

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica, Elettronica e delle
Telecomunicazioni

Lezione n. 6 di Fondamenti di Controlli Automatici
prof. Aurelio Piazzi

La funzione di trasferimento

Università degli Studi di Parma – a.a. 2014-2015

Spazio delle sequenze impulsive:

$$\mathcal{I}^* \triangleq \left\{ d : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^* : d(t) = \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{j=0}^{r_i} c_{ij} \delta^{(j)}(t - t_i), c_{ij} \in \mathbb{R} \right\}$$

Estensione distribuzionale delle funzioni derivabili
a tratti: $PC^{\infty*} \triangleq PC^{\infty} + \mathcal{I}^*$ 

Esempi :

$$d(t) = 7\delta(t) + 4\delta^{(1)}(t) + 32\delta(t-10) + 2\delta^{(2)}(t-10) \in \underline{\mathcal{I}^*}$$

$$f(t) = 1(t) + 2t \cdot 1(t-5) \in PC^{\infty}$$

$$D^* f(t) = \delta(t) + 2 \cdot 1(t-5) + 10\delta(t-5) \in PC^{\infty*}$$

$$D^{*2} f(t) = \delta^{(1)}(t) + 2\delta(t-5) + 10\delta^{(1)}(t-5) \in \mathcal{I}^* \subset PC^{\infty*}$$

$$\mathcal{L}[f(t)] \triangleq \int_{0-}^{+\infty} f(t)e^{-st} dt$$

$$\int_{0-}^{+\infty} f(t)e^{-st} dt = \lim_{t_a \rightarrow 0-} \lim_{t_b \rightarrow +\infty} \int_{t_a}^{t_b} f(t)e^{-st} dt$$

Esempi di trasformate di Laplace di funzioni impulsive :

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = \int_{0-}^{+\infty} \delta(t)e^{-st} dt = e^{-s \cdot 0} = 1$$

$$\mathcal{L}[\delta^{(1)}(t)] = \int_{0-}^{+\infty} \delta^{(1)}(t)e^{-st} dt = \left[\delta(t)e^{-st} \right]_{0-}^{+\infty} - \int_{0-}^{+\infty} \delta(t)(-se^{-st}) dt = s$$

$$\mathcal{L}[\delta(t) + 2\delta^{(1)}(t) + 9\delta^{(2)}(t)] = 1 + 2s + 9s^2$$

$$\mathcal{L}[7t^3 + \delta(t)] = 7 \frac{3!}{s^4} + 1 = \frac{s^4 + 42}{s^4}$$

$$\mathcal{L}[te^{-3t} + \delta(t-2)] = \frac{1}{(s+3)^2} + e^{-2s}$$

La trasformata della derivata generalizzata

Sia $f \in PC^\infty(PC^{\infty*})$ segue

$$\mathcal{L}[D^* f(t)] = sF(s) - f(0-)$$

Dim.:

Per semplicità si abbia un solo istante di discontinuità in $t = 0$:

$$D^* f(t) = Df(t) + (f_+ - f_-) \delta(t) \quad \square$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[D^* f(t)] &= \mathcal{L}[Df(t)] + (f_+ - f_-) \mathcal{L}[\delta(t)] \quad \square \\ &= sF(s) - f_+ + (f_+ - f_-) \end{aligned}$$

□

derivate generalizzate di ordine superiore

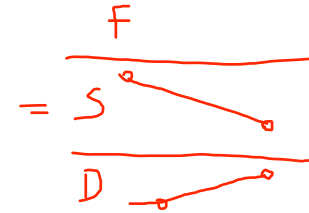
$$\begin{aligned}\mathcal{L}[D^{*2}f] &= \mathcal{L}[D^*(D^*f)] = s\mathcal{L}[D^*f] - D^*f(0-) = \\ &= s(sF(s) - f(0-)) - Df(0-) = \\ &= s^2F(s) - sf(0-) - Df(0-)\end{aligned}$$

generalizzando:

$$D^i f_- := D^i f(0-) \quad \text{con } i = 0, 1, 2, \dots$$

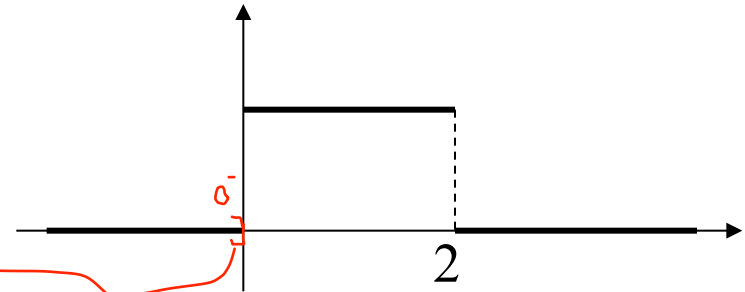
$$\mathcal{L}[D^{*i}f] = s^i F(s) - s^{i-1}f_- - s^{i-2}Df_- - \dots - sD^{i-2}f_- - D^{i-1}f_-$$

$$\mathcal{L}[D^{*i}f] = s^i F(s) - \sum_{j=0}^{i-1} s^j D^{i-1-j} f_-$$



Esempi:

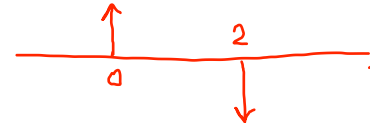
$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{per } 0 \leq t < 2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$



$$f(t) = 1(t) - 1(t-2)$$

$$\mathcal{L}[D^* f] = sF(s) - \cancel{f(0-)} = s \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s} e^{-2s} \right) = 1 - e^{-2s}$$

con calcolo diretto: $\mathcal{L}[D^* f] = \mathcal{L}[\delta(t) - \delta(t-2)] = 1 - e^{-2s}$



$$\mathcal{L}[\delta^{(1)}(t)] = \mathcal{L}[D^* \delta(t)] = s\mathcal{L}[\delta(t)] - \delta(0-) = s \cdot 1 - 0 = s$$

$$\mathcal{L}[\delta^{(2)}(t)] = \mathcal{L}[D^{*2} \delta(t)] = s^2 \mathcal{L}[\delta(t)] - s\delta(0-) - \delta^{(1)}(0-) = s^2$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}[\delta^{(i)}(t)] = s^i, \quad i \in \mathbb{N}$$

Estensione dell'insieme dei behaviors

Dato un sistema dinamico Σ descritto dall'eq. differenziale

$$\sum_{i=0}^n a_i D^i y = \sum_{i=0}^m b_i D^i u$$

si definisce estensione impulsiva dei behaviors o **behavior esteso** di Σ

$$\mathcal{B}^* := \left\{ (u, y) \in PC^{\infty*} \times PC^{\infty*} : \sum_{i=0}^n a_i D^{*i} y = \sum_{i=0}^m b_i D^{*i} u \right\} \quad \text{💬}$$

Ancora l'equazione differenziale è soddisfatta in senso distribuzionale per ogni $t \in \mathbb{R}$.

$$\mathcal{B} \subset \mathcal{B}^*$$

Proprietà

Sia $(u, y) \in \mathcal{B}^*$, segue $(D^*u, D^*y) \in \mathcal{B}^*$.

Dim.:

$$\sum_{i=0}^n a_i D^{*i} y = \sum_{i=0}^m b_i D^{*i} u$$

Applico l'operatore D^* ad entrambi i membri dell'eq.:

$$\sum_{i=0}^n a_i D^{*i+1} y = \sum_{i=0}^m b_i D^{*i+1} u$$

$$\sum_{i=0}^n a_i D^{*i} (D^* y) = \sum_{i=0}^m b_i D^{*i} (D^* u)$$

□

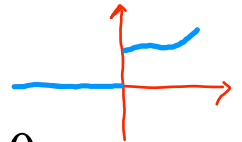
Def.:

Un segnale di ingresso $u(t) \not\equiv 0$ per $t > 0$ è detto **azione forzante** (su Σ).

Sia $(u, y) \in \mathcal{B}$ con $u(t)$ azione forzante e con **condizioni iniziali** al tempo $t = 0$ — **tutte nulle**:

$$y_- = 0, Dy_- = 0, \dots, D^{n-1}y_- = 0 \quad \text{e} \quad u_- = 0, Du_- = 0, \dots, D^{m-1}u_- = 0$$

Il segnale $y(t)$ per $t > 0$ è detto **risposta (evoluzione) forzata** (di Σ).



Proprietà (della coppia azione forzante - risposta forzata)

Sia $(u, y) \in \mathcal{B}^*$ con $u(t)$ azione forzante ed $y(t)$ risposta forzata. Segue

$$\left(\int_{0-}^t u(v)dv, \int_{0-}^t y(v)dv \right) \in \mathcal{B}^* \quad \square$$

Dim. :

$$\sum_{i=0}^n a_i D^{*i} y(t) = \sum_{i=0}^m b_i D^{*i} u(t)$$

Applico l'operatore $\int_{0-}^t$ ad entrambi i membri dell'eq.:

$$\sum_{i=0}^n a_i \int_{0-}^t D^{*i} y(v) dv = \sum_{i=0}^m b_i \int_{0-}^t D^{*i} u(v) dv$$

$$\begin{aligned} \int_{0-}^t D^{*i} y(v) dv &= \int_{0-}^t \text{🗨️} D^{*} \left(D^{*i-1} y(v) \right) dv = \left[D^{*i-1} y(v) \right]_{0-}^t \\ &= D^{*i-1} y(t) - D^{*i-1} y(0-) = D^{*i-1} y(t) - D^{i-1} y(0-) = D^{*i-1} y(t) \end{aligned}$$

$$\text{analogamente } \int_{0-}^t D^{*i} u(v) dv = D^{*i-1} u(t)$$

Dim. (continua) :

$$\sum_{i=1}^n a_i D^{*i-1} y(t) + a_0 \int_{0-}^t y(v) dv = \sum_{i=1}^m b_i D^{*i-1} u(t) + b_0 \int_{0-}^t u(v) dv$$

valgono $y(t) = D^* \left(\int_{0-}^t y(v) dv \right)$, $u(t) = D^* \left(\int_{0-}^t u(v) dv \right)$

$$\sum_{i=1}^n a_i D^{*i} \left(\int_{0-}^t y(v) dv \right) + a_0 \int_{0-}^t y(v) dv = \sum_{i=1}^m b_i D^{*i} \left(\int_{0-}^t u(v) dv \right) + b_0 \int_{0-}^t u(v) dv$$

$$\sum_{i=0}^n a_i D^{*i} \left(\int_{0-}^t y(v) dv \right) = \sum_{i=0}^m b_i D^{*i} \left(\int_{0-}^t u(v) dv \right)$$



□

Il problema fondamentale dell'analisi nel dominio del tempo di un sistema Σ

Note le condizioni iniziali al tempo 0 –
 $y_-, Dy_-, \dots, D^{n-1}y_-$ e $u_-, Du_-, \dots, D^{m-1}u_-$
e l'azione forzante $u(t)$, $t \geq 0$
determinare la risposta $y(t)$, $t \geq 0$.



Soluzione dell'equazione differenziale

I segnali $u(t)$ e $y(t)$ soddisfano in senso distribuzionale l'equazione differenziale di Σ :

$$\sum_{i=0}^n a_i D^{*i} y(t) = \sum_{i=0}^m b_i D^{*i} u(t)$$

Applichiamo all'equazione la trasformata di L.:

$$\sum_{i=0}^n a_i \mathcal{L}[D^{*i} y(t)] = \sum_{i=0}^m b_i \mathcal{L}[D^{*i} u(t)]$$

$$\sum_{i=1}^n a_i \mathcal{L}[D^{*i} y(t)] + a_0 Y(s) = \sum_{i=1}^m b_i \mathcal{L}[D^{*i} u(t)] + b_0 U(s)$$

$$\sum_{i=1}^n a_i \left(s^i Y(s) - \sum_{j=0}^{i-1} s^j D^{i-1-j} y_- \right) + a_0 Y(s) = \sum_{i=1}^m b_i \left(s^i U(s) - \sum_{j=0}^{i-1} s^j D^{i-1-j} u_- \right) + b_0 U(s)$$

$$\left(\sum_{i=0}^n a_i s^i \right) Y(s) - \sum_{i=1}^n a_i \sum_{j=0}^{i-1} D^{i-1-j} y_- s^j = \left(\sum_{i=0}^m b_i s^i \right) U(s) - \sum_{i=1}^m b_i \sum_{j=0}^{i-1} D^{i-1-j} u_- s^j$$

$$Y(s) = \frac{\sum_{i=0}^m b_i s^i}{\sum_{i=0}^n a_i s^i} U(s) + \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{i-1} a_i D^{i-1-j} y_- s^j - \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{i-1} b_i D^{i-1-j} u_- s^j}{\sum_{i=0}^n a_i s^i}$$

$$\rightarrow Y_{\text{for.}}(s) := \mathcal{L}[y_{\text{for.}}(t)] := \frac{\sum_{i=0}^m b_i s^i}{\sum_{i=0}^n a_i s^i} U(s)$$

$$\rightarrow Y_{\text{lib.}}(s) := \mathcal{L}[y_{\text{lib.}}(t)] := \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{i-1} a_i D^{i-1-j} y_{-} s^j - \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{i-1} b_i D^{i-1-j} u_{-} s^j}{\sum_{i=0}^n a_i s^i}$$

$$\underline{Y(s) = Y_{\text{for.}}(s) + Y_{\text{lib.}}(s)}$$

$$\Rightarrow y(t) = y_{\text{for.}}(t) + y_{\text{lib.}}(t), \quad t \geq 0$$

$y_{\text{for.}}(t)$ è la risposta forzata di Σ all'azione forzante

$y_{\text{lib.}}(t)$ è definita quale **risposta (evoluzione) libera** di Σ

Def. - Funzione di Trasferimento

Si definisce f.d.t. di un sistema la funzione di variabile complessa $G(s)$ per la quale è valida la relazione

$$\left[\mathcal{L}[y(t)] = G(s)\mathcal{L}[u(t)] \right]$$

$\forall (u(t), y(t)) \in \mathcal{B}$ con $u(t) = 0, y(t) = 0$ per $t < 0$.

Proprietà : La f.d.t. del sistema dinamico Σ introdotto è

$$G(s) = \frac{\sum_{i=0}^m b_i s^i}{\sum_{i=0}^n a_i s^i} \quad \left(=: \frac{b(s)}{a(s)} \right)$$



$G = \text{GAIN}$

È un modello matematico alternativo all'eq. diff.

Se le condizioni iniziali sono tutte nulle (sistema in quiete per $t = 0^-$):

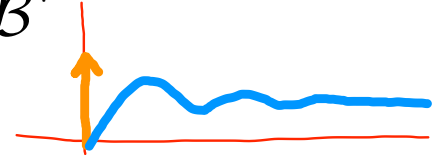
$$Y(s) = G(s)U(s)$$

$Y_{\text{for.}}(s) = G(s)U(s)$ (trasformata della risposta forzata)

Sia $g(t) := \mathcal{L}^{-1}[G(s)]$ ($g(t) = 0, t < 0$): $g(t)$ è la **risposta all'impulso**

a partire da una condizione di quiete: $(\delta(t), g(t)) \in \mathcal{B}^*$

Dal teorema di convoluzione:



$$y_{\text{for.}}(t) = \int_0^t g(t-v)u(v)dv \quad \text{od anche} \quad y_{\text{for.}}(t) = \int_0^t u(t-v)g(v)dv$$

Soluzione generale dell'equazione differenziale ($t \geq 0$)

$$y(t) = \int_0^t g(t-v)u(v)dv + \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{i-1} a_i D^{i-1-j} y_- s^j - \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{i-1} b_i D^{i-1-j} u_- s^j}{\sum_{i=0}^n a_i s^i} \right]$$

Esempio: riprendiamo il sistema Σ descritto da

$$Dy(t) + 2y(t) = 2Du(t) + 2u(t)$$

con $y(t) = e^{-2t}$, $t < 0$ e $u(t) = 1(t)$

Determinare $y(t)$, $t \geq 0$.

Condizioni iniziali al tempo 0^- : $y_- = 1$, $u_- = 0$

$$D^*y(t) + 2y(t) = 2D^*u(t) + 2u(t)$$

applichiamo $\mathcal{L}[\cdot]$:

$$(sY(s) - y_-) + 2Y(s) = 2(sU(s) - u_-) + 2U(s)$$

$$(s + 2)Y(s) = (2s + 2)U(s) + y_- - 2u_-$$

$$Y(s) = \frac{2s+2}{s+2}U(s) + \frac{y_- - 2u_-}{s+2}$$

$$G(s) = \frac{2s+2}{s+2} \text{ è la funzione di trasferimento}$$

$$\frac{y_- - 2u_-}{s+2} \text{ è la trasformata di Laplace della risposta libera}$$

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[2 - \frac{2}{s+2}\right] = 2\delta(t) - 2e^{-2t}$$

$$y(t) = \int_0^t \left(2\delta(t-v) - 2e^{-2(t-v)}\right)u(v)dv + (y_- - 2u_-)e^{-2t}$$

$$u(t) = 1(t) \text{ e } y_- = 1, u_- = 0$$

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \int_0^t \left(2\delta(t-v) - 2e^{-2(t-v)} \right) dv + e^{-2t} \\
 &= \left(2 - 2 \int_0^t e^{-2(t-v)} dv \right) + e^{-2t} = \left(2 - (1 - e^{-2t}) \right) + e^{-2t} \\
 &= (1 + e^{-2t}) + e^{-2t} = 1 + 2e^{-2t}
 \end{aligned}$$

Quando $U(s)$ è una **funzione razionale** è normalmente più conveniente **antitrasformare direttamente** $Y_{\text{for.}}(s)$ e $Y_{\text{lib.}}(s)$:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{2s+2}{s+2} \cdot \frac{1}{s} \right] + \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s+2} \right]$$

• **Def. :** Un sistema Σ si dice *(strettamente) proprio* se la sua funzione di trasferimento è *(strettamente) propria*.

Quindi:

Se $n \geq m$ ($\rho \geq 0$) $\leftrightarrow \Sigma$ proprio; se $n > m$ ($\rho \geq 1$) $\leftrightarrow \Sigma$ strettamente proprio.

• **Def. (guadagno statico di Σ)**

È il rapporto fra il valore costante dell'uscita e il valore costante dell'ingresso ($\neq 0$) quando Σ è all'equilibrio:



$$K := \frac{y_c}{u_c} \quad \text{con} \quad (u_c, y_c) \in \mathcal{B} \quad \text{e} \quad u_c \neq 0$$

Dall'equazione diff. si deduce: $K = \frac{b_0}{a_0} \Rightarrow K = G(0)$

Def. (Polinomio Caratteristico di Σ)

Dato il sistema Σ descritto dall'eq. diff. $\sum_{i=0}^n \boxed{a_i D^i y} = \sum_{i=0}^m b_i D^i u,$

il polinomio $a(s) = \sum_{i=0}^n a_i s^i$ è detto polinomio caratteristico di Σ .

Nota: È il polinomio a denominatore della f.d.t. $G(s)$.

Def. - poli e zeri di Σ

Sono i poli e gli zeri della f.d.t. $G(s)$ di Σ .

Normalmente i poli sono le radici di $a(s) = 0$ ma ...

$$\text{Se } G(s) = \frac{s^2 + 5s + 4}{(s+1)(s+2)(s+3)^2} \quad \text{☐}$$

$$\Rightarrow \{ \text{zeri di } \Sigma \} = \{-4\}, \{ \text{poli di } \Sigma \} = \{-2, -3, -3\}$$

• **Def. (modi del sistema dinamico Σ)**

Sono le funzioni “tipiche” associate ai poli di Σ secondo la regola:

Se p è un polo reale di molteplicità h :

$$e^{pt}, te^{pt}, \dots, t^{h-1}e^{pt}$$

Handwritten notes: A red arrow points from $h=1$ to the first term. A red arrow points from $h-1$ to the last term. A red arrow points from $h=0$ to the first term.

Se $\sigma \pm j\omega$ è una coppia di poli complessi coniugati di molteplicità h :

$$e^{\sigma t} \text{sen}(\omega t + \varphi_1), te^{\sigma t} \text{sen}(\omega t + \varphi_2), \dots, t^{h-1} e^{\sigma t} \text{sen}(\omega t + \varphi_h)$$

Handwritten notes: A red arrow points from $h=0$ to the first term. A red arrow points from $h-1$ to the last term.

Esempio:

$$G(s) = \frac{(s+1)(s^2 + 2s + 7)}{(s+4)^3 (s+5)[(s+1)^2 + 4]^2}$$

$$\{\text{modi di } \Sigma\} = \{e^{-4t}, te^{-4t}, t^2 e^{-4t}, e^{-5t}, e^{-t} \text{sen}(2t + \varphi_1), te^{-t} \text{sen}(2t + \varphi_2)\}$$

- **Proprietà (risposta libera e modi di Σ)**

Sia Σ un sistema per il quale i poli coincidono con le radici del polinomio caratteristico ($a(s)$ e $b(s)$ sono coprimi fra loro). Allora

la risposta libera è una combinazione lineare dei suoi modi.

Dim.:

$$L[y_{\text{lib.}}(t)] = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{i-1} a_i D^{i-1-j} y_- s^j - \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{i-1} b_i D^{i-1-j} u_- s^j}{a(s)}$$

Il numeratore è un polinomio di grado $\leq n - 1$ dipendente dalle c.i.

Dall'assunzione fatta i modi di Σ sono associati alle radici di $a(s) = 0$. Quindi dallo sviluppo in fratti semplici segue la tesi ... $\square$

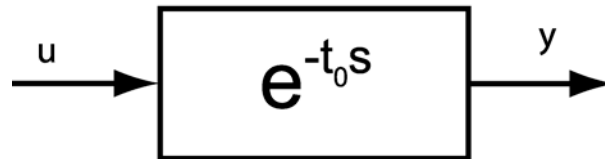
Nota: $\{\text{poli di } \Sigma\} \subseteq \{\text{radici del pol. carat. di } \Sigma\}$

$\{\text{poli di } \Sigma\} = \{\text{radici del pol. carat. di } \Sigma\}$ se $a(s)$ e $b(s)$ sono coprimi.

- Non tutti i sistemi dinamici lineari e stazionari sono caratterizzati da f.d.t. razionali.

Esempio: il sistema denominato “*ritardo finito*”. Se $u(t)$ è il segnale all’ingresso, il segnale all’uscita è $y(t) = u(t-t_0)$ dove t_0 è il tempo di ritardo.

$$\mathcal{L}[y(t)] = \mathcal{L}[u(t-t_0)] = \mathcal{L}[u(t)]e^{-t_0s} \quad \Rightarrow \quad G(s) = e^{-t_0s}$$



In generale, i sistemi dinamici lineari e stazionari retti da eq. diff. alle derivate parziali hanno f.d.t. trascendenti (non razionali).

Segnali tipici per l'ingresso di Σ :

$\delta(t)$ impulso unitario (delta di Dirac)

$1(t)$ gradino unitario

$t \cdot 1(t)$ rampa unitaria

$\frac{1}{2}t^2 \cdot 1(t)$ parabola unitaria

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$$

$$\mathcal{L}[1(t)] = \frac{1}{s}$$

$$\mathcal{L}[t \cdot 1(t)] = \frac{1}{s^2}$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{1}{2}t^2 \cdot 1(t)\right] = \frac{1}{s^3}$$

• Def. Risposta canonica

È la risposta forzata di Σ ad un segnale tipico all'ingresso.

Le risposte canoniche usualmente adottate sono:

$g(t) \equiv$ risposta all'impulso $\delta(t)$ o **risposta impulsiva**

$g_s(t) \equiv$ risposta al gradino $1(t)$ o **risposta indiciale**

$(g(t) = g_s(t) = 0 \text{ per } t < 0)$

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)], \quad g_s(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}G(s)\right] \quad \text{💬}$$

Proprietà

$$\int_{0-}^t g(v)dv = g_s(t), \quad g(t) = D^* g_s(t)$$

(per i sistemi strettamente propri $g(t) = Dg_s(t)$)

$$\mathbf{Dim.}: (\delta(t), g(t)) \in \mathcal{B}^*$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\int_{0-}^t \delta(v) dv, \int_{0-}^t g(v) dv \right) \in \mathcal{B}^*$$

$$\Downarrow$$

$$\left(1(t), \int_{0-}^t g(v) dv \right) \in \mathcal{B}$$

$$\Downarrow$$

$$\int_{0-}^t g(v) dv = g_s(t)$$

$$\text{Se } \rho \geq 1 \Rightarrow g_s(t) \in C^0(\mathbb{R}) \Rightarrow D^* g_s(t) = Dg_s(t) \quad \square$$

$$(1(t), g_s(t)) \in \mathcal{B}$$

$$\Downarrow$$

$$(D^* 1(t), D^* g_s(t)) \in \mathcal{B}^*$$

$$\Downarrow$$

$$(\delta(t), D^* g_s(t)) \in \mathcal{B}^*$$

$$\Downarrow$$

$$D^* g_s(t) = g(t)$$

Proprietà (integrali di Vaschy)

Nota la risposta al gradino $g_s(t)$, la risposta forzata $y_{\text{for.}}(t)$, $t \geq 0$ effetto dell'azione forzante $u(t)$, $t \geq 0$ è determinabile come:

$$y_{\text{for.}}(t) = \int_0^t \overbrace{u'(v)}^{\text{IN}} \overbrace{g_s(t-v)}^{\text{INIZ}} dv + \overbrace{u(0+)}^{\text{INIZ}} \overbrace{g_s(t)}^{\text{INIZ}}$$

$$y_{\text{for.}}(t) = \int_0^t g_s(v) u'(t-v) dv + u(0+) g_s(t)$$




Dim.:

$$Y_{\text{for.}}(s) = G(s)U(s) = \frac{1}{s}G(s) \cdot sU(s); \quad \frac{1}{s}G(s) = \mathcal{L}[g_s(t)]$$

$$\mathcal{L}[u'(t)] = sU(s) - u(0+) \Rightarrow sU(s) = \mathcal{L}[u'(t)] + u(0+) = \mathcal{L}[u'(t)] + \mathcal{L}[u(0+)\delta(t)]$$
$$sU(s) = \mathcal{L}[u'(t) + u(0+)\delta(t)]$$

Applicando il teorema di convoluzione :

$$y_{\text{for.}}(t) = \int_0^t g_s(v) (u'(t-v) + u(0+)\delta(t-v)) dv$$
$$= \int_0^t g_s(v) u'(t-v) dv + \int_0^t g_s(v) u(0+)\delta(t-v) dv = \int_0^t g_s(v) u'(t-v) dv + u(0+)g_s(t)$$

$$\text{Da } y_{\text{for.}}(t) = \int_0^t (u'(v) + u(0+)\delta(v)) g_s(t-v) d\tau$$

$$\text{analogamente si ottiene } y_{\text{for.}}(t) = \int_0^t u'(v)g_s(t-v)dv + u(0+)g_s(t) \quad \square$$

I concetti introdotti dalla lezione:

- Sequenze e funzioni impulsive
- Trasformate delle derivate generalizzate
- Estensione impulsiva dell'insieme dei behaviors
- Risposta forzata e risposta libera
- Funzione di trasferimento
- Soluzione generale dell'equazione differenziale
- Guadagno statico, polinomio caratteristico, poli e zeri, modi
- Risposta impulsiva e risposta indiciale