(s) = \cdots + \frac{c_{-2}}{(s-s_0)^2} + \frac{\text{Res}\{f, s_0\}}{(s-s_0)} + c_0 + c_1(s-s_0) + c_2(s-s_0)^2 + \cdots$$

Teorema dei residui di Cauchy

Data una funzione $f(s)$ analitica su di una regione aperta e semplicemente connessa U ad eccezione dei punti singolari $s_1, s_2, \dots, s_n$ vale

$$\oint_{\Gamma} f(s) ds = 2\pi j \sum_{i=1}^n \text{Res}\{f, s_i\} \quad \text{$$

dove $\Gamma \subseteq U$ è una curva chiusa semplice contenente al suo interno le singolarità s_i .



Poli di $f(s)$

Proprietà :

Sia s_0 una singolarità polo di $f(s)$. Allora s_0 è polo di ordine n se e solo se esiste $g(s)$ analitica in s_0 con $g(s_0) \neq 0$ tale che

$$f(s) = \frac{g(s)}{(s - s_0)^n}$$

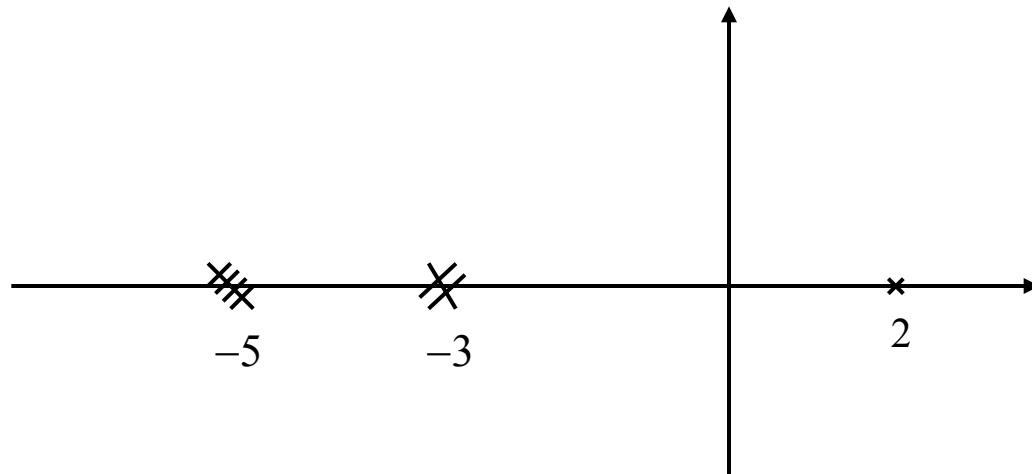
Esempio:

$$f(s) = \frac{s(s+6)^3}{(s-2)(s+3)^2(s+5)^4}$$

2 è un polo di ordine 1,

-3 è un polo di ordine 2,

-5 è un polo di ordine 4.



Zeri di $f(s)$

Sia $f(s)$ analitica in z .

Def. : $s_0 = z$

z è detto zero di f se $f(z) = 0$. Considerato lo sviluppo di Taylor

$$f(s) = c_1(s - z) + c_2(s - z)^2 + \dots \quad \text{ed } n := \min \{i \in \mathbb{N} : c_i \neq 0\},$$

z è detto zero di ordine n di $f(s)$.

Proprietà :

z è zero di ordine n se e solo se esiste $g(s)$ analitica in z con $g(z) \neq 0$

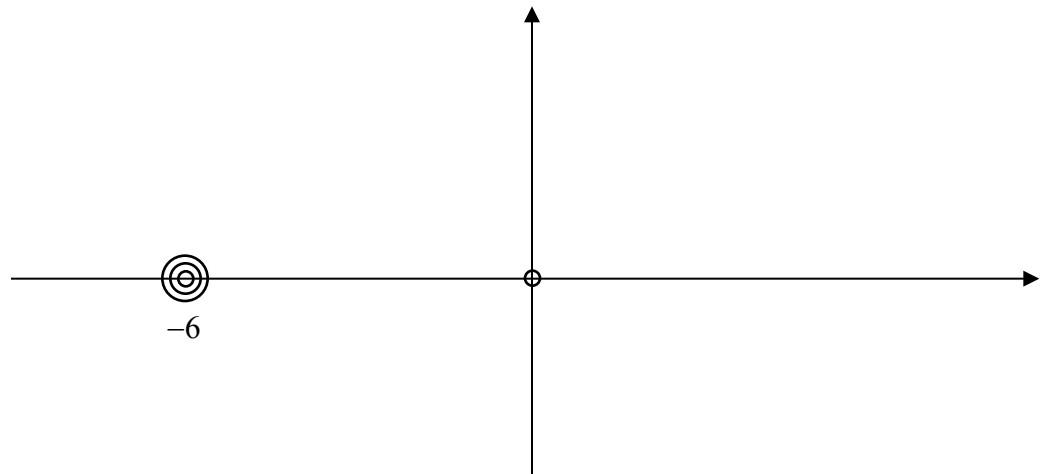
tale che $f(s) = (s - z)^n g(s)$. 

Esempio:

$$f(s) = \frac{s(s+6)^3}{(s-2)(s+3)^2(s+5)^4}$$

0 è uno zero di ordine 1,

-6 è uno zero di ordine 3.



Proprietà

Se $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ha una singolarità polare in p di ordine n allora

$$\text{Res}\{f, p\} = \frac{1}{(n-1)!} D^{n-1} \left(f(s)(s-p)^n \right) \Big|_{s=p}$$

Dim. :

$$f(s) = \frac{c_{-n}}{(s-p)^n} + \frac{c_{-n+1}}{(s-p)^{n-1}} + \dots + \frac{c_{-1}}{(s-p)} + c_0 + c_1(s-p) + c_2(s-p)^2 + \dots$$

$$f(s)(s-p)^n = c_{-n} + c_{-n+1}(s-p) + c_{-n+2}(s-p)^2 + \dots + c_{-1}(s-p)^{n-1} + c_0(s-p)^n + c_1(s-p)^{n+1} + \dots$$

$$D \left(f(s)(s-p)^n \right) = c_{-n+1} + c_{-n+2} 2(s-p) + \dots + c_{-1}(n-1)(s-p)^{n-2} + c_0 n(s-p)^{n-1} + \dots$$

$$D^2 \left(f(s)(s-p)^n \right) = c_{-n+2} 2 + \dots + c_{-1}(n-1)(n-2)(s-p)^{n-3} + c_0 n(n-1)(s-p)^{n-2} + \dots$$

...

$$D^{n-1} \left(f(s)(s-p)^n \right) = c_{-1}(n-1)(n-2)\dots \cdot 1 + c_0 n(n-1)\dots \cdot 2 \cdot (s-p) + \dots$$

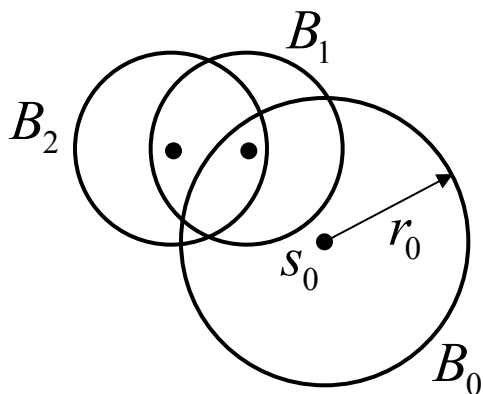
$$D^{n-1} \left(f(s)(s-p)^n \right) \Big|_{s=p} = c_{-1}(n-1)(n-2)\dots \cdot 1 = c_{-1}(n-1)!$$

□

Continuazione analitica

Data una funzione $f(s)$ definita da uno sviluppo in serie di Taylor su di un cerchio $B_0(s_0, r_0)$ è possibile estendere ("continuare") la definizione di $f(s)$ all'esterno di B_0 mediante lo sviluppo in serie di Taylor di altri punti di B_0 . Il procedimento è ricorsivo:

$$B_0 \rightarrow B_1 \rightarrow B_2 \rightarrow \dots$$



Possono emergere funzioni a più valori! (funzioni polidrome)

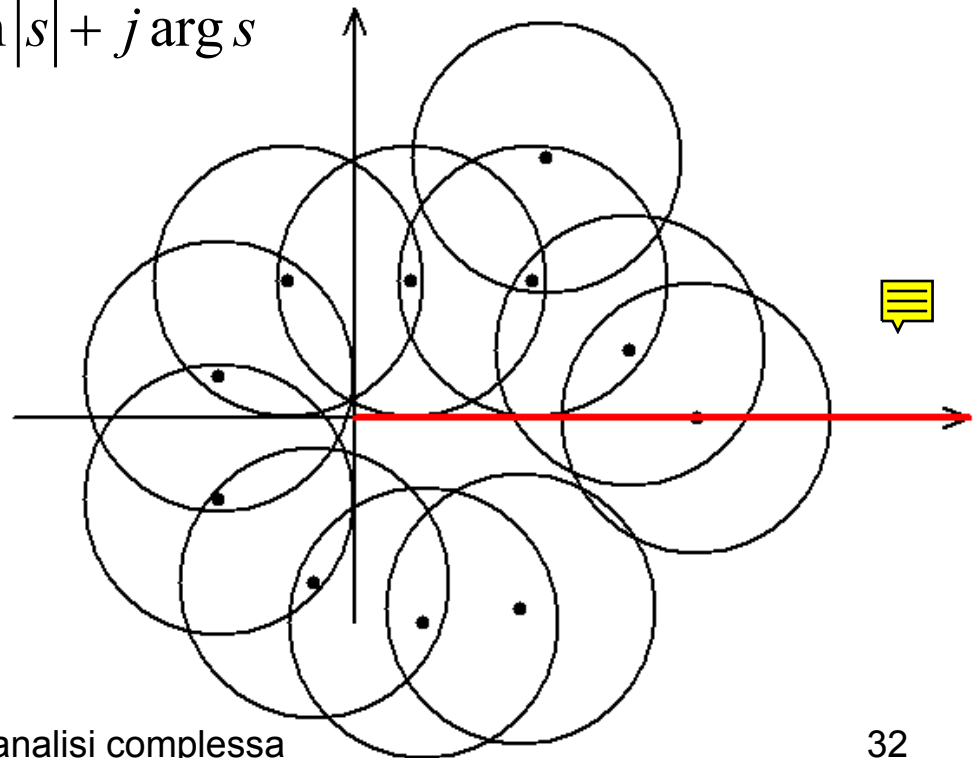
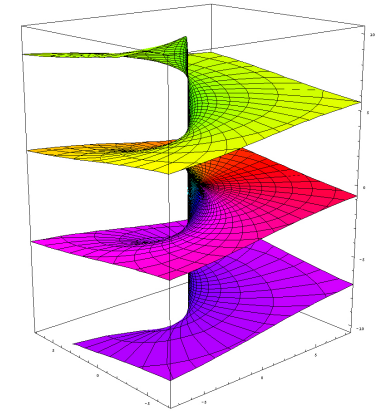
Esempio: estendere la definizione del logaritmo naturale dall'asse reale positivo al piano complesso mediante continuazione analitica. Si potrebbe dimostrare che

$$\ln s = \ln |s| + j \arg s$$

Deduzione euristica: $s = |s| e^{j \arg s}$

$$\Rightarrow \ln |s| e^{j \arg s} = \ln |s| + \ln e^{j \arg s} = \ln |s| + j \arg s$$

E' una funzione polidroma.



I concetti introdotti dalla lezione:

- Limiti e derivate di funzioni complesse di variabili complesse
- Funzioni analitiche
- Condizioni di Cauchy-Riemann
- Integrali su curve del piano complesso
- Teorema dell'integrale di Cauchy
- Sviluppo in serie di Taylor
- Formula integrale di Cauchy
- Sviluppo in serie di Laurent
- Teorema dei residui di Cauchy
- Poli e zeri di una funzione
- Continuazione analitica e funzioni polidrome