

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica, Elettronica e delle
Telecomunicazioni

Lezione n. 7 di Fondamenti di Controlli Automatici
prof. Aurelio Piazzì

Sistemi dinamici elementari

Università degli Studi di Parma – a.a. 2014-2015

- Studiare le caratteristiche dei sistemi dinamici più semplici: **primo ordine con grado relativo uno** e **secondo ordine** con grado relativo due.
- Semplificare lo studio di un sistema più complesso (ordine maggiore di due, grado relativo piccolo) comparandolo ad un sistema del secondo ordine.

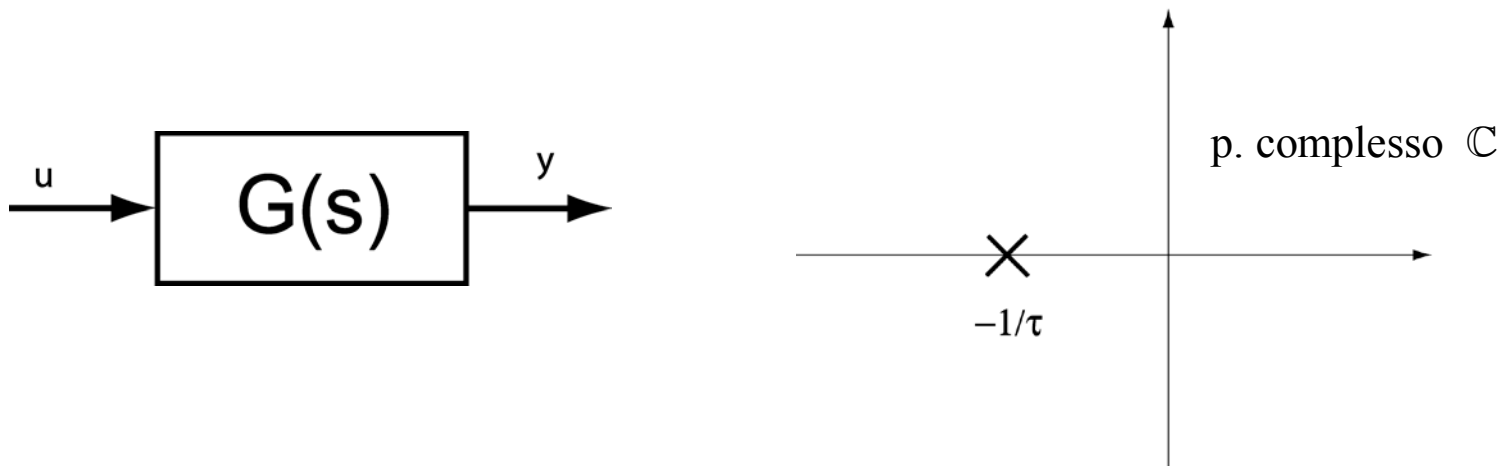
Sistemi del primo ordine (strettamente propri)

$$G(s) = \frac{1}{1 + \tau s} \quad (\text{guadagno statico normalizzato ad 1})$$

Handwritten notes above the equation:
 $(s+p) \leftarrow \frac{s}{\tau} + \frac{p}{\tau} \rightarrow p = -\frac{1}{\tau} \quad \frac{1}{\tau} \rightarrow \tau^{-1}$

Eq. diff. $\tau Dy + y = u \quad \tau \equiv \text{costante di tempo } (> 0)$

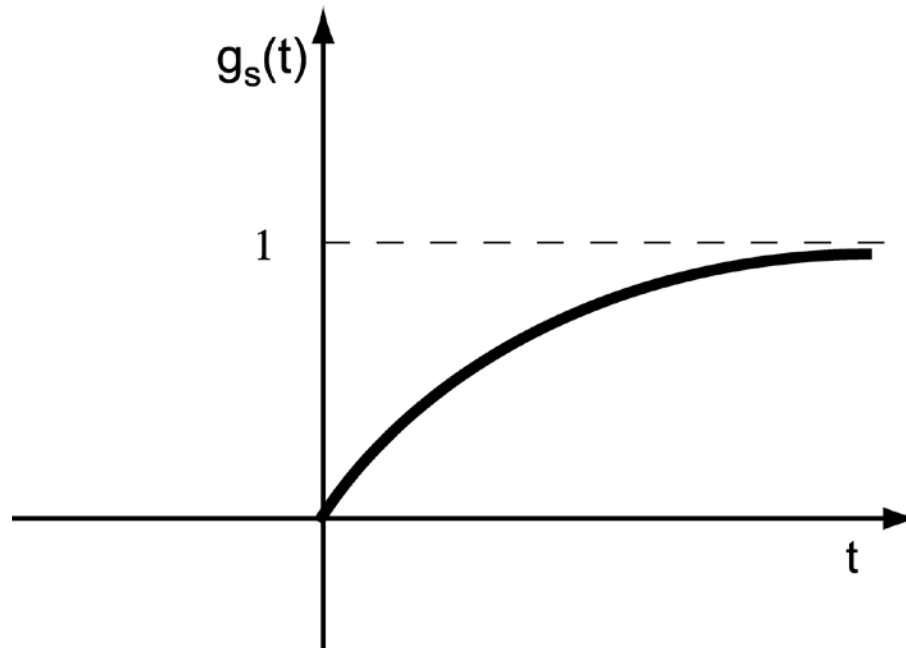
$$\{\text{poli di } \Sigma\} = \left\{ -\frac{1}{\tau} \right\} \quad \{\text{modi di } \Sigma\} = \left\{ e^{-\frac{1}{\tau} t} \right\}$$



- determinazione di $g_s(t)$ (risposta al gradino unitario)

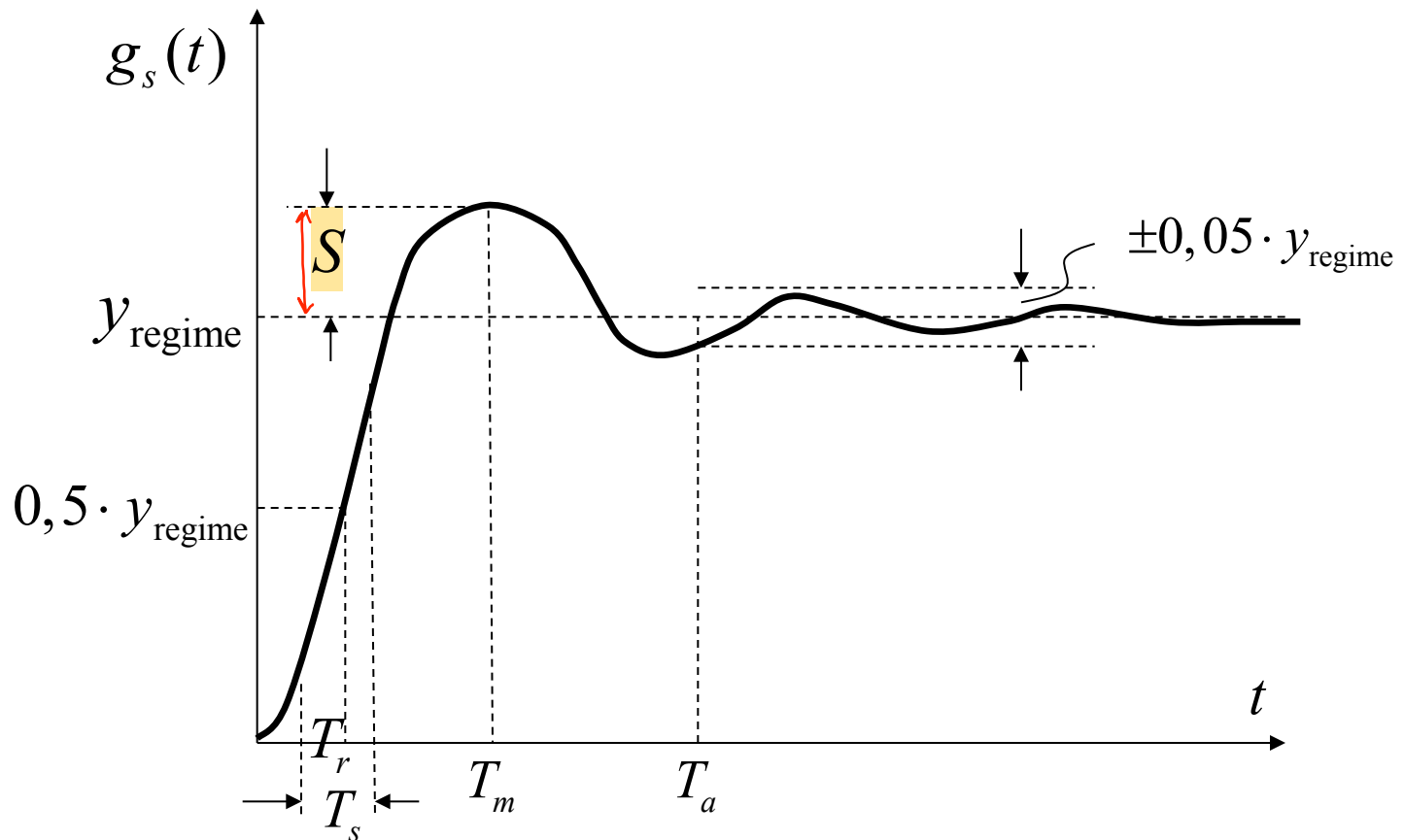
$$g_s(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{1 + \tau s} \cdot \frac{1}{s} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\frac{1}{\tau}}{\left(s + \frac{1}{\tau} \right) s} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{\tau}} \right] = 1 - e^{-t/\tau}, \quad t \geq 0$$

Per $t = 3\tau$ (5τ) l'uscita y raggiunge il 95% (99,3%) del valore di regime.



Parametri della risposta al gradino

Spesso la risposta al gradino unitario di un sistema dinamico generico ha l'andamento di figura dove si evidenziano “parametri” caratteristici.



$S \equiv$ massima sovraelongazione (in % del valore di regime)

$T_r \equiv$ tempo di ritardo

$T_s \equiv$ tempo di salita

$T_m \equiv$ istante di massima sovraelongazione

$T_a \equiv$ tempo di assestamento

$T_a := \inf \left\{ T > 0 : \left| g_s(t) - y_{\text{regime}} \right| \leq 0,05 y_{\text{regime}} \quad \forall t \geq T \right\}$

Sistemi del secondo ordine (senza zeri)

La funzione di trasferimento $G(s)$ sia così parametrizzata:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2}, \quad G(0) = 1$$

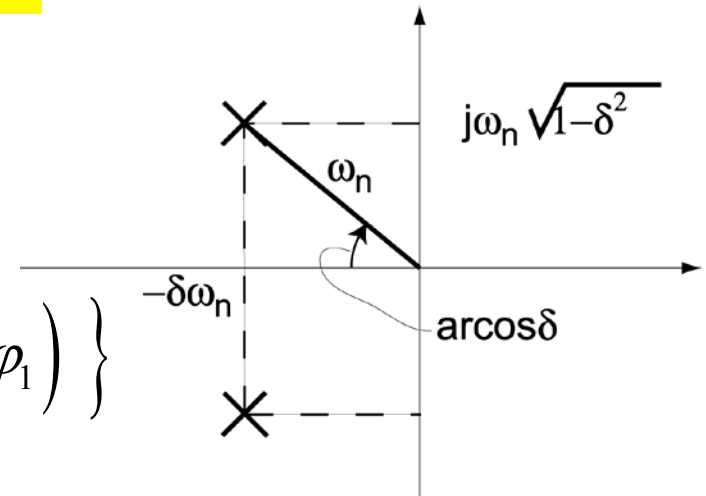
$$\text{Eq. diff. } D^2 y + 2\delta\omega_n Dy + \omega_n^2 y = \omega_n^2 u$$

$$\omega_n \equiv \text{pulsazione naturale } (> 0)$$

$$\delta \equiv \text{coefficiente di smorzamento, } \in (0, 1)$$

$$\{\text{poli di } G(s)\} = \left\{ -\delta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\delta^2} \right\}$$

$$\{\text{modi di } G(s)\} = \left\{ e^{-\delta\omega_n t} \sin\left(\omega_n\sqrt{1-\delta^2} t + \varphi_1\right) \right\}$$

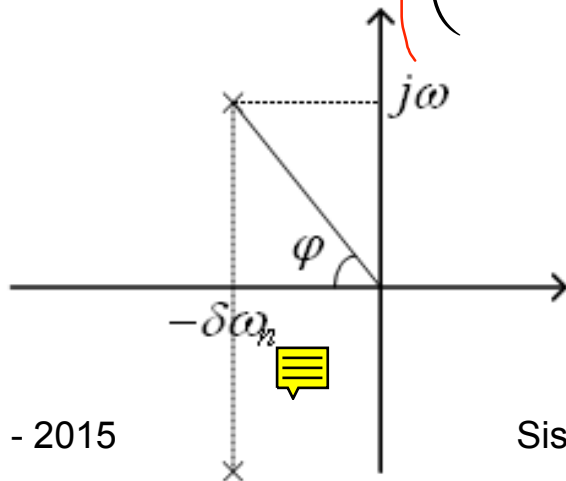


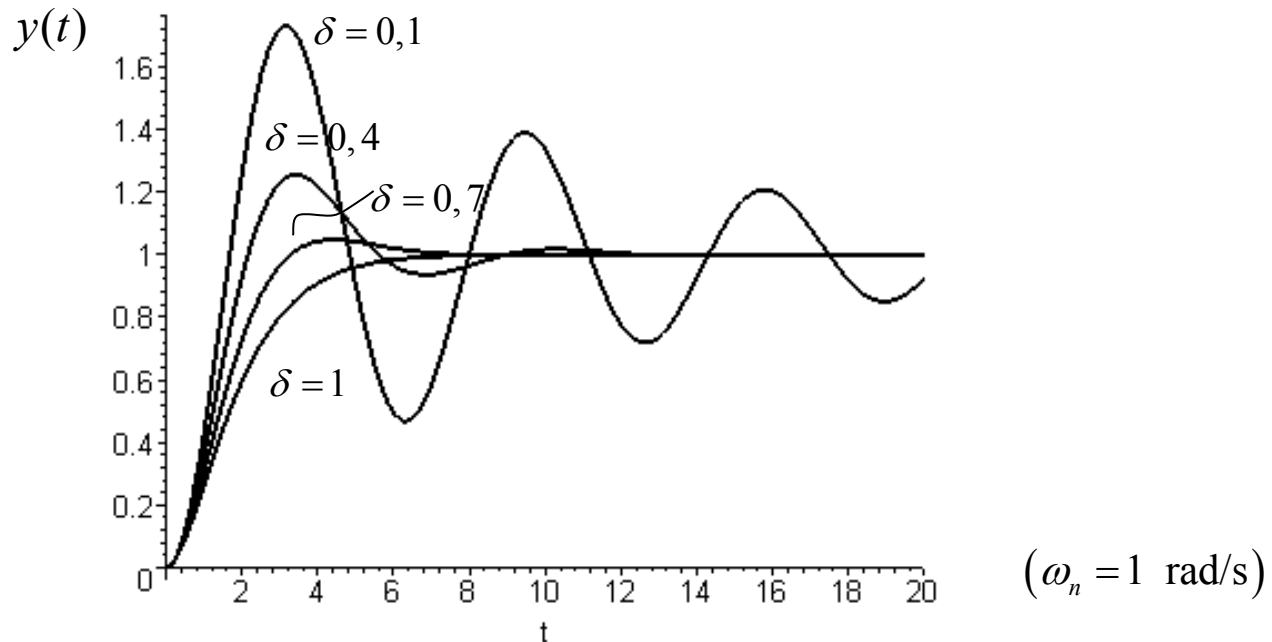
- Determinazione della risposta al gradino unitario

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2)} \right] = 1 - Ae^{-\delta\omega_n t} \text{sen}(\omega t + \varphi)$$

$$\omega := \omega_n \sqrt{1 - \delta^2} \quad \equiv \quad A := \frac{1}{\sqrt{1 - \delta^2}}$$

$$\varphi := \arccos(\delta) \quad \left(= \arcsen \sqrt{1 - \delta^2} = \text{arctg} \frac{\sqrt{1 - \delta^2}}{\delta} \right)$$





per $\delta = 0 \Rightarrow y(t) = 1 - \sin\left(\omega_n t + \frac{\pi}{2}\right) = 1 - \cos(\omega_n t)$ 

per $\delta = 1$ non posso utilizzare l'espressione precedente ($A = +\infty$!)

ma rifacendo i calcoli $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\omega_n^2}{s(s + \omega_n)^2}\right] = 1 - e^{-\omega_n t} - \omega_n t e^{-\omega_n t}$

$$y(t) = 1 - Ae^{-\delta\omega_n t} \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)$$

- Calcolo della massima sovraelongazione S

$$\dots \quad Dy(t) = 0$$

$$A\delta\omega_n e^{-\delta\omega_n t} \operatorname{sen}(\omega t + \varphi) - Ae^{-\delta\omega_n t} \omega \cos(\omega t + \varphi) = 0$$

$$\delta \operatorname{sen}(\omega t + \varphi) = \sqrt{1 - \delta^2} \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\operatorname{tg}(\omega t + \varphi) = \frac{\sqrt{1 - \delta^2}}{\delta} \quad \Leftrightarrow \quad \omega t = n\pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

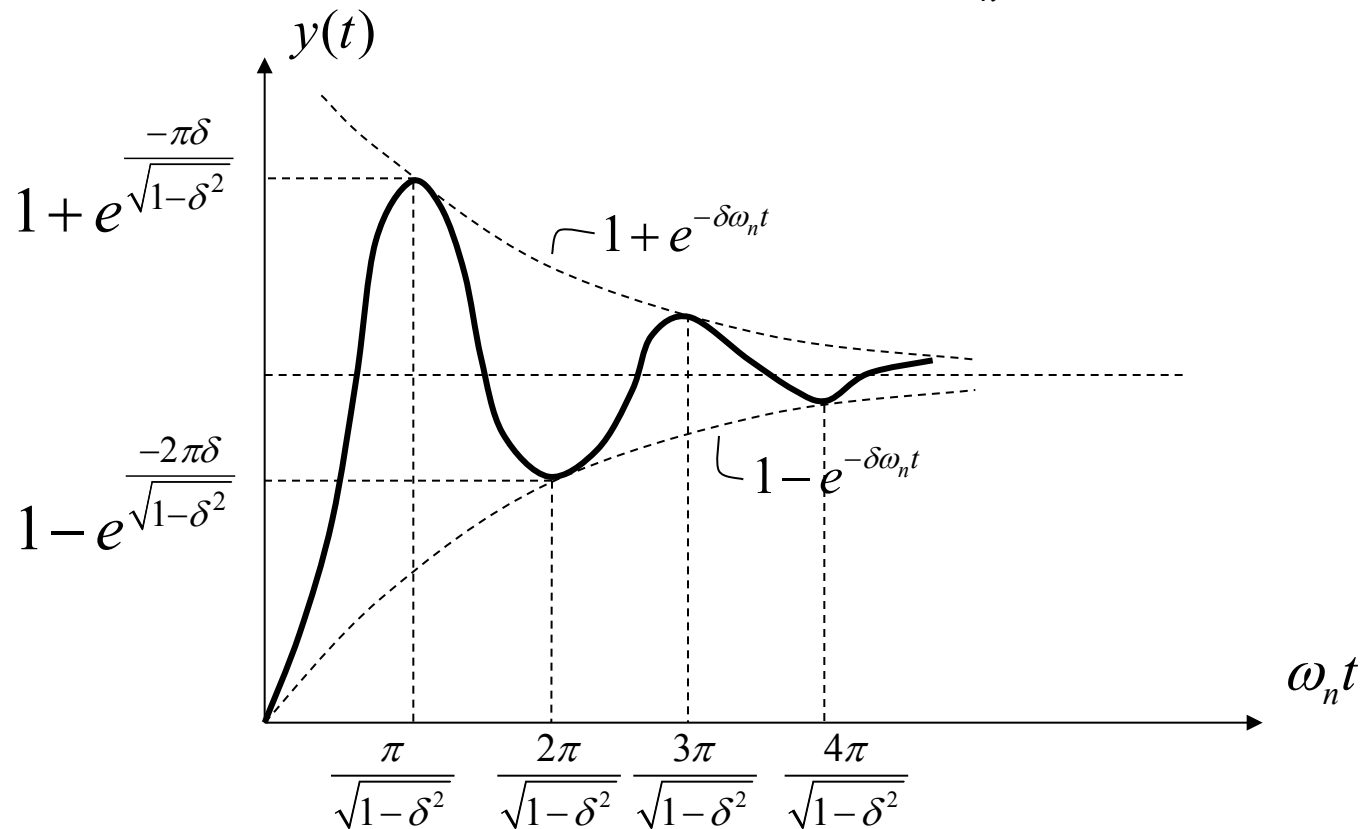
$$t = \frac{n\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \delta^2}} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$y(t)|_{\min, \max} = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \delta^2}} \exp\left\{-\frac{\delta n\pi}{\sqrt{1 - \delta^2}}\right\} \operatorname{sen}(n\pi + \varphi) =$$

$$\text{dato che } \varphi = \arcsen \sqrt{1 - \delta^2} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen}(n\pi + \varphi) = (-1)^n \sqrt{1 - \delta^2}$$

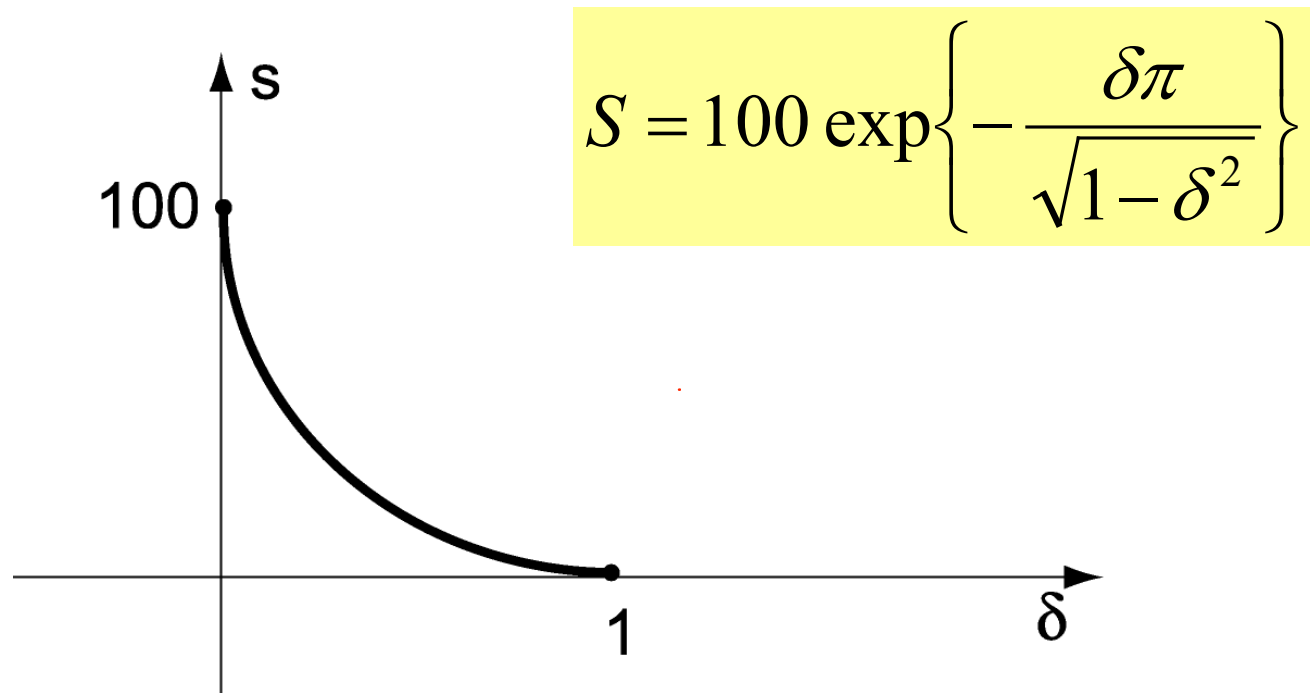
$$y(t)|_{\min, \max} = 1 - (-1)^n \exp\left\{-\frac{\delta n \pi}{\sqrt{1-\delta^2}}\right\}$$

$$y(t)|_{\min, \max} = 1 - (-1)^n \exp\{-\delta \omega_n t\} \quad \text{dove } t = \frac{n \pi}{\omega_n \sqrt{1-\delta^2}} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$



$$y_{\max} = 1 + \exp\left\{-\frac{\delta\pi}{\sqrt{1-\delta^2}}\right\}$$

$$S = 100(y_{\max} - 1)$$



- Calcolo del tempo di assestamento T_a

Una stima può essere determinata risolvendo l'eq. :

$$e^{-\delta\omega_n T_a} = 0,05 \quad -\delta\omega_n T_a = \ln 0,05 \cong -3$$

$$T_a \cong \frac{3}{\delta\omega_n}$$

- Tempo di salita T_s

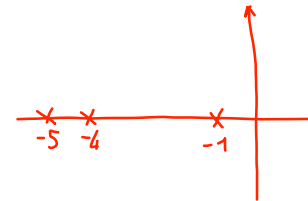
$$T_s \approx \frac{1,8}{\omega_n}$$

È una relazione approssimata dedotta interpolando dati numerici

Poli dominanti di un sistema dinamico

Sistema Σ generico con f.d.t. $G(s) = b(s)/a(s)$, n poli ed m zeri, tutti i poli hanno parte reale negativa (tutti i modi convergono a zero per $t \rightarrow +\infty$).

Esempi $G_1(s) = \frac{20}{(s+1)(s+4)(s+5)}$



$$\{\text{poli di } \Sigma_1\} = \{-1, -4, -5\} \quad \{\text{modi di } \Sigma_1\} = \{e^{-t}, e^{-4t}, e^{-5t}\}$$

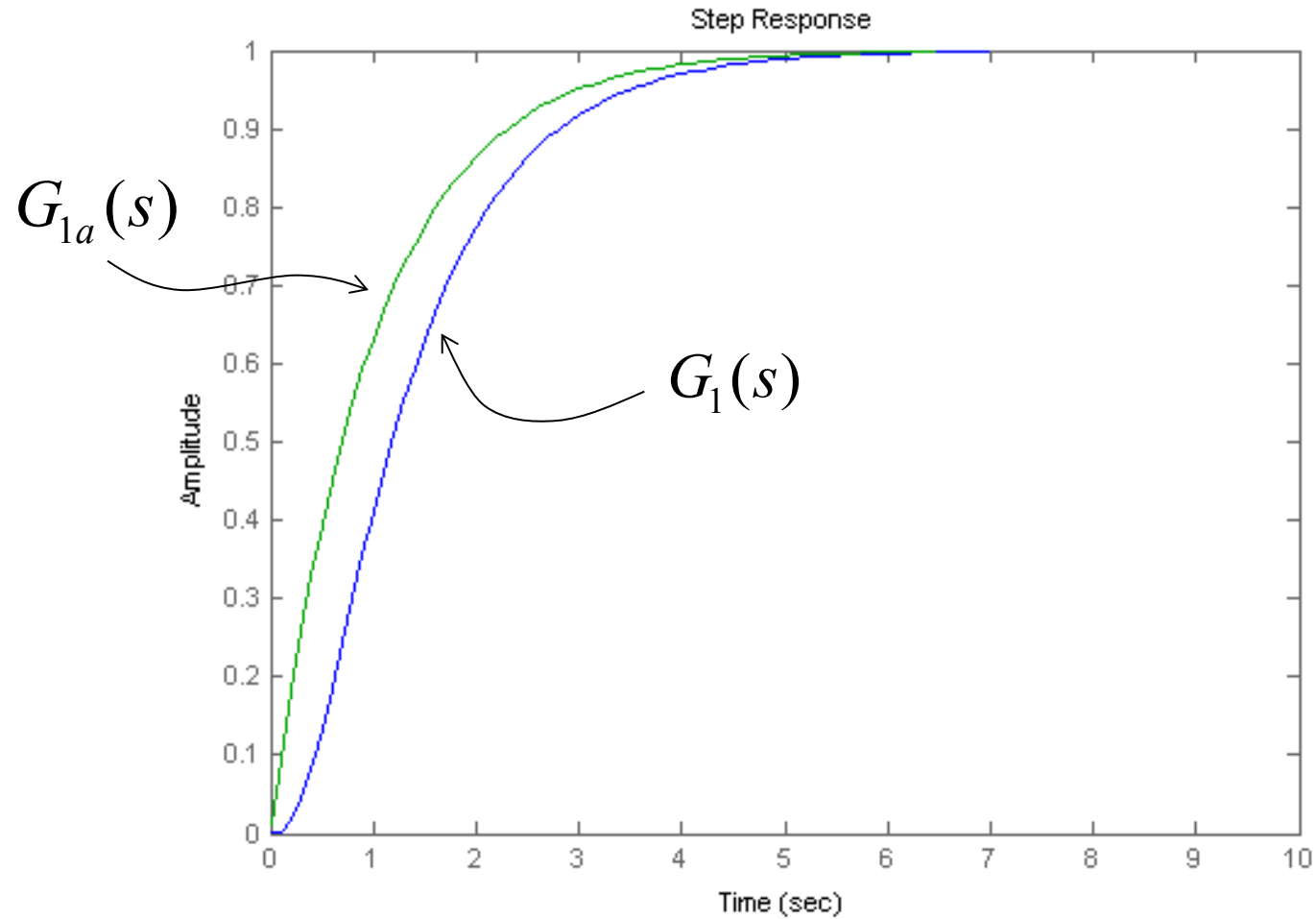
-1 è il polo dominante. Si può costruire una f.d.t. approssimante



$G_{1a}(s) \cong G_1(s)$ con questo solo polo.

$$G_{1a}(s) = \frac{c}{s+1}, \text{ la costante } c \text{ è determinata da } G_{1a}(0) = G_1(0) \Rightarrow c = 1$$

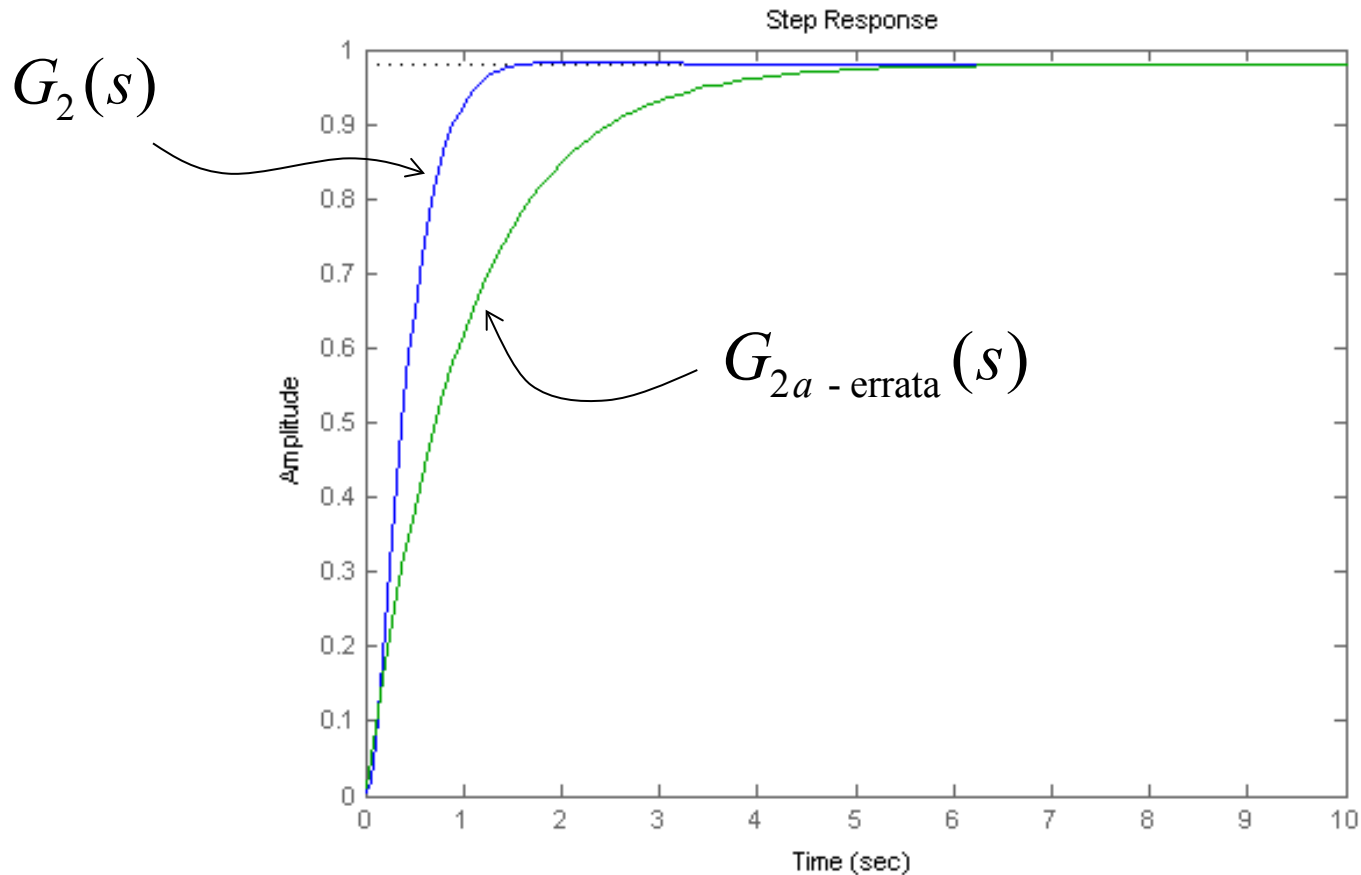
$$G_{1a}(s) = \frac{1}{s+1}$$



Grafici realizzati con **Control System Toolbox** di **MATLAB** (www.mathworks.com)

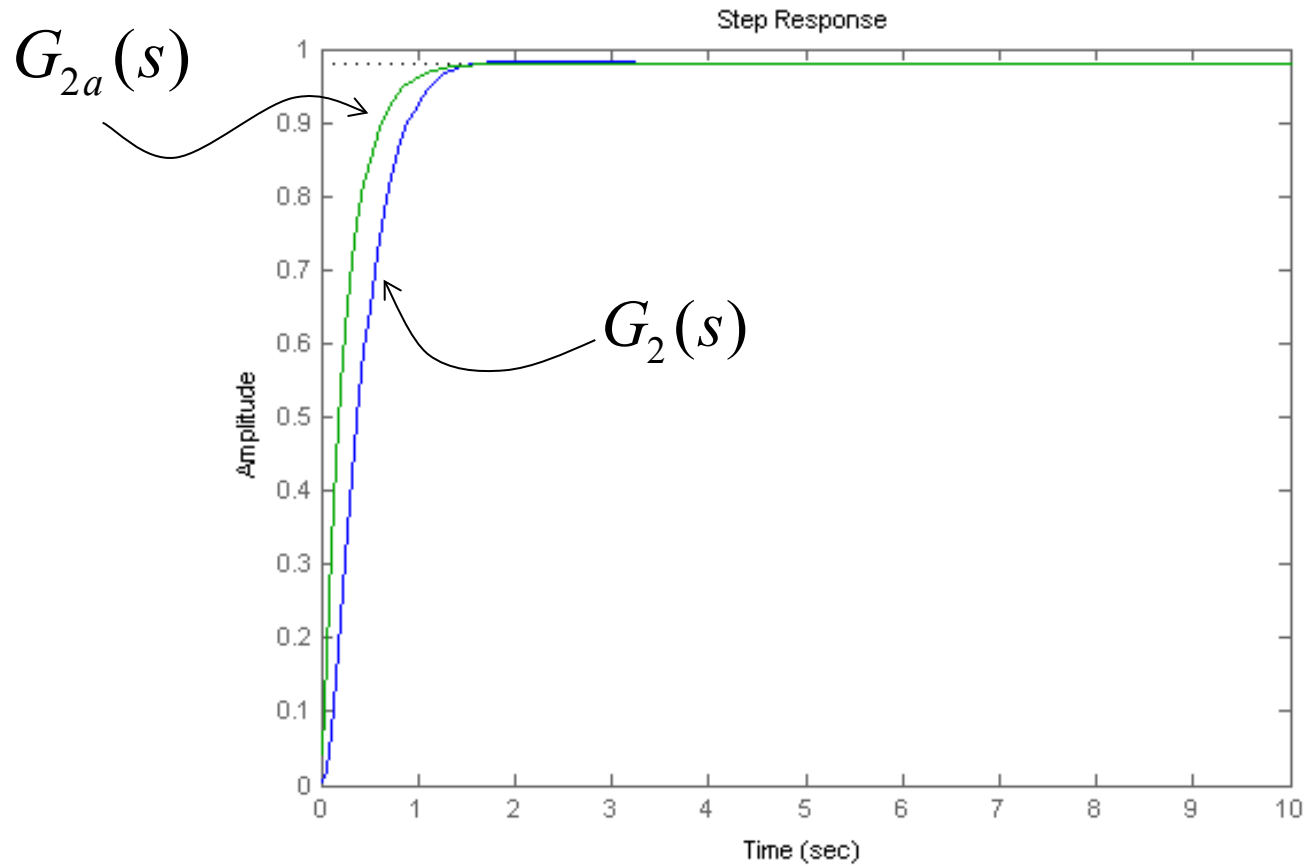
$$G_2(s) = \frac{20(s + 0.98)}{(s + 1)(s + 4)(s + 5)}$$

potrei $G_{2a - errata}(s) = \frac{0.98}{s + 1}$

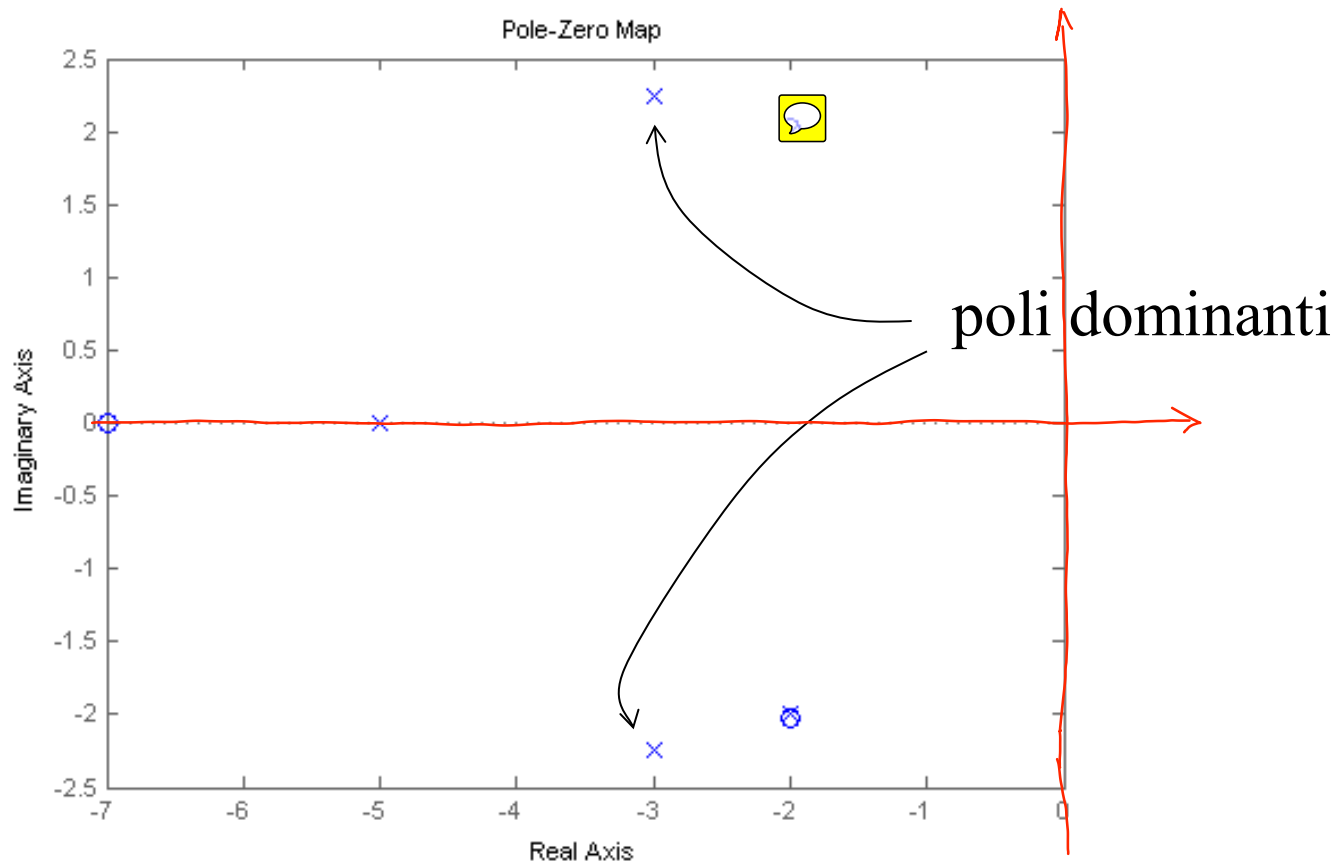


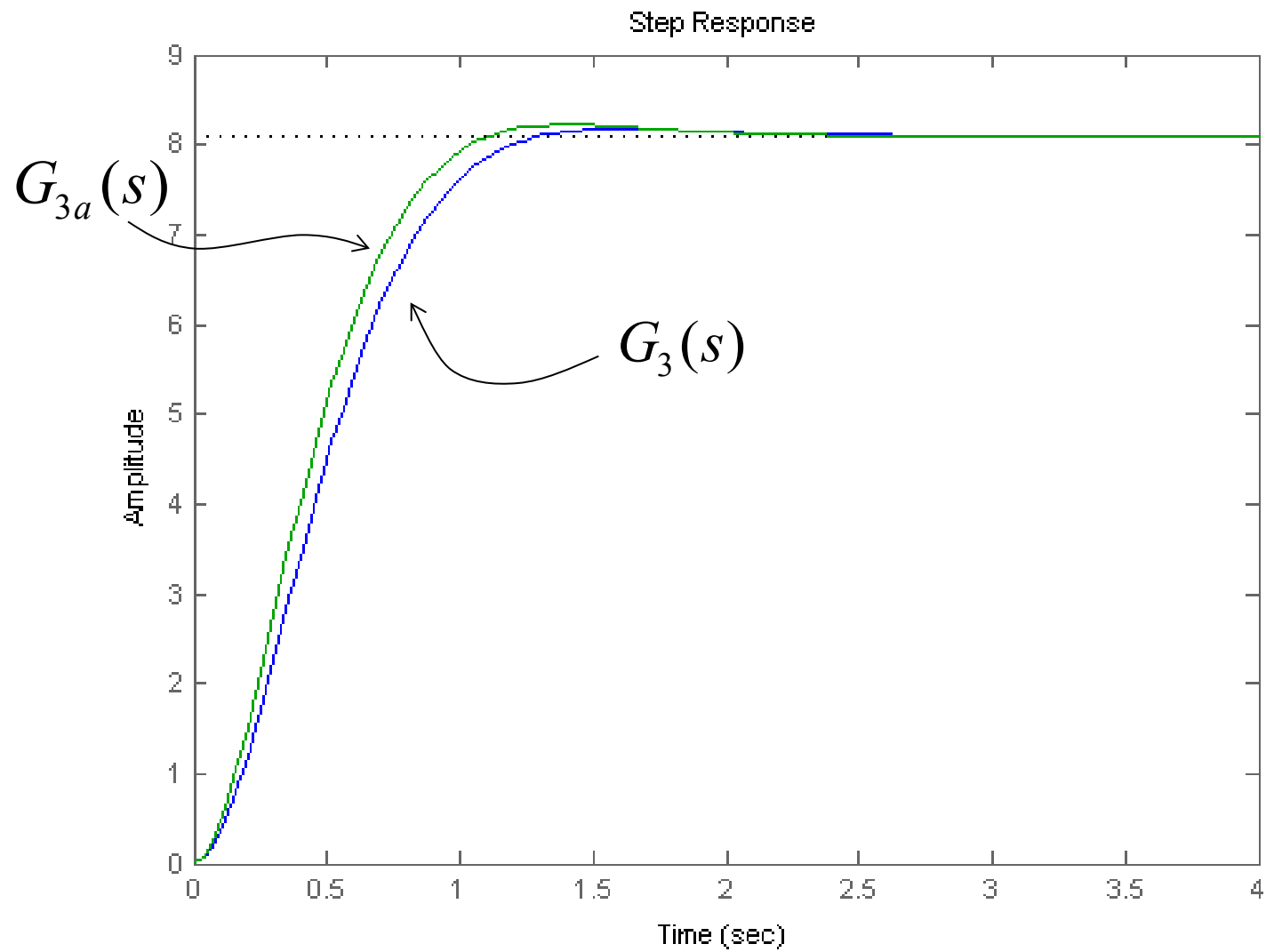
Il polo dominante escluso il polo -1 quasi cancellato dallo zero -0.98

è $-4 \Rightarrow G_{2a}(s) = \frac{3.92}{s + 4}$



$$G_3(s) = \frac{80(s+7)[(s+2)^2 + 4.1]}{[(s+2)^2 + 4][(s+3)^2 + 5](s+5)} \Rightarrow G_{3a}(s) = \frac{113.4}{[(s+3)^2 + 5]}$$





Poli dominanti (def.)

Sono i poli (normalmente una coppia), non soggetti a quasi cancellazione polo-zero, più vicini all'asse immaginario.

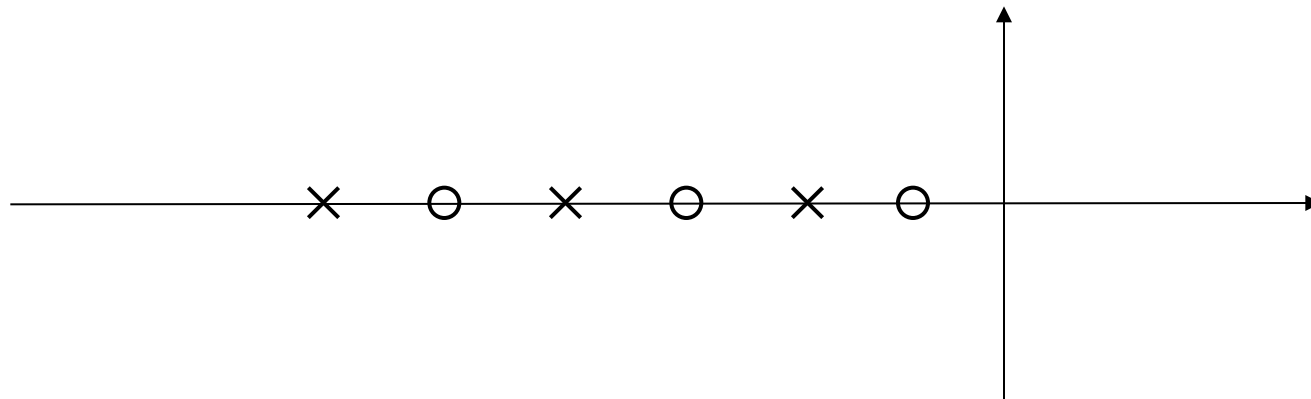
Proprietà qualitativa: La risposta al gradino unitario dipende approssimativamente dai soli poli dominanti di Σ .

... la dinamica “transiente” è “dominata” dall’influenza dei poli dominanti ...

Conseguenza: se i poli dominanti sono complessi coniugati i parametri della risposta S , T_a e T_s sono determinabili approssimativamente dalle relazioni presentate per i sistemi di ordine due.

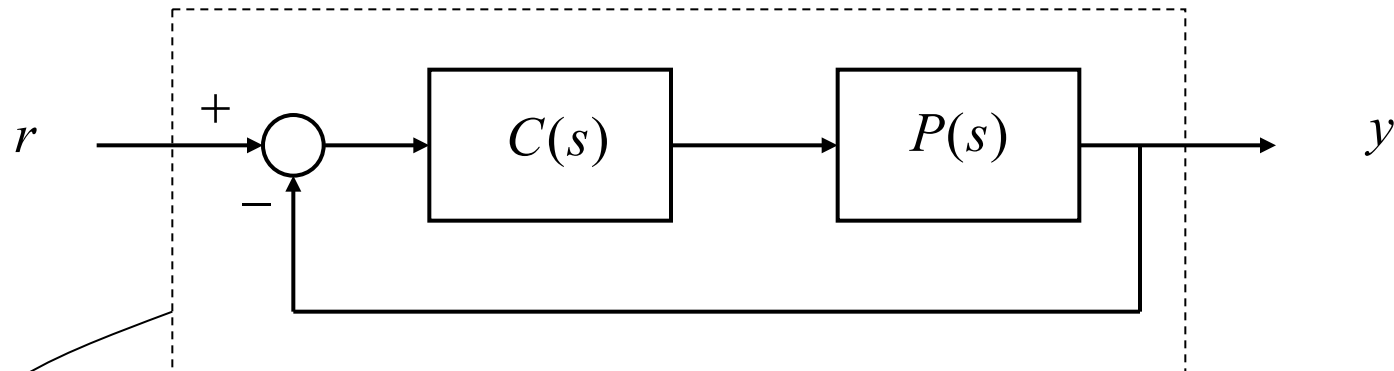
Precisazioni:

1. Il concetto di poli dominanti porta ad una approssimazione del comportamento transiente che può essere anche molto rozza ...
2. Non è sempre possibile individuare un insieme significativo di poli dominanti.

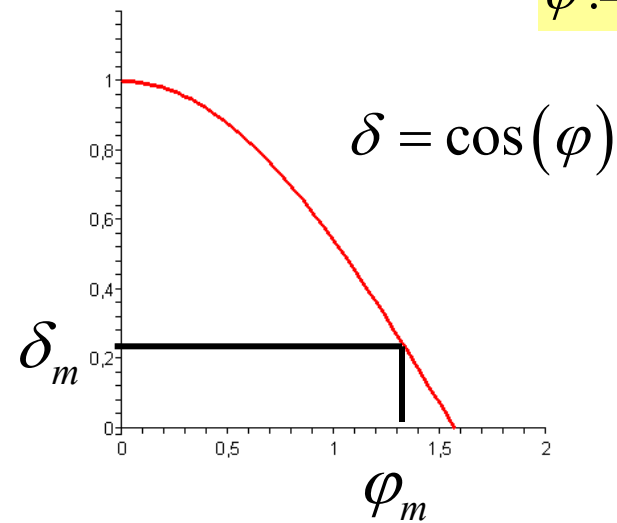
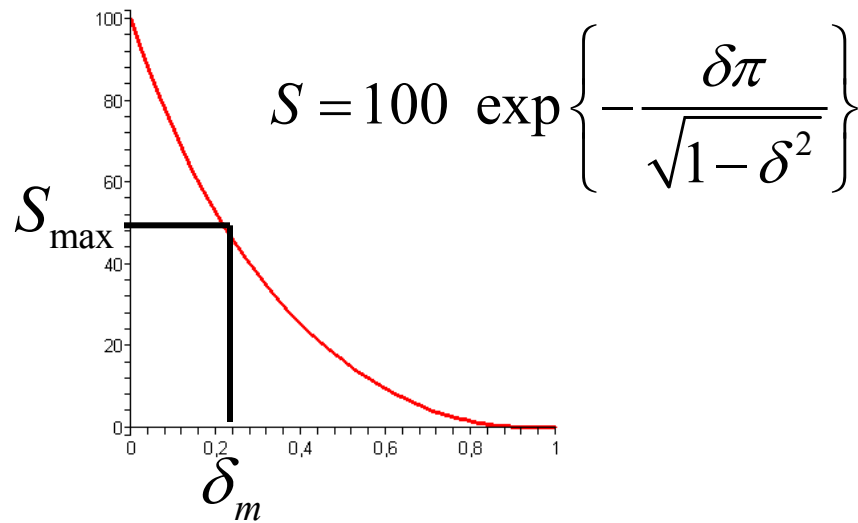


Specifiche sulla risposta al gradino per un sistema di controllo

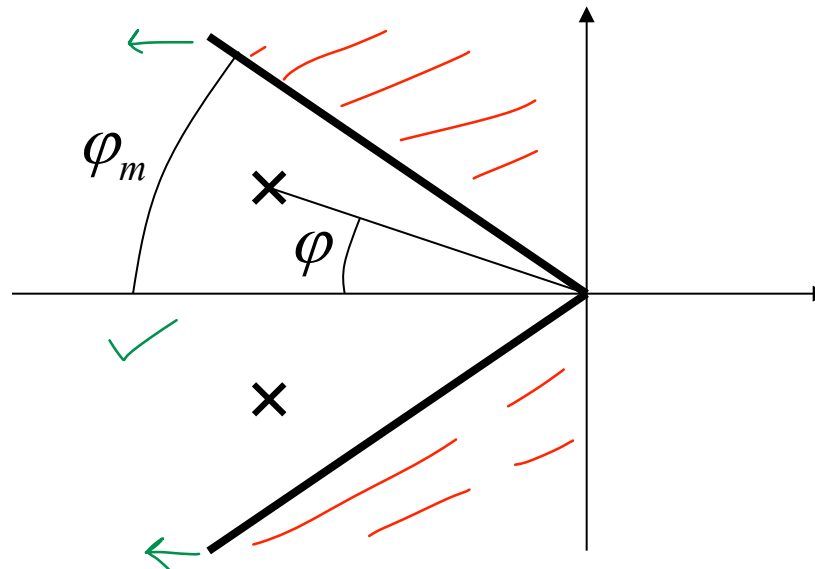
$$S \leq S_{\max} \quad , \quad T_a \leq T_{a-\max}$$



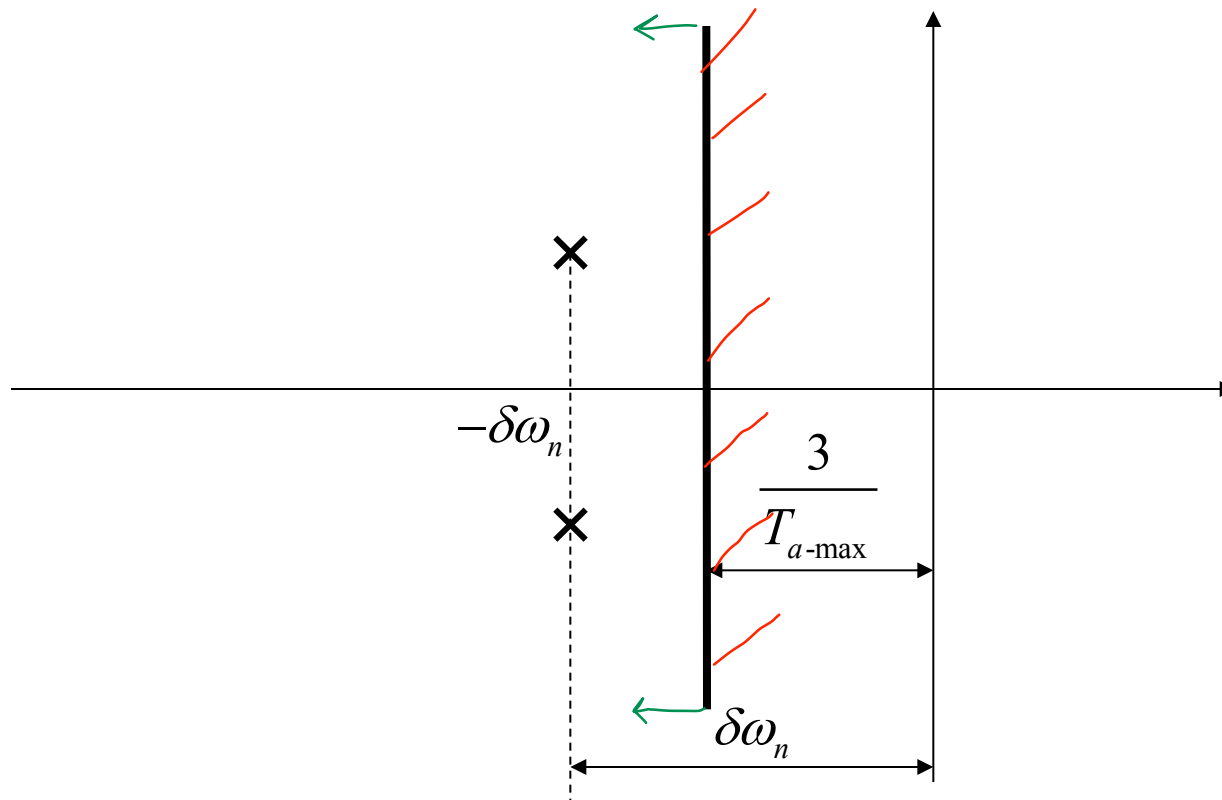
 $G_{ry}(s) \cong G_{ry-a}(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2} \quad , \quad \omega_n > 0, \quad \delta \in (0,1)$



$$S \leq S_{\max}, \quad S(\delta) \leq S_{\max} \quad \Leftrightarrow \quad \delta \geq \delta_m, \quad \delta(\varphi) \geq \delta_m \quad \Leftrightarrow \quad \varphi \leq \varphi_m$$

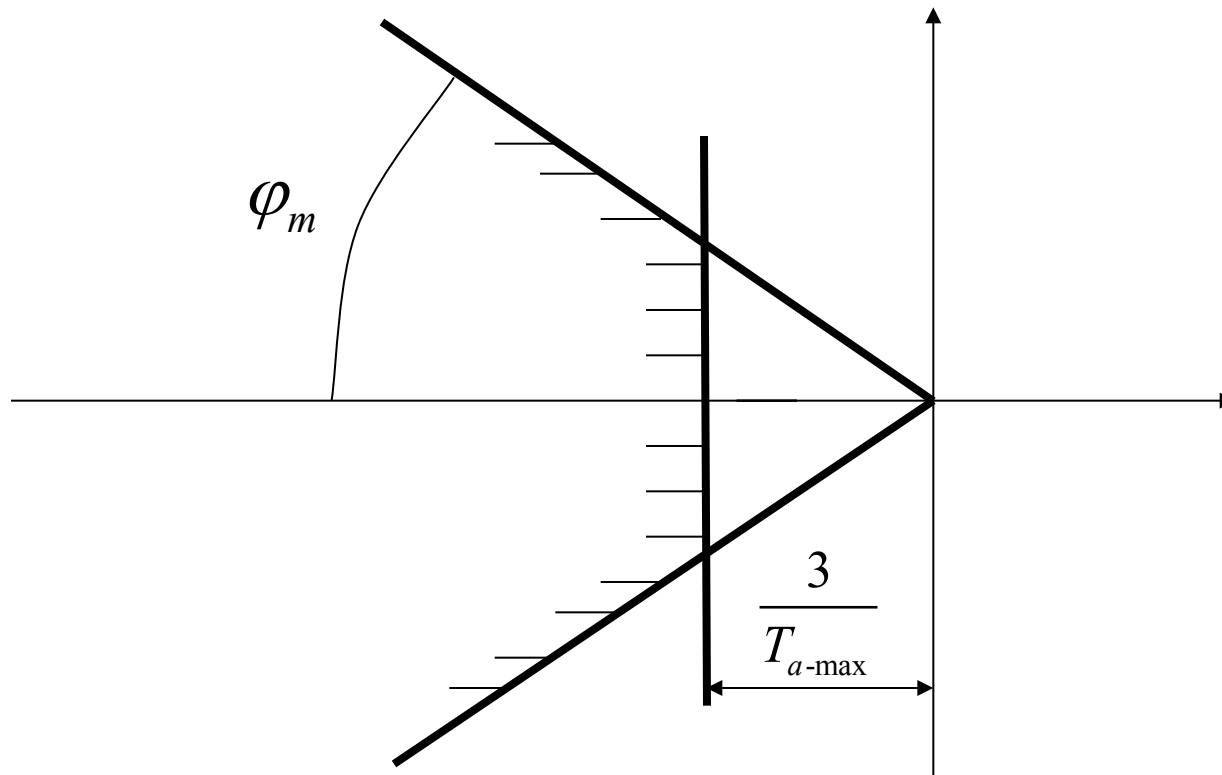


$$T_a \leq T_{a\text{-max}}, \quad \frac{3}{\delta\omega_n} \leq T_{a\text{-max}} \quad \Leftrightarrow \quad \delta\omega_n \geq \frac{3}{T_{a\text{-max}}}$$



Le specifiche $S \leq S_{\max}$ e $T_a \leq T_{a-\max}$ devono essere soddisfatte entrambe.

Quindi i poli $-\delta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\delta^2}$ devono appartenere al cono troncato di figura. In pratica, si impone che tutti i poli di $G_{ry}(s)$ appartengano al cono troncato.



I concetti introdotti dalla lezione:

- Risposte al gradino dei sistemi del primo e secondo ordine
- Sovraelongazione, tempo di assestamento e tempo di salita
- Poli dominanti
- Specifiche su sovraelongazione e tempo di assestamento: condizione di ***root clustering***