

Corsi di Laurea in Ingegneria Informatica, Elettronica e delle
Telecomunicazioni

Lezione n. 5 di Fondamenti di Controlli Automatici
prof. Aurelio Piazzi

Le funzioni impulsive e l'insieme dei behaviors

Università degli Studi di Parma – a.a. 2014-2015

Consideriamo un sistema dinamico Σ descritto da

$$Dy(t) + 2y(t) = 2Du(t) + 2u(t)$$

ed assumiamo che per i tempi negativi sia

$$y(t) = e^{-2t} \quad \text{e} \quad u(t) = 0 \quad \text{con} \quad t < 0$$

Questa coppia di funzioni soddisfa l'eq. diff.:

$$Dy(t) = -2e^{-2t}$$

$$\Rightarrow (-2e^{-2t}) + 2(e^{-2t}) = 0 \quad \forall t < 0$$

Quindi:

$$\left(0, e^{-2t}\right) \Big|_{(-\infty, 0)} \in \mathcal{B}$$

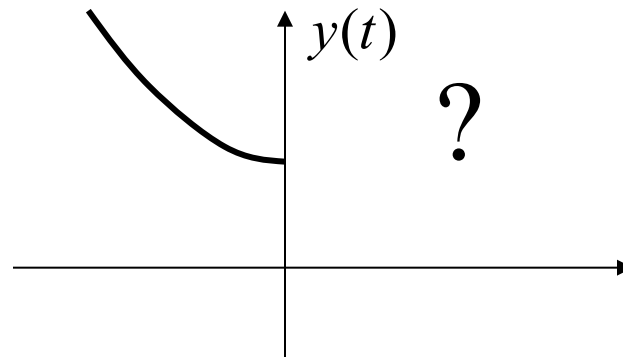
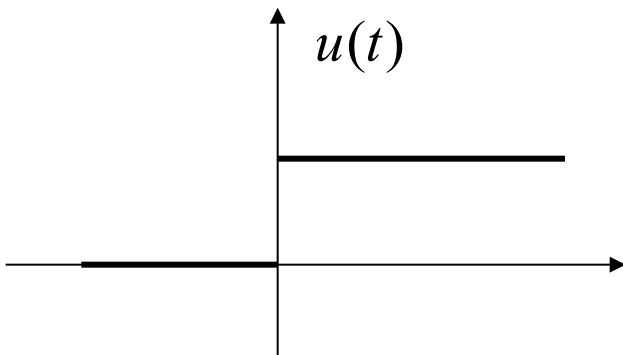
Introduciamo nel sistema una "azione forzante"

$$u(t) = 1 \quad \text{per } t \geq 0$$

Quindi $u(t) = 1(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$ (è un gradino unitario)

Problema:

determinare $y(t)$ per $t \geq 0$



$$Dy(t) + 2y(t) = 2Du(t) + 2u(t)$$

Condizioni iniziali:

$$u(0-) = 0, \quad u(0+) = 1, \quad y(0-) = 1, \quad y(0+) = ?$$

Se fosse noto $y_+ \stackrel{\text{def}}{=} y(0+)$ potremmo applicare la t. di Laplace:

$$sY(s) - y_+ + 2Y(s) = 2(sU(s) - u(0+)) + 2U(s)$$

$$(s+2)Y(s) - y_+ = 2(sU(s) - 1) + 2U(s)$$

$$(s+2)Y(s) = (2s+2)U(s) + y_+ - 2$$

$$Y(s) = \frac{2s+2}{s+2}U(s) + \frac{y_+ - 2}{s+2}; \quad U(s) = \mathcal{L}[1(t)] = \frac{1}{s}$$

$$Y(s) = \frac{2s+2}{s+2} \cdot \frac{1}{s} + \frac{y_+ - 2}{s+2} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s+2} + \frac{y_+ - 2}{s+2}$$

$$y(t) = 1 + e^{-2t} + (y_+ - 2)e^{-2t} \quad \text{per } t \geq 0$$

La coppia di funzioni:

$$u(t) = 1(t) \quad t \in \mathbb{R}$$

$$y(t) = \begin{cases} e^{-2t} & \text{per } t < 0 \\ 1 + e^{-2t} + (y_+ - 2)e^{-2t} & \text{per } t \geq 0 \end{cases}$$

soddisfa l'eq. differenziale

$$Dy + 2y(t) = 2Du(t) + 2u(t) \quad \forall t \in \mathbb{R} - \{0\} \quad \text{☰}$$

per qualunque valore del parametro y_+ .

Non è quindi possibile definire l'insieme dei behaviors come

~~$$\mathcal{B} = \left\{ (u(t), y(t)) \in PC^\infty : Dy + 2y = 2Du + 2u \quad \forall t \in \mathbb{R} - \{t_1, t_2, \dots\} \right\}$$~~



$$C^{1,\infty} := C^1 \cap PC^\infty$$

Si osserva che

$$\left\{ (u(t), y(t)) \in C^{1,\infty} : Dy + 2y = 2Du + 2u \quad \forall t \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathcal{B}$$

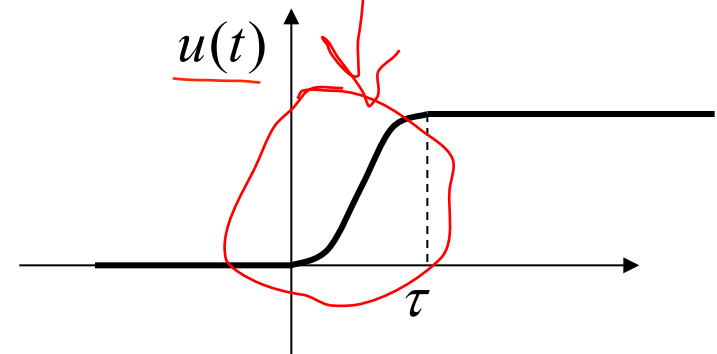
Come risolvere l'impasse?

Idea: definisco l'azione forzante come



$$u(t) := \begin{cases} 0 & \text{per } t < 0 \\ 3\frac{t^2}{\tau^2} - 2\frac{t^3}{\tau^3} & \text{per } t \in [0, \tau) \\ 1 & \text{per } t \geq \tau \end{cases}$$

$$\Rightarrow u(t) \in C^{1,\infty} \quad \forall \tau > 0$$



E' ragionevole ipotizzare $y(t) \in C^{1,\infty} : y(0-) = y(0+) = 1$ 

Posso quindi determinare $y(t)$ per $t > 0$ con le condizioni iniziali al tempo $0+$: $u(0+) = 0$ e $y(0+) = 1$.

Soluzione :

$$t \in [0, \tau) : y(t) = 6 \frac{t^2}{\tau^2} - 4 \frac{t^3}{\tau^3} - 2e^{-2t} \int_0^t e^{2v} \left(3 \frac{v^2}{\tau^2} - 2 \frac{v^3}{\tau^3} \right) dv + e^{-2t}$$

$$t \geq \tau : y(t) = 1 + e^{-2t} - 2e^{-2t} \int_0^\tau e^{2v} \left(3 \frac{v^2}{\tau^2} - 2 \frac{v^3}{\tau^3} \right) dv + e^{-2(t-\tau)}$$

Si noti $y(0-) = y(0+)$ e $Dy(0-) = Dy(0+)$ 

$$y(\tau-) = y(\tau+) \text{ e } Dy(\tau-) = Dy(\tau+) \quad \forall \tau > 0.$$

Quindi è verificato che $y(t) \in C^{1,\infty}$ ed inoltre la coppia $(u(t), y(t))$ così definita soddisfa

$$Dy(t) + 2y(t) = 2Du(t) + 2u(t) \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \forall \tau > 0.$$

$$u(t) := \begin{cases} 0 & \text{per } t < 0 \\ 3\frac{t^2}{\tau^2} - 2\frac{t^3}{\tau^3} & \text{per } t \in [0, \tau) \\ 1 & \text{per } t \geq \tau \end{cases}$$

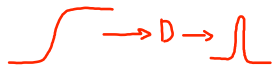
$$y(t) = \begin{cases} e^{-2t} & t < 0 \\ 6\frac{t^2}{\tau^2} - 4\frac{t^3}{\tau^3} - 2e^{-2t} \int_0^t e^{2v} \left(3\frac{v^2}{\tau^2} - 2\frac{v^3}{\tau^3} \right) dv + e^{-2t} & t \in [0, \tau) \\ 1 + e^{-2t} - 2e^{-2t} \int_0^\tau e^{2v} \left(3\frac{v^2}{\tau^2} - 2\frac{v^3}{\tau^3} \right) dv + e^{-2(t-\tau)} & t \geq \tau \end{cases}$$

Osserviamo che per $\tau \rightarrow 0+$

$$u(t) \rightarrow 1(t) \quad \text{e} \quad y(t) \rightarrow \begin{cases} e^{-2t} & \text{per } t < 0 \\ 1 + 2e^{-2t} & \text{per } t > 0 \end{cases}$$

Da $\lim_{t \rightarrow 0+} 1 + 2e^{-2t} = 3$ ovvero $y_+ = 3$.

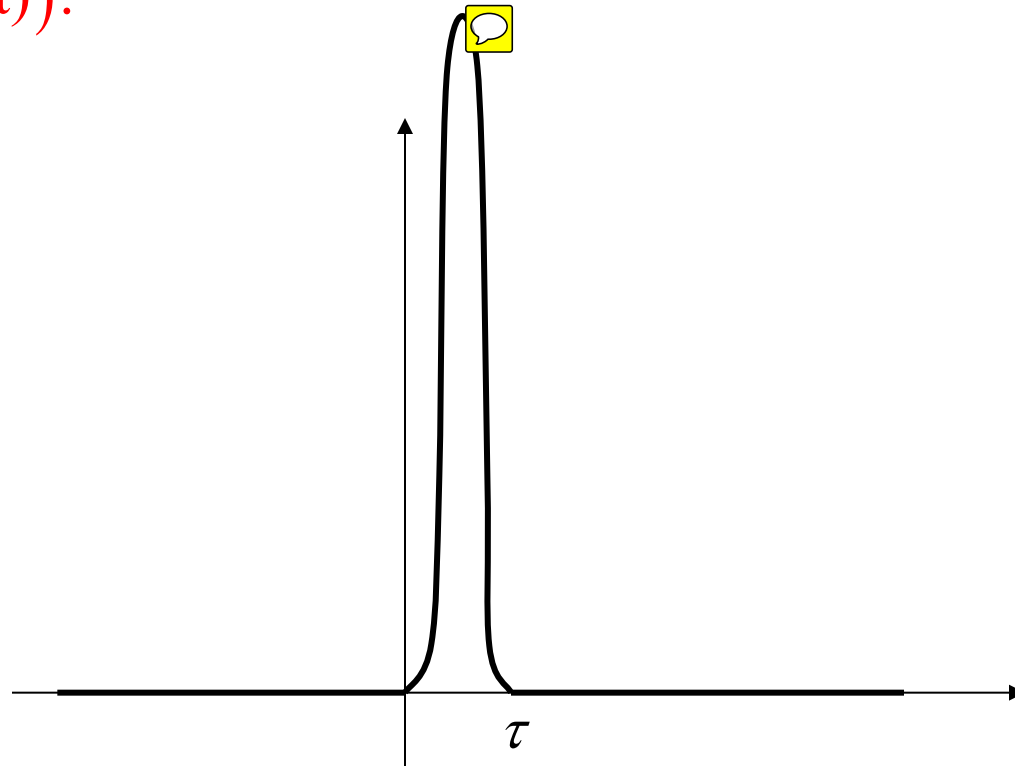
Questa è la soluzione che vorremmo trovare subito senza utilizzare il metodo di *smoothing*. 



Quando $\tau \rightarrow 0$ + $Du(t)$ in un intorno dell'origine diverge all'infinito!

$$Du(t) = 6 \frac{t}{\tau^2} - 6 \frac{t^2}{\tau^3} \quad \text{per } t \in [0, \tau] \Rightarrow \max_{t \in [0, \tau]} Du(t) = Du(t) \Big|_{t=\frac{\tau}{2}} = \frac{3}{2\tau}$$

$Du(t)$ converge ad una "funzione" impulsiva (distribuzione) chiamata delta di Dirac ($\delta(t)$).

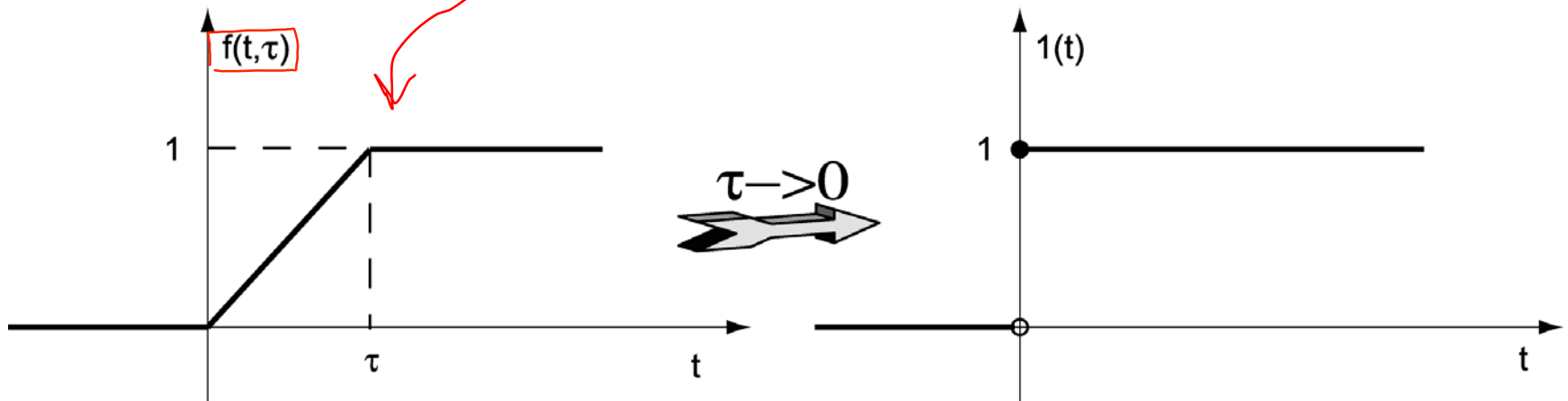


Cenni di teoria delle funzioni impulsive

Gradino unitario: $1(t) := \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$

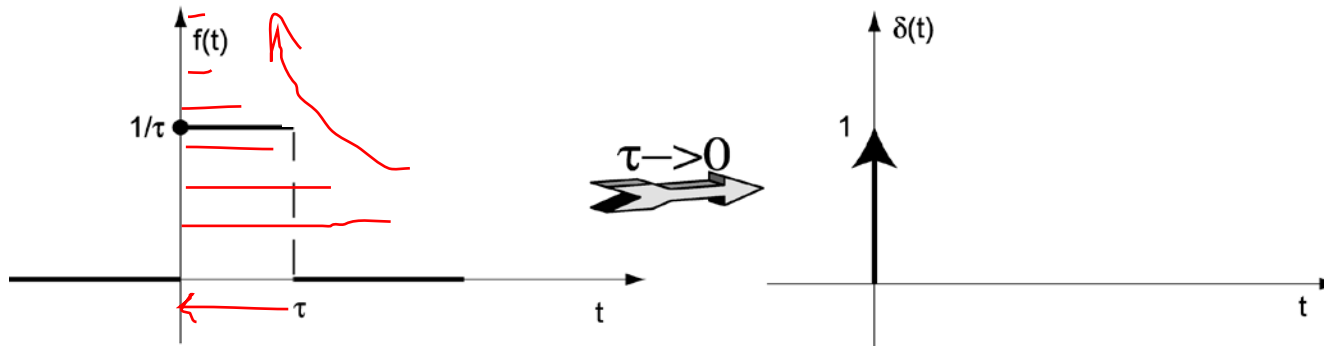
Introduciamo $f(t; \tau) \in C^{0,\infty}$: $f(t; \tau) := \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{1}{\tau}t & 0 \leq t \leq \tau \\ 1 & t > \tau \end{cases}$

$$\lim_{\tau \rightarrow 0+} f(t; \tau) = 1(t)$$



$$Df(t; \tau) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{1}{\tau} & 0 \leq t < \tau \\ 0 & t \geq \tau \end{cases}$$

Formalmente definiamo
 $\delta(t) := \lim_{\tau \rightarrow 0+} Df(t; \tau)$
 (è la delta di Dirac)



$\delta(t)$ è una distribuzione o, più informalmente, una funzione impulsiva.

- **Interpretazione di $\delta(t)$**

$\delta(t)$ è la **derivata generalizzata** del gradino unitario: $\delta(t) := D^* 1(t)$

D^* è l'operatore della derivata generalizzata: è un operatore lineare (come lo è D).

Più precisamente, D^* è la derivata (in senso) distribuzionale.

- Proprietà della delta di Dirac:

assumendo $t_a < T < t_b$:



$$\int_{t_a}^{t_b} \delta(t - T) dt = 1; \quad \int_{t_a}^{t_b} f(t) \delta(t - T) dt = f(T)$$

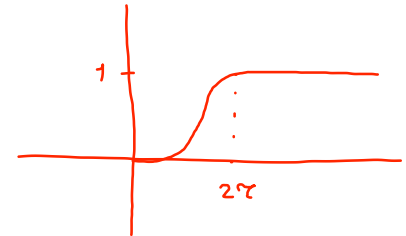
- Introduciamo le derivate (generalizzate) di $\delta(t)$:

$D^{*i} \delta(t) \equiv$ derivata generalizzata di ordine i della delta di Dirac

$$\delta^{(i)}(t) := D^{*i} \delta(t)$$

Costruzione di $\delta^{(1)}(t)$ mediante limite di una funzione continua a tratti.

$$f(t; \tau) := \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{1}{2\tau^2} t^2 & 0 \leq t \leq \tau \\ -\frac{1}{2\tau^2} t^2 + \frac{2}{\tau} t - 1 & \tau \leq t \leq 2\tau \\ 1 & t > 2\tau \end{cases} ; f(t; \tau) \in C^{1, \infty}$$

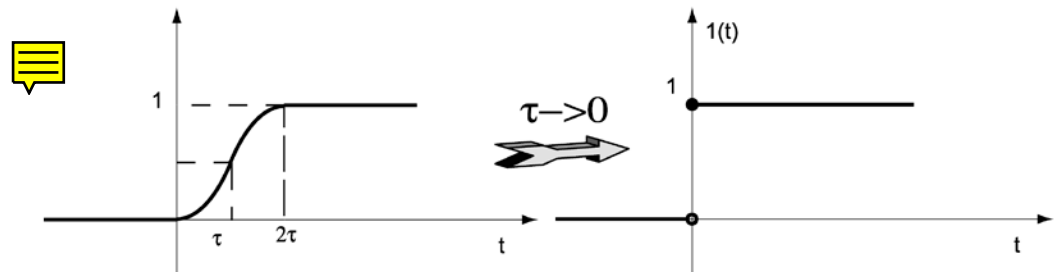


$$Df(t; \tau) := \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{1}{\tau^2} t & 0 \leq t \leq \tau \\ -\frac{1}{\tau^2} t + \frac{2}{\tau} & \tau \leq t \leq 2\tau \\ 0 & t > 2\tau \end{cases}$$

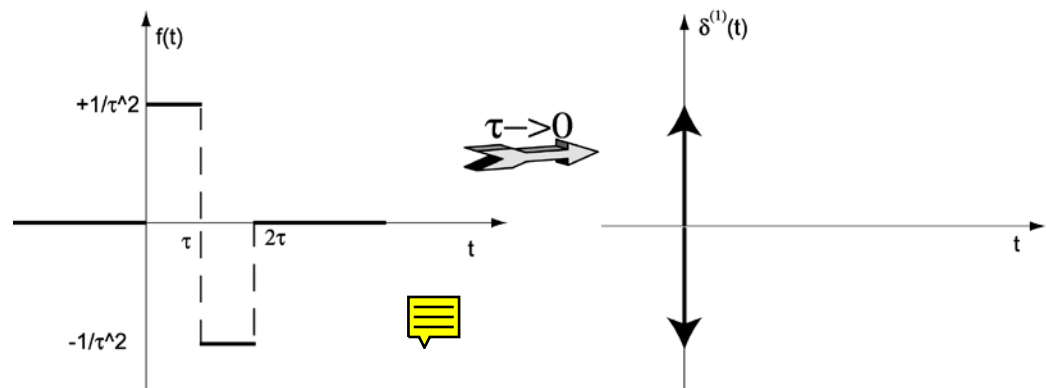
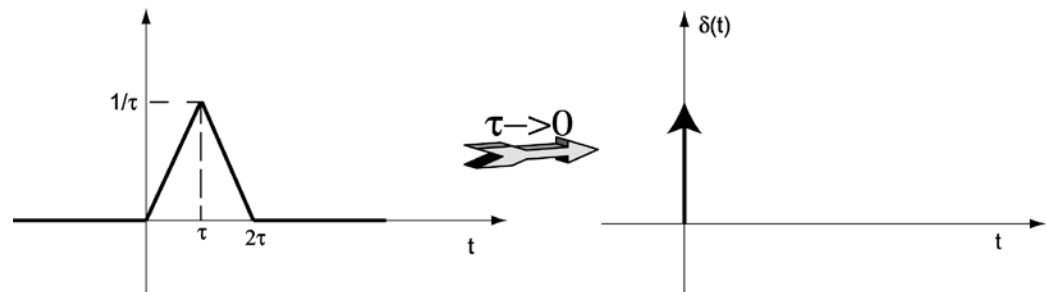
$$D^2 f(t; \tau) := \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{1}{\tau^2} & 0 \leq t \leq \tau \\ -\frac{1}{\tau^2} & \tau \leq t \leq 2\tau \\ 0 & t > 2\tau \end{cases}$$

$$1(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0+} f(t; \tau) \quad \boxed{\delta(t) := D^* 1(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0+} Df(t; \tau)}$$

$$\delta^{(1)}(t) := D^* \delta(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0+} D^2 f(t; \tau)$$



Questo metodo costruttivo si può estendere per mostrare il significato di $\delta^{(i)}(t)$, $i > 1$.



- Derivate generalizzate del gradino unitario:

$$D^* 1(t) = \delta(t)$$

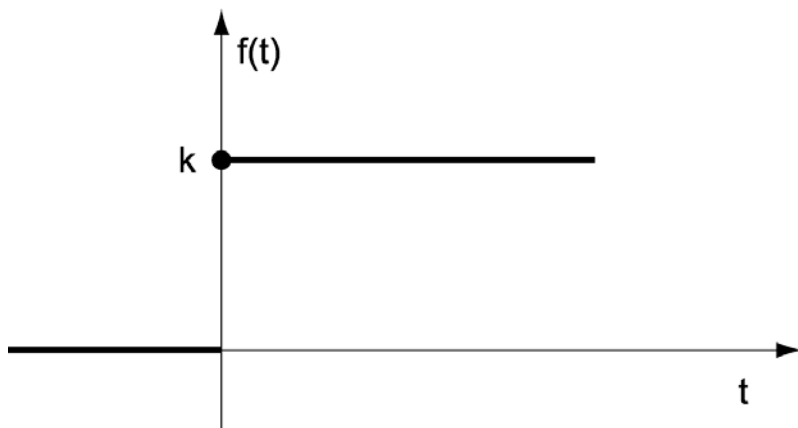
$$D^{*2} 1(t) = D^* \left(D^* 1(t) \right) = D^* \delta(t) = \delta^{(1)}(t)$$

$$D^{*3} 1(t) = D^* \left(D^{*2} 1(t) \right) = D^* \delta^{(1)}(t) = \delta^{(2)}(t)$$

.....

$$D^{*n} 1(t) = \delta^{(n-1)}(t)$$

- Derivate generalizzate della funzione gradino $f(t) = k1(t)$



$$D^*(k1(t)) = kD^*(1(t)) = k\delta(t)$$

$$D^{*2}(k1(t)) = kD^{*2}(1(t)) = k\delta^{(1)}(t)$$

.....

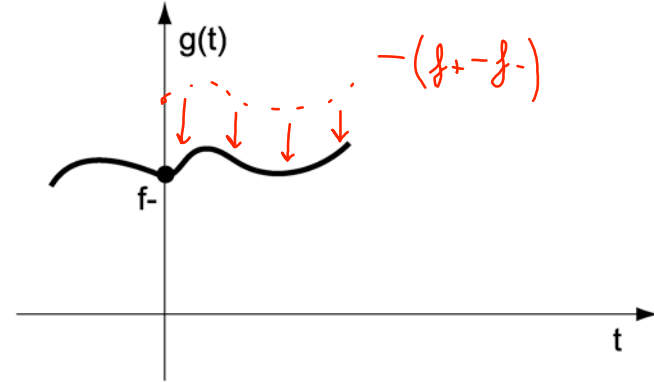
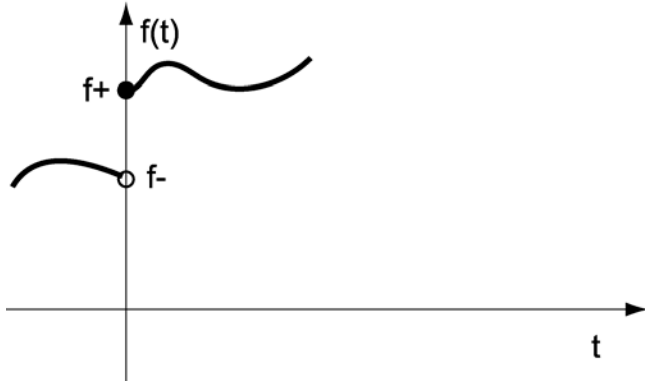
$$D^{*n}(k1(t)) = k\delta^{(n-1)}(t)$$

• Derivate generalizzate di una funzione discontinua

$f \in PC^\infty$ e sia $t = 0$ il solo istante di discontinuità della f .

$$g(t) := \begin{cases} f(t) & t < 0 \\ f(t) - (f_+ - f_-) & t \geq 0 \end{cases} ; \quad g(t) \in C^{0,\infty}$$

$$\Rightarrow g(t) = f(t) - (f_+ - f_-)1(t) \quad \square$$



Rappresentazione della funzione discontinua $f(t)$ (relazione di ordine zero):

$$f(t) = g(t) + (f_+ - f_-)1(t)$$

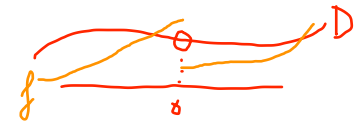


ovvero

f. discontinua = f. continua + f. a gradino

$$f(t) = g(t) + (f_+ - f_-)l(t)$$

Derivando in senso usuale $Df(t) = Dg(t) \quad \forall t \neq 0$.



Assunzione: la derivata generalizzata di una funzione continua

sia: $D^*g(t) := Dg(t^+)$

Applichiamo alla relazione di ordine zero l'operatore D^* :

$$D^*f(t) = D^*g(t) + D^*((f_+ - f_-)l(t))$$

$$D^*f(t) = Dg(t^+) + (f_+ - f_-)\delta(t)$$

$$D^*f(t) = Df(t^+) + (f_+ - f_-)\delta(t)$$



derivata gen. di ordine 1 = f. discontinua + f. impulsiva (di ordine 0)

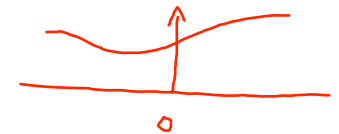
$$D^* f(t) = Df(t) + (f_+ - f_-)\delta(t)$$

Se $t < 0$ o $t > 0$: $D^* f(t) = Df(t)$!?

Se $t = 0$: $D^* f(0) = Df(0^+) + (f_+ - f_-)\delta(0) = (f_+ - f_-)\delta(0)$

La funzione discontinua $Df(t)$ può essere scomposta nella
somma di una funzione continua ed una funzione a gradino:

$$g_1(t) := Df(t) - (Df_+ - Df_-)1(t) \Rightarrow g_1(t) \in C^{0,\infty}$$



$$D^* f(t) = g_1(t) + (Df_+ - Df_-)1(t) + \underline{(f_+ - f_-)\delta(t)}$$

d. generalizzata di ordine 1 = f. continua + f. a gradino + f. impulsiva di ordine 0

$$g_1(t) = Df(t) - (Df_+ - Df_-)1(t) \qquad D^* f(t) = g_1(t) + (Df_+ - Df_-)1(t) + (f_+ - f_-)\delta(t)$$

Applicando la derivata generalizzata alla relazione che esprime $D^* f(t)$:

$$D^{*2} f(t) = Dg_1(t) + (Df_+ - Df_-)\delta(t) + \underbrace{(f_+ - f_-)\delta^{(1)}(t)} \quad \equiv$$

Dalla definizione di $g_1(t)$: $Dg_1(t) = D^2 f(t)$

$$\square D^{*2} f(t) = \overbrace{D^2 f(t)} + \overbrace{(Df_+ - Df_-)\delta(t)} + \overbrace{(f_+ - f_-)\delta^{(1)}(t)}$$

$$\text{Se } t < 0 \text{ o } t > 0: D^{*2} f(t) = D^2 f(t) \quad \equiv$$

$$\text{Se } t = 0: D^{*2} f(0) = (Df_+ - Df_-)\delta(0) + (f_+ - f_-)\delta^{(1)}(0)$$

$$g_2(t) := D^2 f(t) - (D^2 f_+ - D^2 f_-)1(t) \Rightarrow g_2(t) \in C^{0,\infty}$$

$$D^{*2} f(t) = \underbrace{g_2(t)} + \underbrace{(D^2 f_+ - D^2 f_-)1(t)} + \underbrace{(Df_+ - Df_-)\delta(t)} + \underbrace{(f_+ - f_-)\delta^{(1)}(t)}$$

[d. gen. di ord. 2 = f. cont. + f. a gradino + f. impul. di ord. 0 + f. impul. di ord. 1]

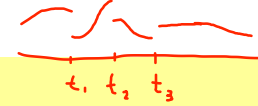
Iterando il ragionamento si ottiene:  

$$D^{*n} f(t) = D^n f(t) + \left(D^{n-1} f_+ - D^{n-1} f_- \right) \delta(t) + \cdots + \left(f_+ - f_- \right) \delta^{(n-1)}(t)$$

Se $t < 0$ o $t > 0$: $D^{*n} f(t) = D^n f(t)$

Se $t = 0$: $D^{*n} f(0) = \left(D^{n-1} f_+ - D^{n-1} f_- \right) \delta(0) + \cdots + \left(f_+ - f_- \right) \delta^{(n-1)}(0)$

Più in generale: $f \in PC^\infty$ con $t_1, t_2, \dots$ istanti di possibile discontinuità.



$$\begin{aligned}
 D^{*n} f(t) = & D^n f(t) + \\
 & + \left(D^{n-1}(t_1+) - D^{n-1}(t_1-) \right) \delta(t - t_1) + \dots + \left(f(t_1+) - f(t_1-) \right) \delta^{(n-1)}(t - t_1) + \\
 & + \left(D^{n-1}(t_2+) - D^{n-1}(t_2-) \right) \delta(t - t_2) + \dots + \left(f(t_2+) - f(t_2-) \right) \delta^{(n-1)}(t - t_2) + \\
 & + \dots
 \end{aligned}$$

$$D^{*n} f(t) = D^n f(t) \quad \forall t \in \mathbb{R} - \{t_1, t_2, \dots\}$$

$$D^{*n} f(t_1) = \left(D^{n-1}(t_1+) - D^{n-1}(t_1-) \right) \delta(0) + \dots + \left(f(t_1+) - f(t_1-) \right) \delta^{(n-1)}(0)$$

$$D^{*n} f(t_2) = \left(D^{n-1}(t_2+) - D^{n-1}(t_2-) \right) \delta(0) + \dots + \left(f(t_2+) - f(t_2-) \right) \delta^{(n-1)}(0)$$

...

Principio di identità delle funzioni impulsive

Le funzioni impulsive

$$\left. \begin{aligned} c_{-1} &+ c_0 \delta(0) + c_1 \delta^{(1)}(0) + \cdots + c_k \delta^{(k)}(0) \\ d_{-1} &+ d_0 \delta(0) + d_1 \delta^{(1)}(0) + \cdots + d_k \delta^{(k)}(0) \end{aligned} \right\} \text{ e}$$

sono uguali fra loro se e solo se

$$c_0 = d_0, \quad c_1 = d_1, \quad \dots, \quad c_k = d_k \quad \text{☰}$$

Esempi

$$\cancel{7} + \boxed{3\delta(0) + 9\delta^{(1)}(0)} = \cancel{1} + \boxed{3\delta(0) + 9\delta^{(1)}(0)} \quad \text{Vero}$$

$$7 + 3\delta(0) + 9\delta^{(1)}(0) = 7 + 3\delta(0) + 4\delta^{(1)}(0) \quad \text{Falso}$$

$$7 + 3\delta(0) + 9\delta^{(1)}(0) = 7 + 3\delta(0) + 9\delta^{(1)}(0) + 2\delta^{(2)}(0) \quad \text{Falso}$$

Ritorniamo all'esempio iniziale: l'eq. diff. di Σ interpretata in senso distribuzionale è

$$D^* y(t) + 2y(t) = 2D^* u(t) + 2u(t)$$

Deve essere soddisfatta per ogni $t \in \mathbb{R}$ compresi gli istanti di discontinuità.

Per $t = 0$

$$[Dy_+ + (y_+ - y_-)\delta(0)] + 2y_+ = 2[Du_+ + (u_+ - u_-)\delta(0)] + 2u_+$$

$$Dy_+ + \underbrace{[(y_+ - y_-)\delta(0)]}_{\text{green}} + 2y_+ = 2Du_+ + \underbrace{[2(u_+ - u_-)\delta(0)]}_{\text{red}} + 2u_+$$

$$\underbrace{y_+ - y_-}_{\text{red}} = \underbrace{2(u_+ - u_-)}_{\text{red}}$$

$$\Rightarrow \underbrace{y_+}_{\text{red}} = y_- + 2(u_+ - u_-) = 1 + 2(1 - 0) = \mathbf{3 !}$$

Insieme dei behaviors

Dato un sistema dinamico Σ descritto dall'eq. differenziale

$$\sum_{i=0}^n a_i D^i y = \sum_{i=0}^m b_i D^i u$$

si definisce insieme dei behaviors di Σ

$$\mathcal{B} := \left\{ (u, y) \in PC^\infty \times PC^\infty : \sum_{i=0}^n a_i D^{*i} y = \sum_{i=0}^m b_i D^{*i} u \right\}$$

L'equazione differenziale è soddisfatta **in senso distribuzionale** per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Le condizioni iniziali associate a Σ al tempo $t = 0$ sono

$$y(0), Dy(0), \dots, D^{n-1}y(0)$$

$$u(0), Du(0), \dots, D^{m-1}u(0)$$

Se $t = 0$ è istante di discontinuità emergono le condizioni al tempo $0 -$ e al tempo $0 +$.

Le relazioni fra i valori al tempo $0 -$

$$y_-, Dy_-, \dots, D^{n-1}y_-; u_-, Du_-, \dots, D^{m-1}u_-$$

e quelli al tempo $0 +$

$$y_+, Dy_+, \dots, D^{n-1}y_+; u_+, Du_+, \dots, D^{m-1}u_+$$

sono determinabili uguagliando le espressioni impulsive dell'eq. differenziale al tempo $t = 0$.

Relazioni fra le condizioni iniziali in un istante di discontinuità ($\rho \geq 1$)

$$y_+ = y_- , Dy_+ = Dy_- , \dots , D^{\rho-1}y_+ = D^{\rho-1}y_-$$

$$[\rho = n - m]$$

$$\begin{bmatrix} a_n & 0 & \cdots & 0 \\ a_{n-1} & a_n & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ a_{\rho+2} & & \ddots & a_n & 0 \\ a_{\rho+1} & a_{\rho+2} & \cdots & a_{n-1} & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D^\rho y_+ - D^\rho y_- \\ D^{\rho+1} y_+ - D^{\rho+1} y_- \\ \vdots \\ D^{n-1} y_+ - D^{n-1} y_- \end{bmatrix} =$$

↳ SCITE

$$= \begin{bmatrix} b_m & 0 & \cdots & 0 \\ b_{m-1} & b_m & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ b_2 & & \ddots & b_m & 0 \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_{m-1} & b_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_+ - u_- \\ Du_+ - Du_- \\ \vdots \\ D^{m-1}u_+ - D^{m-1}u_- \end{bmatrix}$$

↳ entrate

Relazioni fra le condizioni iniziali in un istante di discontinuità $(\rho = 0)$



$$\begin{bmatrix} a_n & 0 & \cdots & 0 \\ a_{n-1} & a_n & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ a_2 & & \ddots & a_n & 0 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_+ - y_- \\ Dy_+ - Dy_- \\ \vdots \\ D^{n-1}y_+ - D^{n-1}y_- \end{bmatrix} = \\
 = \begin{bmatrix} b_n & 0 & \cdots & 0 \\ b_{n-1} & b_n & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ b_2 & & \ddots & b_n & 0 \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} & b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_+ - u_- \\ Du_+ - Du_- \\ \vdots \\ D^{n-1}u_+ - D^{n-1}u_- \end{bmatrix}$$

$$\overline{C^{l,\infty}} := \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f \in C^{l,\infty} \wedge f \notin C^{l+1,\infty}\}$$

Proprietà - Sia $(u(t), y(t)) \in \mathcal{B}$ con $u(t)$ funzione discontinua.

Se $\rho = 0$ allora anche l'uscita $y(t)$ è una funzione discontinua.

Se $\rho \geq 1$ allora $y(t) \in \overline{C^{\rho-1,\infty}}$.

Dim.: Caso $\rho = 0 \Rightarrow a_n(y_+ - y_-) = b_n(u_+ - u_-) \dots$

Caso $\rho \geq 1 \Rightarrow y_+ = y_- , Dy_+ = Dy_- , \dots , D^{\rho-1}y_+ = D^{\rho-1}y_- ,$

$$a_n(D^\rho y_+ - D^\rho y_-) = b_m(u_+ - u_-) \quad \square$$

Proprietà - relazione fra i gradi di continuità dell'ingresso e dell'uscita

Sia $(u(t), y(t)) \in \mathcal{B}$ e $p \in \mathbb{N}$. Allora

$$u(t) \in C^{p,\infty} \Leftrightarrow y(t) \in C^{\rho+p,\infty}, \quad u(t) \in \overline{C^{p,\infty}} \Leftrightarrow y(t) \in \overline{C^{\rho+p,\infty}}$$

Dim. (cenno):

Se $p = 0$ occorre provare $u(t) \in C^{0,\infty} \Leftrightarrow y(t) \in C^{\rho,\infty}$ e $u(t) \in \overline{C^{0,\infty}} \Leftrightarrow y(t) \in \overline{C^{\rho,\infty}}$

$$a_n(D^\rho y_+ - D^\rho y_-) = b_m(u_+ - u_-)$$

$$a_{n-1}(D^\rho y_+ - D^\rho y_-) + a_n(D^{\rho+1}y_+ - D^{\rho+1}y_-) = b_{m-1}(u_+ - u_-) + b_m(Du_+ - Du_-) \dots \quad \square$$

Un cenno storico sulle funzioni impulsive

Heaviside (1893) – calcolo operativo

van der Pol (1929) – introduce il termine “funzione impulsiva”

Dirac (1930) – introduce la “delta” 

Sobolev (1936) – concetto di “soluzione debole”

Schwartz (1951) – sistemazione rigorosa dell'argomento: teoria delle **distribuzioni**.

I concetti introdotti dalla lezione:

- Il problema delle funzioni discontinue ed il metodo di smoothing
- Introduzione euristica alle funzioni impulsive
- Derivata generalizzata (distribuzionale) di una funzione derivabile a tratti
- Definizione distribuzionale dell'insieme dei behaviors
- Relazioni fra le condizioni iniziali in un istante di discontinuità
- Relazione fra i gradi di continuità dei segnali di ingresso e di uscita