

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica, Elettronica e delle
Telecomunicazioni

Lezione n. 4 di Fondamenti di Controlli Automatici
prof. Aurelio Piazzì

La trasformata di Laplace

Università degli Studi di Parma – a.a. 2014-2015

- La **trasformata di Laplace** è un operatore funzionale che converte (“trasforma”) una equazione differenziale in una equazione algebrica.
- Il metodo basato sulla trasformata di Laplace permette di risolvere una equazione differenziale lineare con condizioni iniziali arbitrarie.
- Permette di analizzare i fenomeni transitori ed asintotici di una grande varietà di sistemi (elettrici, meccanici, termici, ecc.)

La **trasformata di Laplace** è un operatore funzionale che si applica ad una funzione f di variabile reale con codominio $\mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$):

1. Assumiamo $f \in PC^\infty$

2. $\exists \sigma \in \mathbb{R}$ per il quale $\int_0^{+\infty} |f(t)| e^{-\sigma t} dt < +\infty$

Note :

- spesso assumeremo $f(t) = 0$ per $t < 0$
- se vale la condizione 2 allora $\forall \sigma_1 > \sigma : \int_0^{+\infty} |f(t)| e^{-\sigma_1 t} dt < +\infty$

Def. ascissa di convergenza di $f(t)$

$$\sigma_c := \inf \left\{ \sigma \in \mathbb{R} : \int_0^{+\infty} |f(t)| e^{-\sigma t} dt < +\infty \right\}$$

Def.: Trasformata di Laplace

La trasformata di Laplace di un segnale (funzione) $f(t)$ è la funzione $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ definita da

$$F(s) = \int_{0-}^{+\infty} f(t)e^{-st} dt \quad \text{💬}$$

per i valori $s \in \mathbb{C}$ per i quali l'integrale converge. 💬

- F è una funzione complessa di variabile complessa, $\mathcal{L}[\cdot]$ indica l'operatore di Laplace.
- Notazione usuale: le lettere minuscole denotano segnali e funzioni, le corrispondenti lettere maiuscole denotano le trasformate di Laplace, p.e., $Y(s)$ indica $\mathcal{L}[y(t)]$, E indica $\mathcal{L}[e]$, ecc.

Consideriamo $s = \sigma + j\omega$

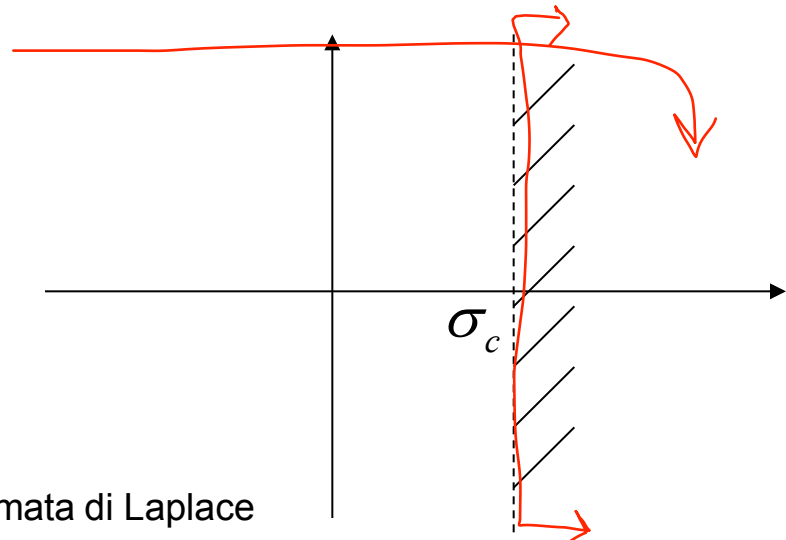
$$F(s) = \int_{0-}^{+\infty} f(t)e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-(\sigma + j\omega)t} dt$$

$$|F(s)| \leq \int_0^{+\infty} |f(t)e^{-\sigma t} e^{-j\omega t}| dt = \int_0^{+\infty} |f(t)| e^{-\sigma t} |e^{-j\omega t}| dt = \int_0^{+\infty} |f(t)| e^{-\sigma t} dt$$

$F(s)$ è ben definito per $\sigma > \sigma_c$ ovvero $\operatorname{Re} s > \sigma_c$.

Proprietà

La trasformata di Laplace $F(s)$ è una funzione analitica sul semipiano $\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s > \sigma_c\}$.



Esempio: **segnale gradino unitario** $1(t) := \begin{cases} 1 & \text{per } t \geq 0 \\ 0 & \text{per } t < 0 \end{cases}$

$$\mathcal{L}[1(t)] = \int_{0-}^{+\infty} 1(t) e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} e^{-st} dt = \left[\frac{e^{-st}}{-s} \right]_0^{+\infty} = \frac{e^{-st}}{-s} \Big|_{t=+\infty} - \frac{e^{-st}}{-s} \Big|_{t=0} = \frac{1}{s}$$

Calcolo corretto se $e^{-st} \rightarrow 0$ per $t \rightarrow +\infty$: vero per $\operatorname{Re} s > 0$ ($\sigma_c = 0$).

Infatti $e^{-st} = e^{-(\sigma + j\omega)t} = e^{-\sigma t} e^{-j\omega t}$.

$\mathcal{L}[1(t)] = \frac{1}{s}$ è ben definita e analitica per $\operatorname{Re} s > 0$.

Utilizzando la continuazione analitica $\mathcal{L}[1(t)] = \frac{1}{s} \quad \forall s \in \mathbb{C} - \{0\}$.



Esempio: **segnale esponenziale** e^{at}

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[e^{at}] &= \int_{0-}^{+\infty} e^{at} e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(s-a)t} dt = \left[\frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)} \right]_0^{+\infty} = \\ &= \frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)} \Big|_{t=+\infty} - \frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)} \Big|_{t=0} = \frac{1}{s-a}\end{aligned}$$

$e^{-(s-a)t} \rightarrow 0$ per $t \rightarrow +\infty$ quando $\operatorname{Re}(s-a) > 0 \Rightarrow \operatorname{Re} s > a$ ($\sigma_c = a$).

$\mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{s-a}$ è ben definita ed analitica per $\operatorname{Re} s > a$.

Utilizzando la continuazione analitica $\mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{s-a} \quad \forall s \in \mathbb{C} - \{a\}$.

La trasformata è valida anche quando $a \in \mathbb{C}$:

$$\mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{s-a} \quad \forall s \in \mathbb{C} - \{a\}, \quad \sigma_c = \operatorname{Re} a$$

Linearità

La trasformata di Laplace è un **operatore lineare**: per ogni segnale $f_1(t)$ e $f_2(t)$ e per ogni scalare c_1 e c_2

$$\mathcal{L}[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)] = c_1 \mathcal{L}[f_1(t)] + c_2 \mathcal{L}[f_2(t)]$$

Dim.: è immediata conseguenza della linearità dell'integrale...

□

Esempio

$$\mathcal{L}[4 + 6e^{-t}] = 4\mathcal{L}[1] + 6\mathcal{L}[e^{-t}] = 4\frac{1}{s} + 6\frac{1}{s - (-1)} = \frac{10s + 4}{s(s + 1)}$$

Iniettività

La trasformata di Laplace è **iniettiva**:

se $\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[g(t)] \Rightarrow f(t) = g(t)$ (q.o.) su $[0, +\infty)$

- $F(s)$ determina univocamente $f(t)$ su $[0, +\infty)$. E' quindi **ben definita la trasformata inversa di Laplace** $\mathcal{L}^{-1}$.

Esempio (slide precedente)

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{10s+4}{s(s+1)}\right] = 4 + 6e^{-t}$$

In altre parole, l'unica funzione $f(t)$ tale che $F(s) = \frac{10s+4}{s(s+1)}$ è

$$f(t) = 4 + 6e^{-t}.$$

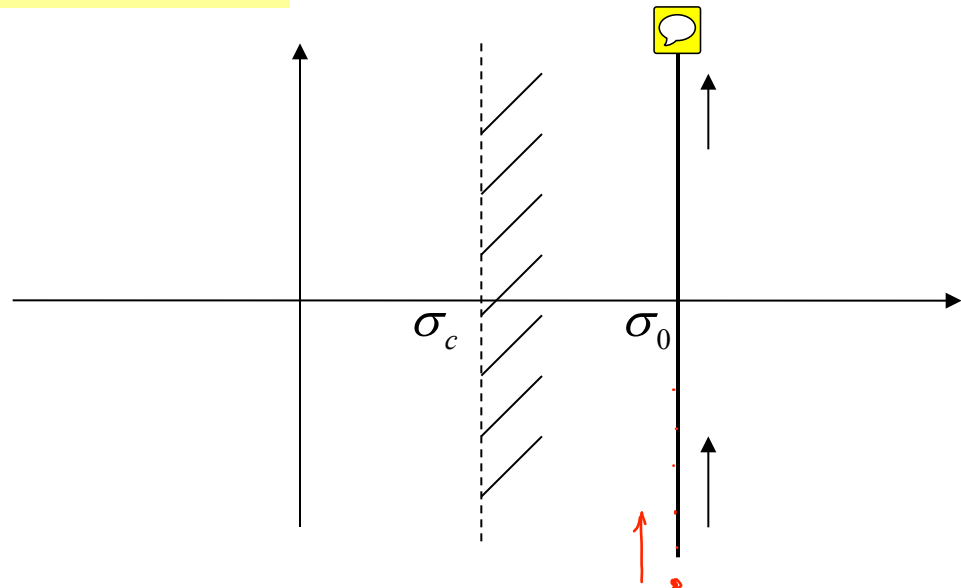
La trasformata inversa di Laplace

Sia $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ allora

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} F(s) e^{st} ds$$

per ogni $\sigma_0 > \sigma_c$.

- Si indica $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$.



La trasformata della derivata

Sia $f \in C^1(\mathbb{R}_+)$ segue

$$\mathcal{L}[Df(t)] = sF(s) - f(0+)$$

$$\int_a^b \overset{e^{-st}}{\downarrow} f(x) \overset{Df}{\downarrow} g'(x) dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x) dx$$

Dim.:

$$\begin{aligned} \int_{0-}^{+\infty} Df(t)e^{-st} dt &= \int_{0+}^{+\infty} Df(t)e^{-st} dt = \left[f(t)e^{-st} \right]_{0+}^{+\infty} - \int_{0+}^{+\infty} f(t)(-se^{-st}) dt = \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)e^{-st} - \lim_{t \rightarrow 0+} f(t)e^{-st} + s \int_{0+}^{+\infty} f(t)e^{-st} dt = \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \cancel{f(t)e^{-st}} - f(0+) + sF(s) \end{aligned}$$

Se $\operatorname{Re} s > \sigma_c$ (ascissa di convergenza di $f(t)$)

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)e^{-st} = 0$$

□

derivate di ordine superiore

Sia $f \in C^2(\mathbb{R}_+)$ segue

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[D^2 f] &= \mathcal{L}[D(Df)] = s\mathcal{L}[Df] - Df(0+) = \\ &= s(sF(s) - f(0+)) - Df(0+) = \\ &= s^2 F(s) - sf(0+) - Df(0+)\end{aligned}$$

generalizzando con ricorsione $[f \in C^i(\mathbb{R}_+)]$:

$$D^i f_+ := D^i f(0+) \quad \text{con } i = 0, 1, 2, \dots$$

$$\mathcal{L}[D^i f] = s^i F(s) - s^{i-1} f_+ - s^{i-2} Df_+ - \dots - sD^{i-2} f_+ - D^{i-1} f_+$$

$$\mathcal{L}[D^i f] = s^i F(s) - \sum_{j=0}^{i-1} s^j D^{i-1-j} f_+$$

Trasformata dell'integrale

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(v)dv\right] = \frac{1}{s} F(s)$$

Esempio

$$\mathcal{L}[t] = \mathcal{L}\left[\int_0^t 1 \cdot dv\right] = \frac{1}{s} \mathcal{L}[1] = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s^2}$$

si noti

$$\mathcal{L}[t] = \mathcal{L}[t \cdot 1(t)]$$

Teorema del valore finale

Sia $f \in C^1(\mathbb{R}_+)$ con f e Df aventi ascisse di convergenza non positive. Se esiste il limite $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$ vale

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) \quad \text{☞}$$

Esempio

$$f(t) = 4 + 6e^{-t} \Rightarrow F(s) = \frac{10s + 4}{s(s + 1)}, \quad \sigma_c = 0$$

$$Df(t) = -6e^{-t} \Rightarrow \mathcal{L}[Df] = -6 \cdot \frac{1}{s + 1}, \quad \sigma_c = -1$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{10s + 4}{s + 1} = 4$$

Teorema del valore iniziale

Sia $f \in C^1(\mathbb{R}_+)$. Se esiste il limite $\lim_{s \rightarrow +\infty} sF(s)$ vale

$$f(0+) = \lim_{s \rightarrow +\infty} sF(s) \quad \square$$

Esempio

$$f(t) = 4 + 6e^{-t}, \quad F(s) = \frac{10s + 4}{s(s+1)}$$

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} sF(s) = \lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{10s + 4}{s + 1} = 10 = f(0+)$$

Traslazione nel tempo

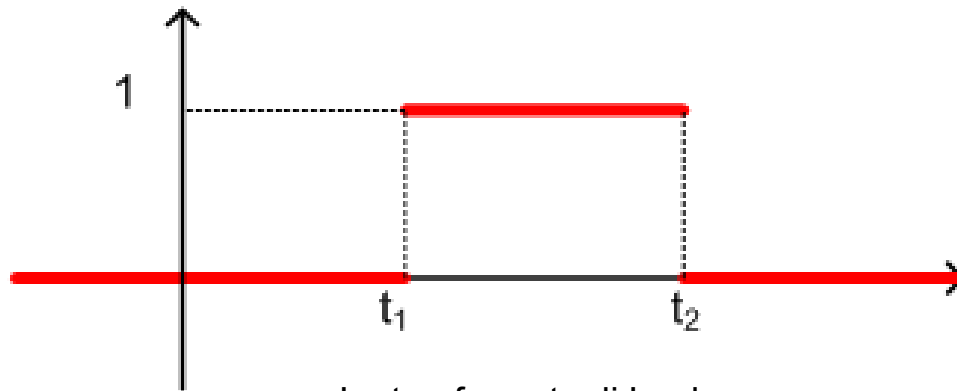
Per ogni $t_0 \geq 0$ vale

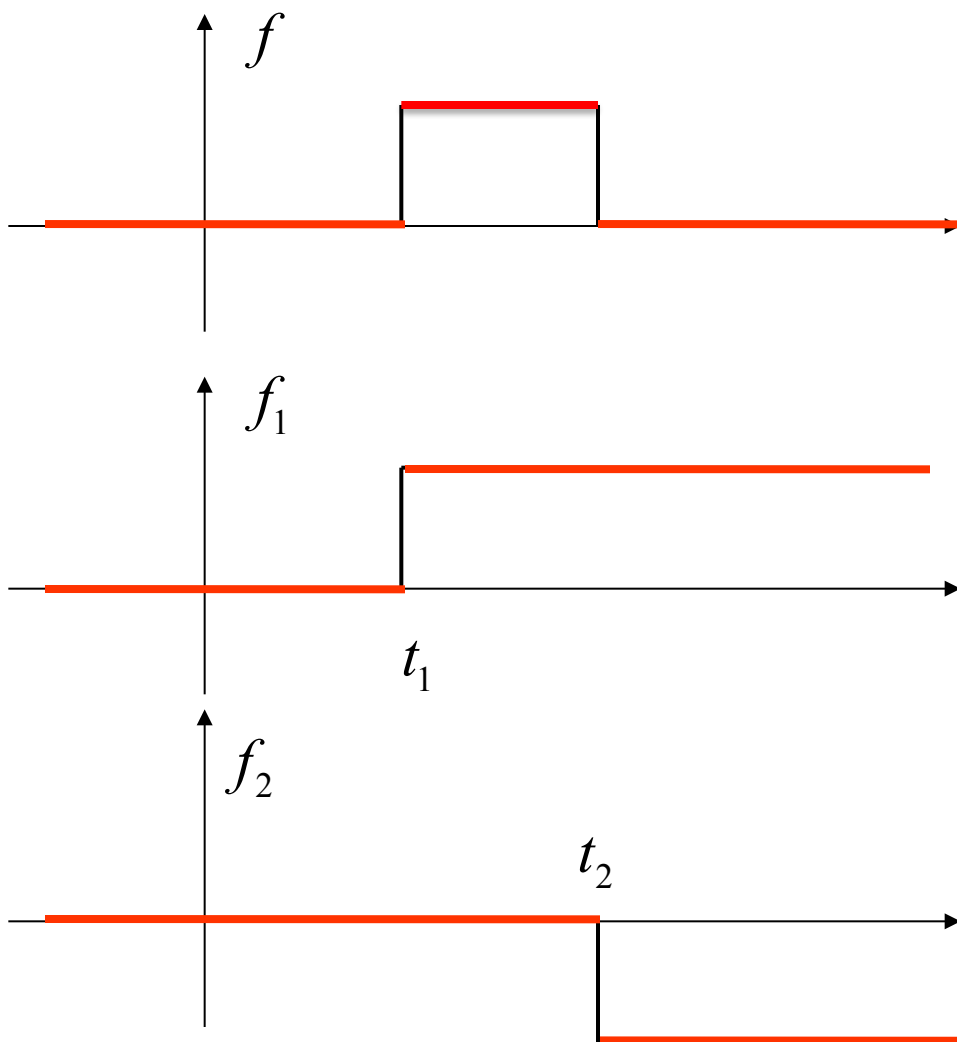
$$\mathcal{L}[f(t - t_0) \cdot 1(t - t_0)] = e^{-t_0 s} F(s)$$

Corollario: Se $f(t) = 0$ per $t < 0$ allora $\forall t_0 \geq 0$ vale $\mathcal{L}[f(t - t_0)] = e^{-t_0 s} F(s)$

Esempio

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{per } t \in [t_1, t_2] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \quad \text{con } 0 < t_1 < t_2 \quad (\text{impulso rettangolare})$$





$$f(t) = f_1(t) + f_2(t)$$

$$f_1(t) := 1 \cdot 1(t - t_1)$$

$$f_2(t) := (-1) \cdot 1(t - t_2)$$

$$F(s) = F_1(s) + F_2(s)$$

$$= \left(\frac{1}{s} \right) e^{-t_1 s} + \left(-\frac{1}{s} \right) e^{-t_2 s}$$

$$= \frac{e^{-t_1 s} - e^{-t_2 s}}{s}$$

Traslazione nella variabile complessa (s)

Per ogni $a \in \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) vale

$$\mathcal{L}\left[e^{at} f(t)\right] = F(s - a)$$

Dim. :

$$\int_{0-}^{+\infty} e^{at} f(t) e^{-st} dt = \int_{0-}^{+\infty} f(t) e^{-(s-a)t} dt = F(s - a)$$

Esempio

$$\mathcal{L}[t] = \frac{1}{s^2} \Rightarrow \mathcal{L}[te^{at}] = \mathcal{L}[te^{at}] = \frac{1}{(s - a)^2}$$

 $\mathcal{L}[t^n e^{at}] = ?$

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t v^{n-1} dv\right] = \frac{1}{s} \mathcal{L}[t^{n-1}] \quad (\text{dal teorema dell'integrale})$$

$$\int_0^t v^{n-1} dv = \left[\frac{v^n}{n}\right]_0^t = \frac{t^n}{n}$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{t^n}{n}\right] = \frac{1}{s} \mathcal{L}[t^{n-1}] \Rightarrow \mathcal{L}[t^n] = \frac{n}{s} \mathcal{L}[t^{n-1}]$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[t^n] &= \frac{n}{s} \mathcal{L}[t^{n-1}] = \frac{n}{s} \cdot \frac{n-1}{s} \mathcal{L}[t^{n-2}] = \frac{n}{s} \cdot \frac{n-1}{s} \cdot \frac{n-2}{s} \mathcal{L}[t^{n-3}] = \\ &= \frac{n}{s} \cdot \frac{n-1}{s} \cdot \frac{n-2}{s} \cdot \dots \cdot \frac{2}{s} \mathcal{L}[t] = \frac{n!}{s^{n-1}} \cdot \mathcal{L}[t] = \frac{n!}{s^{n-1}} \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{n!}{s^{n+1}} \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}[t^n e^{at}] = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}} \quad (\text{dal teorema della traslazione in } s)$$

Teorema di convoluzione

Si abbia $f(t) = g(t) = 0$ per $t < 0$. La convoluzione dei segnali f e g , spesso indicata come $f * g$, è il segnale

$$\int_0^t f(v)g(t-v)dv$$

rappresentabile anche come $(f * g = g * f)$

$$\int_0^t g(v)f(t-v)dv.$$

La trasformata della convoluzione è

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(v)g(t-v)dv\right] = F(s)G(s).$$

...riprendiamo il problema:

☞ Σ definito da $D^2 y(t) + 3Dy(t) + 2y(t) = u(t)$

Noto $u(t)$, $t \geq 0$

e le condizioni iniziali $y(0) = 1$ e $Dy(0) = 1$

trovare $y(t)$, $t \geq 0$?

Sia $u(t) \in C^0(\mathbb{R})$ e conseguentemente assumiamo
che $y(t) \in C^2(\mathbb{R})$.

Applichiamo la trasformata di Laplace all'eq. differenziale:

$$\mathcal{L}(D^2 y(t) + 3Dy(t) + 2y(t)) = \mathcal{L}(u(t))$$

$\Downarrow$

$$s^2 Y(s) - sy(0) - Dy(0) + 3(sY(s) - y(0)) + 2Y(s) = U(s)$$

$\Downarrow$

$$s^2 Y(s) - s - 1 + 3(sY(s) - 1) + 2Y(s) = U(s)$$

$$(s^2 + 3s + 2)Y(s) - s - 4 = U(s)$$

$$(s^2 + 3s + 2)Y(s) = U(s) + s + 4$$



Eq. algebrica del primo ordine!

Soluzione nello spazio delle trasformate:

$$Y(s) = \frac{U(s)}{s^2 + 3s + 2} + \frac{s + 4}{s^2 + 3s + 2}$$

$\Downarrow$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{U(s)}{s^2 + 3s + 2} \right] + \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s + 4}{s^2 + 3s + 2} \right], \quad t \geq 0$$

$$\frac{s + 4}{s^2 + 3s + 2} = \frac{s + 4}{(s + 1)(s + 2)} = \frac{a}{s + 1} + \frac{b}{s + 2}$$

$$s + 4 = a(s + 2) + b(s + 1) \Leftrightarrow s + 4 = (a + b)s + 2a + b$$

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ 2a + b = 4 \end{cases} \Rightarrow a = 3, b = -2 \quad (\text{vedremo un metodo pi\`u efficiente...})$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+4}{s^2+3s+2}\right] &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{s+1} - \frac{2}{s+2}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{s+1}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s+2}\right] \\ &= 3e^{-t} - 2e^{-2t}\end{aligned}$$

$$G(s) := \frac{1}{s^2+3s+2} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{U(s)}{s^2+3s+2}\right] = \mathcal{L}^{-1}[G(s)U(s)]$$

$$\frac{1}{s^2+3s+2} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} \Rightarrow g(t) := \mathcal{L}^{-1}[G(s)] = e^{-t} - e^{-2t}$$

dal teorema di convoluzione

$$\mathcal{L}^{-1}[G(s)U(s)] = \int_0^t \left(e^{-(t-v)} - e^{-2(t-v)}\right) u(v) dv$$

Si giunge alla soluzione ($t \geq 0$)

$$y(t) = \int_0^t \left(e^{-(t-v)} - e^{-2(t-v)} \right) u(v) dv + 3e^{-t} - 2e^{-2t}$$

L'espressione di $y(t)$ individuata è valida in realtà per ogni $t \in \mathbb{R}$ (può essere dimostrato con calcolo diretto).

Interpretazione della soluzione...

Antitrasformazione delle funzioni razionali

(il caso dei poli semplici)

Dato $F(s) = \frac{b(s)}{a(s)}$, funzione razionale strettamente propria

($\deg b(s) < \deg a(s)$) con poli tutti semplici si determini

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)].$$

Siano $a(s)$ e $b(s)$ polinomi con coefficienti reali ed $n := \deg a(s)$.

Soluzione:

$$F(s) = \frac{b(s)}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_n)} \quad \text{con } p_i \neq p_j \text{ se } i \neq j.$$

idea: **sviluppo in fratti semplici** di $F(s)$

$$\exists! k_i \in \mathbb{R}(\mathbb{C}) \quad \ni$$

$$F(s) = \frac{k_1}{(s-p_1)} + \frac{k_2}{(s-p_2)} + \dots + \frac{k_n}{(s-p_n)}$$

k_i è il **residuo di $F(s)$** in p_i (perchè? ...)

Come calcolare i k_i ?

$$(s-p_1)F(s) = k_1 + \frac{k_2}{(s-p_2)}(s-p_1) + \dots + \frac{k_n}{(s-p_n)}(s-p_1)$$

$$\Rightarrow k_1 = (s-p_1)F(s)\Big|_{s=p_1}$$

$$\text{in generale} \quad k_i = (s-p_i)F(s)\Big|_{s=p_i} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{k_1}{s - p_1} + \frac{k_2}{s - p_2} + \dots + \frac{k_n}{s - p_n} \right] = \\
 &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{k_1}{s - p_1} \right] + \dots + \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{k_n}{s - p_n} \right] = \\
 &= k_1 e^{p_1 t} + \dots + k_n e^{p_n t}
 \end{aligned}$$

$$f(t) = \sum_{i=1}^n k_i e^{p_i t}$$

□

esempio

$$\frac{s + 4}{(s + 1)(s + 2)} = \frac{k_1}{s + 1} + \frac{k_2}{s + 2}$$

$$k_1 = \left. \frac{s + 4}{s + 2} \right|_{s=-1} = 3 \quad k_2 = \left. \frac{s + 4}{s + 1} \right|_{s=-2} = -2$$

I concetti introdotti dalla lezione:

- La trasformata di Laplace
- Linearità ed iniettività (invertibilità)
- La trasformata inversa di Laplace
- Teoremi: della derivata, dell'integrale, del valore finale, del valore iniziale, della traslazione nel tempo, della traslazione in s , di convoluzione.
- Antitrasformazione delle funzioni razionali nel caso dei poli semplici

Trasformate notevoli

$$\mathcal{L}\left[t^n\right] = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad \mathcal{L}\left[e^{at}\right] = \frac{1}{s-a}$$