

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica, Elettronica e delle
Telecomunicazioni

Lezione n. 8 di Fondamenti di Controlli Automatici
prof. Aurelio Piazzì

La stabilità dei sistemi dinamici

Università degli Studi di Parma – a.a. 2014-2015

Stabilità dei sistemi dinamici (lineari)



- **Stabilità (alle perturbazioni)** di un sistema dinamico (stabilità di punti di equilibrio a seguito di perturbazioni).
- **Stabilità BIBO** (Bounded-Input Bounded-Output) di un sistemi dinamico (stabilità della relazione causale ingresso-uscita).
- Un algoritmo per studiare la stabilità: **il criterio di Routh**.

Stabilità: definizioni e teoremi

Si consideri il sistema dinamico Σ descritto dall'eq. diff.

$$\sum_{i=0}^n a_i D^i y = \sum_{i=0}^m b_i D^i u$$

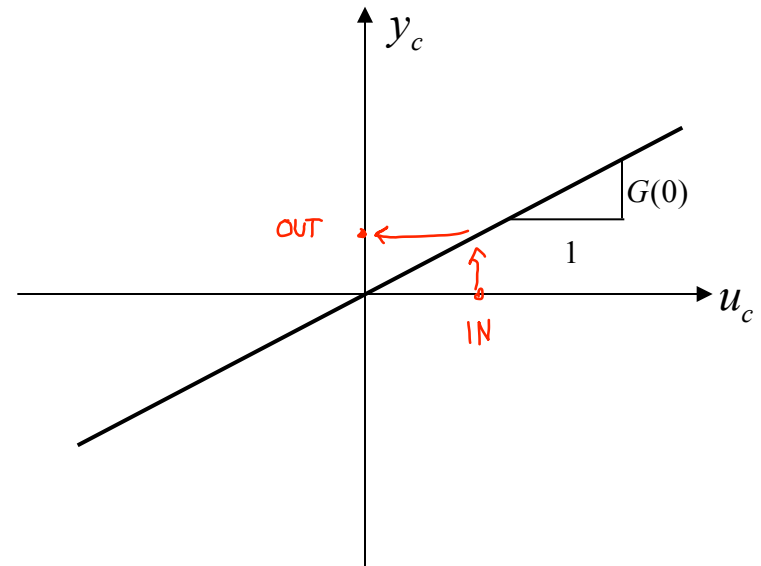
I punti di equilibrio di Σ sono caratterizzati da valori costanti nel tempo di u ed y $(u_c, y_c) \in \mathbb{R}^2$ soddisfacenti la relazione:

$$y_c = G(0)u_c, \quad u_c \in \mathbb{R};$$



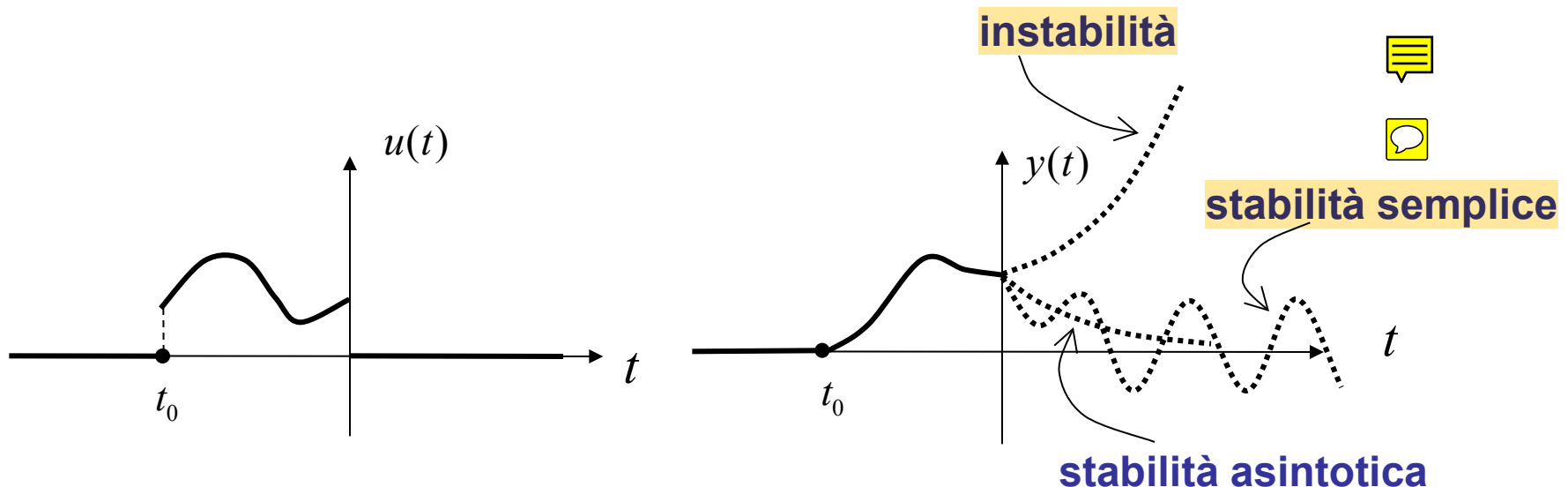
$G(s)$ f.d.t. di Σ ,

$$\square G(0) = \frac{b_0}{a_0} \quad \text{guadagno statico di } \Sigma.$$



Caratteristica statica di Σ

- Per lo studio della stabilità dei punti di equilibrio di Σ si scelga l'origine della caratteristica statica di Σ : $u_c = 0$, $y_c = 0$. Come vedremo tale studio porta alle medesime conclusioni per qualsivoglia punto di equilibrio.
- Per semplicità assumiamo $a(s)$ e $b(s)$ coprimi fra loro.
- Il punto di equilibrio $u_c = 0$, $y_c = 0$ venga perturbato nell'intervallo temporale $[t_0, 0)$, $t_0 < 0$ mediante una perturbazione introdotta con il segnale di ingresso.



$$\begin{aligned}
 u(t) &= 0 \text{ per } t < t_0, \quad u(t) \neq 0 \text{ per } t \in [t_0, 0), & u(t) &= 0 \text{ per } t \geq 0 \\
 y(t) &= 0 \text{ per } t < t_0, \quad y(t) \neq 0 \text{ per } t \in [t_0, 0), & y(t) &= y_{\text{lib.}}(t) \text{ per } t \geq 0
 \end{aligned}$$

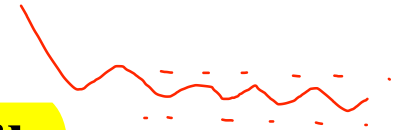
Conseguenze: l'uscita è **in evoluzione libera** per $t \geq 0$

$$y_{\text{lib.}}(t) = \mathcal{L}^{-1} [Y_L(s)]$$

$$Y_{\text{lib.}}(s) = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{i-1} a_i D^{i-1-j} y_- s^j - \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{i-1} b_i D^{i-1-j} u_- s^j}{\sum_{i=0}^n a_i s^i}$$

Comportamento della risposta libera $y_{\text{lib.}}(t)$ a seguito delle perturbazioni introdotte:

- $y_{\text{lib.}}(t)$ **limitata** su $[0, +\infty)$: punto di equilibrio **stabile**.
- $y_{\text{lib.}}(t)$ **non limitata** su $[0, +\infty)$: punto di equilibrio **instabile**.
- $y_{\text{lib.}}(t)$ **limitata** su $[0, +\infty)$ e **convergente a zero** per $t \rightarrow +\infty$: punto di equilibrio **asintoticamente stabile**.



Proprietà: Per il sistema **lineare** Σ il **comportamento della risposta libera** a seguito di **perturbazioni** su di un punto di equilibrio rimane il **medesimo** per qualsivoglia altro punto di equilibrio. 

Dim.: per semplicità sia $n = 2$, $m = 1$

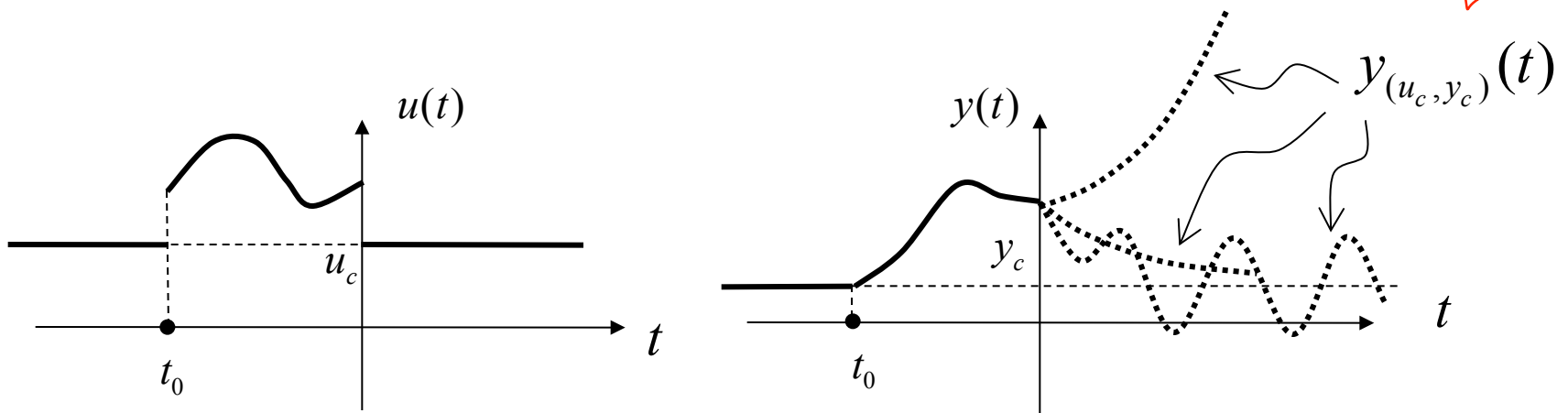
$$a_2 D^2 y + a_1 D y + a_0 y = b_1 D u + b_0 u$$

Per il punto di equilibrio $(0, 0)$ la proprietà di stabilità/instabilità è associata all'evoluzione libera descritta da

$$a_2 D^2 y_{(0,0)}(t) + a_1 D y_{(0,0)}(t) + a_0 y_{(0,0)}(t) = 0 \quad \text{per } t > 0$$

Consideriamo il punto di equilibrio (u_c, y_c) con $u_c \neq 0$ ed indichiamo con $y_{(u_c, y_c)}(t)$ la risposta libera a seguito di una perturbazione:

$$a_2 D^2 y_{(u_c, y_c)}(t) + a_1 D y_{(u_c, y_c)}(t) + a_0 y_{(u_c, y_c)}(t) = b_0 u_c \quad \text{per } t > 0$$



$$a_2 D^2 y_{(0,0)}(t) + a_1 D y_{(0,0)}(t) + a_0 y_{(0,0)}(t) = 0 \quad \text{per } t > 0$$

Dim. (cont.) :

Introduciamo il cambio di variabile $y(t) = \tilde{y}(t) + y_c$

per $t > 0$ sia $y_{(u_c, y_c)}(t) = \tilde{y}_{(u_c, y_c)}(t) + y_c$

$$\Rightarrow a_2 D^2 \tilde{y}_{(u_c, y_c)}(t) + a_1 D \tilde{y}_{(u_c, y_c)}(t) + a_0 \tilde{y}_{(u_c, y_c)}(t) + \cancel{a_0 y_c} = \cancel{b_0 u_c} \quad \text{per } t > 0$$

$$a_2 D^2 \tilde{y}_{(u_c, y_c)}(t) + a_1 D \tilde{y}_{(u_c, y_c)}(t) + a_0 \tilde{y}_{(u_c, y_c)}(t) = 0 \quad \text{per } t > 0$$

Il comportamento della risposta libera $\tilde{y}_{(u_c, y_c)}(t)$ è quindi il medesimo di $y_{(0,0)}(t)$. □

Conseguenza: possiamo parlare di stabilità/instabilità del sistema anziché di stabilità/instabilità di un punto di equilibrio.

Def.: Stabilità (alle perturbazioni) di un sistema dinamico lineare

Il sistema lineare Σ si dice:

1. STABILE se per ogni perturbazione $y_{\text{lib.}}(t)$ è limitata su $[0, +\infty)$.

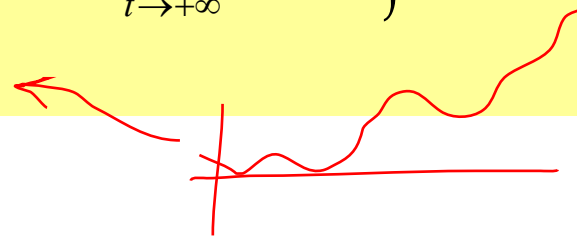
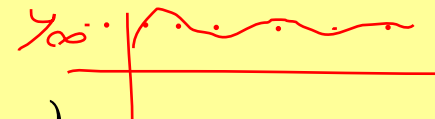
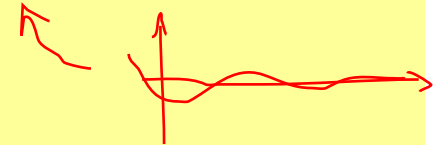
2. ASINTOTICAMENTE STABILE se è stabile ed inoltre

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y_{\text{lib.}}(t) = 0 \text{ per ogni perturbazione introdotta.}$$

3. SEMPLICEMENTE STABILE se è stabile ed inoltre esiste una perturbazione per la quale

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y_{\text{lib.}}(t) = y_{\infty} \neq 0 \vee \left\{ \text{non esiste } \lim_{t \rightarrow +\infty} y_{\text{lib.}}(t) \right\}.$$

4. INSTABILE se non è stabile.





Teorema (poli di Σ e stabilità)

Sia Σ un sistema lineare per il quale i poli coincidono con le radici del polinomio caratteristico ($a(s)$ e $b(s)$ sono **coprime** fra loro).

- a. Σ è **stabile** se e solo se tutti i poli hanno **parte reale non positiva** e gli eventuali **poli puramente immaginari** sono **semplici** 
- b. Σ è **asintoticamente stabile** se e solo se tutti i suoi poli hanno parte reale negativa. 
- c. Σ è **semplicemente stabile** se e solo se tutti i poli hanno parte reale non positiva e quelli puramente immaginari (**che devono esistere**) sono **semplici**. 
- d. Σ è **instabile** se e solo se esiste almeno un polo a parte reale positiva o un polo puramente immaginario con molteplicità maggiore di uno. 

Nota: Se $a(s)$ e $b(s)$ non sono coprimi fra loro, il teorema di stabilità ammette la medesima formulazione sostituendo i “poli” con le “radici del polinomio caratteristico”.

Esempi : Σ con f.d.t. $G(s) = b(s) / a(s)$

$$G(s) = \frac{s+1}{s(s+5)} \Rightarrow \Sigma \text{ è semplicemente stabile}$$

$$G(s) = \frac{(s+2)(s-5)}{s^2(s+12)(s+50)} \Rightarrow \Sigma \text{ è instabile}$$

$$G(s) = \frac{(s+2)(s-5)}{(s+7)^4(s+50)} \Rightarrow \Sigma \text{ è asintoticamente stabile}$$

$$G(s) = \frac{(s+2)(s-5)}{(s-3)(s+50)} \Rightarrow \Sigma \text{ è instabile}$$

Stabilità ingresso-limitato uscita-limitata

(stabilità BIBO, *bounded-input bounded-output*)

Def. (stabilità BIBO)

Σ è BIBO stabile se per ogni azione forzante limitata la corrispondente risposta forzata è anch'essa limitata.

Formalmente: $\left[\|f(t)\|_{\infty} \triangleq \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)| \right]$

$\forall (u(t), y(t)) \in \mathcal{B}$ con $u(t) = 0, y(t) = 0$ per $t < 0$ e $\|u(t)\|_{\infty} < +\infty$
 $\Rightarrow \|y(t)\|_{\infty} < +\infty.$

Teorema (Stabilità BIBO)

Σ è BIBO stabile se e solo se $\int_0^{+\infty} |g(\tau)| d\tau < +\infty.$ 

Dim.: sufficienza

$$y(t) = \int_0^{+\infty} g(\tau) u(t-\tau) d\tau \Rightarrow |y(t)| \leq \int_0^{+\infty} |g(\tau)| |u(t-\tau)| d\tau \leq \left(\int_0^{+\infty} |g(\tau)| d\tau \right) \cdot \|u(t)\|_{\infty}$$

necessità : Occorre provare che la stabilità BIBO implica la limitatezza dell'integrale improprio. Si ragiona per assurdo: si ipotizza che l'integrale sia illimitato e quindi per $M > 0$ grande a piacere esiste

$$t_1 > 0 \text{ tale che } \int_0^{t_1} |g(\tau)| d\tau = M.$$

$$y(t_1) = \int_0^{t_1} g(\tau) u(t_1 - \tau) d\tau \quad \text{si sceglie } u(t) \ni u(t_1 - \tau) = \text{sign } g(\tau) \quad \forall \tau \in [0, t_1]$$

$$y(t_1) = \int_0^{t_1} g(\tau) \text{sign } g(\tau) d\tau = \int_0^{t_1} |g(\tau)| d\tau = M$$

l'uscita assume valori illimitati in risposta ad un ingresso limitato...

□

Si assuma $a(s)$ e $b(s)$ coprimi fra loro. Vale quindi la seguente equivalenza.

Teorema (Equivalenza tra Stabilità BIBO e Stabilità Asintotica)

Σ è BIBO stabile se e solo se Σ è asintoticamente stabile.

Il Criterio di Routh

Si consideri il sistema lineare Σ descritto dall'eq. diff.

$$\sum_{i=0}^n a_i D^i y = \sum_{i=0}^m b_i D^i u ; \text{ la sua f.d.t. è } G(s) = b(s) / a(s)$$

con $a(s)$ polinomio caratteristico di Σ .

Def. (Equazione caratteristica)

Dato il sistema Σ l'eq. $a(s) = 0$ ovvero

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0$$

è detta equazione caratteristica di Σ .

La **stabilità** di Σ è **associata alle radici dell'eq. caratteristica.**

• Def. (Polinomi di Hurwitz)

Un polinomio $a(s)$ è detto di Hurwitz o hurwitziano se tutte le sue radici hanno parte reale negativa. 

• Proprietà

Si assuma $a_n > 0$. Il polinomio $a(s)$ è hurwitziano solo se tutti i suoi coefficienti sono positivi. 

Dim.: Se le radici di $a(s)$ hanno tutte parte reale negativa allora 

$$a(s) = a_n (s + \eta_1)(s + \eta_2) \cdots (s + \eta_k) (s^2 + 2\delta_1 \omega_{n1} s + \omega_{n1}^2) \cdots (s^2 + 2\delta_l \omega_{nl} s + \omega_{nl}^2)$$

$$\eta_i > 0 \quad i = 1, \dots, k$$

$$\omega_{ni} > 0 \quad i = 1, \dots, l$$

$$\delta_i \in (0, 1) \quad i = 1, \dots, l$$

Quindi sviluppando tutti i prodotti si deduce che i coefficienti sono positivi in quanto somme di termini positivi... 

È possibile **determinare il segno delle radici** di $a(s)$ ($\text{Re} > 0$, $\text{Re} = 0$, $\text{Re} < 0$) mediante la cosiddetta *Tabella di Routh*.

- Costruzione della Tabella di Routh

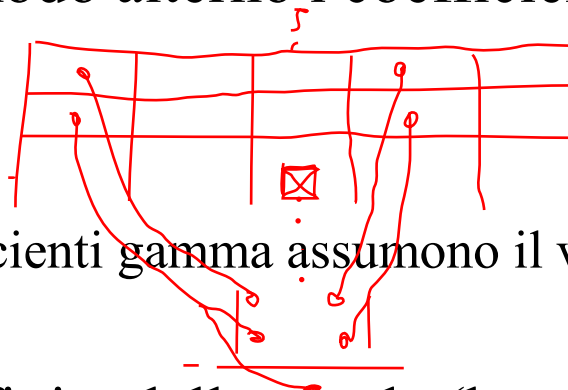
n	$\gamma_{0,1}$	$\gamma_{0,2}$	$\gamma_{0,3}$	$\cdots$
$n-1$	$\gamma_{1,1}$	$\gamma_{1,2}$	$\gamma_{1,3}$	$\cdots$
$n-2$	$\gamma_{2,1}$	$\gamma_{2,2}$	$\gamma_{2,3}$	$\cdots$
$n-3$	$\gamma_{3,1}$	$\gamma_{3,2}$	$\gamma_{3,3}$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
$\vdots$				
2	$\gamma_{n-2,1}$	$\gamma_{n-2,2}$		
1	$\gamma_{n-1,1}$			
0	$\gamma_{n,1}$			

- Regole di costruzione della T.d.R. (algoritmo base)

1. Le prime due righe riportano in modo alternato i coefficienti di $a(s)$:

$$\gamma_{0,1} = a_n \quad \gamma_{0,2} = a_{n-2} \quad \gamma_{0,3} = a_{n-4} \quad \dots$$

$$\gamma_{1,1} = a_{n-1} \quad \gamma_{1,2} = a_{n-3} \quad \gamma_{1,3} = a_{n-5} \quad \dots$$



Ove non esplicitamente definiti i coefficienti gamma assumono il valore di zero.

2. Le righe successive vengono definite dalla regola ($k = 2, 3, \dots, n$):

$$\gamma_{k,j} = - \frac{\begin{vmatrix} \gamma_{k-2,1} & \gamma_{k-2,j+1} \\ \gamma_{k-1,1} & \gamma_{k-1,j+1} \end{vmatrix}}{\gamma_{k-1,1}} = \frac{\gamma_{k-1,1}\gamma_{k-2,j+1} - \gamma_{k-2,1}\gamma_{k-1,j+1}}{\gamma_{k-1,1}}$$

- **Teorema (di Routh)**

Si assuma che la tabella di Routh possa essere completata. Allora ad ogni variazione⁺ di segno, degli elementi consecutivi della prima colonna, corrisponde una radice a parte reale positiva, ad ogni permanenza⁻ corrisponde una radice a parte reale negativa.

- **Criterio di Routh**

Il polinomio $a(s)$ è hurwitziano se e solo se l'associata tabella di Routh può essere completata (con l'algoritmo base) e presenta nella prima colonna solo permanenze di segno.

Esempi :

$$s^3 - 4s^2 + s + 6 = 0 \quad (\text{radici } -1, 2, 3)$$

$$\begin{array}{c|cccc} 3 & & 1 & & 1 & 0 \\ 2 & & -4 & & 6 & 0 \\ 1 & & \frac{-4-6}{-4} = \frac{5}{2} & & & 0 \\ 0 & & 6 & & & \end{array}$$

due variazioni $\Rightarrow \{\text{n. radici} \in \mathbb{C}_+\} = 2$

una permanenza $\Rightarrow \{\text{n. radici} \in \mathbb{C}_-\} = 1$

$$2s^4 + s^3 + 3s^2 + 5s + 10 = 0 \quad (\text{radici } 0.7555 \pm j1.4444, -1.0055 \pm j0.9331)$$

$$\begin{array}{c|cccc} 4 & 2 & 3 & 10 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & -7 & 10 & 0 & \\ 1 & \frac{45}{7} & 0 & & \\ 0 & 10 & & & \end{array}$$

due variazioni $\Rightarrow \{\text{n. radici} \in \mathbb{C}_+\} = 2$

due permanenze $\Rightarrow \{\text{n. radici} \in \mathbb{C}_-\} = 2$

• Proprietà

Durante la costruzione della tabella di Routh i termini di una stessa riga possono essere moltiplicati tutti per uno stesso coefficiente positivo senza che ciò modifichi le variazioni (o permanenze) di segno nella prima colonna.

Esempi : $4s^4 + 3s^3 + 5s^2 + 2s + 1 = 0$

4	4	5	1	0	
3	3	2	0	0	
2	7	3	0		(non si è diviso per 3)
1	5	0			(non si è diviso per 7)
0	3				

Tutte permanenze $\Rightarrow$ tutte radici con parte reale negativa

$$s^4 + 3s^3 + 7s^2 + 6s + 15 = 0$$

$$\begin{array}{c|cccc}
 4 & 1 & 7 & 15 & 0 \\
 3 & 1 & 2 & 0 & 0 & \text{(si è diviso per 3)} \\
 2 & 1 & 3 & 0 & & \text{(si è diviso per 5)} \\
 1 & -1 & 0 & & & \\
 0 & 3 & & & &
 \end{array}$$

$$\text{due variazioni} \Rightarrow \{\text{n. radici} \in \mathbb{C}_+\} = 2$$

$$\text{due permanenze} \Rightarrow \{\text{n. radici} \in \mathbb{C}_-\} = 2$$

Casi singolari nella Costruzione della Tabella di Routh

- a) Il primo elemento di una riga è zero.
- b) Tutti gli elementi di una riga sono nulli.

Prosecuzione della tabella nel caso a)

1. ~~Metodo ϵ (è obsoleto: algoritmicamente complesso e non sempre risolutivo)~~ 
2. **Metodo di Benidir-Picinbono (1990):** algoritmicamente semplice e *sempre* risolutivo.

Metodo di Benidir-Picinbono

Ogni riga, non nulla, che inizia con p zeri viene sommata con la riga da questa ottenuta moltiplicandola per $(-1)^p$ e traslandola verso sinistra di p posizioni. La tabella di Routh viene poi continuata ed interpretata nel modo usuale.

Esempio : $a(s) = s^3 + 3s - 2 = 0$

3	1	3	0
2'	0	-2	0
2''	2	0	0
2	2	-2	0
1	4	0	
0	-2		

una variazione $\Rightarrow n_+(a) = 1$

due permanenze $\Rightarrow n_-(a) = 2$

Prosecuzione della tabella nel caso b)

| 0 0 0 0

Tutti gli elementi di una riga sono nulli: quando il polinomio $a(s)$ non ha radici nell'origine ($a_0 \neq 0$) questo accade sempre su di una riga dispari.

$$\begin{array}{c|cccccc} 2i & \gamma_{n-2i,1} & \gamma_{n-2i,2} & \gamma_{n-2i,3} & \cdots & \gamma_{n-2i,i+1} & 0 \\ 2i-1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array}$$

Def. **polinomio ausiliario** $\beta(s)$

$$\beta(s) := \gamma_{n-2i,1}s^{2i} + \gamma_{n-2i,2}s^{2i-2} + \gamma_{n-2i,3}s^{2i-4} + \cdots + \gamma_{n-2i,i}s^2 + \gamma_{n-2i,i+1}$$

L'eq. ausiliaria è quindi $\beta(s) = 0$

Proprietà

1. Il polinomio ausiliario $\beta(s)$ divide $a(s)$. Quindi esiste un polinomio $\alpha(s)$ tale che $a(s) = \alpha(s)\beta(s)$.
2. La prima parte della tabella (fino alla riga $2i$) dà informazioni sul segno delle radici di $\alpha(s)$.

Proprietà (simmetria delle radici del polinomio ausiliario)

Le radici del polinomio ausiliario $\beta(s)$ sono disposte simmetricamente rispetto all'origine del piano complesso.

Dim. (cenno) Nel polinomio $\beta(s)$ mancano i termini dispari...

Quindi $\sigma \pm j\omega$ è radice di $\beta(s)$ se e solo se $-\sigma \pm j\omega$ è radice di $\beta(s)$



- **Corollario**

L'equazione ausiliaria $\beta(s) = 0$ ha tante radici a parte reale negativa quante sono quelle a parte reale positiva e può anche presentare radici puramente immaginarie.

- **Come proseguire la costruzione della Tabella nel caso b)**
 1. Si deriva il polinomio ausiliario.
 2. I coefficienti del polinomio così ottenuto sostituiscono gli zeri della riga nulla.
 3. Si prosegue la Tabella con l'algoritmo usuale: in questo caso però le permanenze corrispondono anche a radici puramente immaginarie.

Interpretazione della Tabella di Routh nel caso di singolarità completa (caso b))

1. La prima colonna della tabella dalla riga n alla riga $2i$ da informazioni sul segno delle radici di $\alpha(s)$: una variazione $\rightarrow$ una radice a parte reale positiva, una permanenza $\rightarrow$ una radice a parte reale negativa.
2. La prima colonna della tabella dalla riga $2i$ alla riga 0 da informazioni sul segno delle radici di $\beta(s)$: una variazione $\rightarrow$ una radice a parte reale positiva, una permanenza $\rightarrow$ una radice a parte reale negativa oppure una radice puramente immaginaria.

La simmetria delle radici di $\beta(s)$ (pol. ausiliario) permette di stabilire il segno della parte reale di tutte le radici.

Esempio : $a(s) = s^6 + s^5 - 2s^4 - 3s^3 - 7s^2 - 4s - 4$

6	1	-2	-7	-4	0
5	1	-3	-4	0	0
4	1	-3	-4	0	
3	2	-3	0	0	
2	-3	-8	0		
1	-25	0			
0	-8				

polinomio ausiliario $\beta(s) = s^4 - 3s^2 - 4$

$D\beta(s) = 4s^3 - 6s$ (si è diviso per 2)

$$n_+(a) = 1$$

$$n_0(a) = 2 \quad (\text{calcolato come } 4 - 1 - 1)$$

$$n_-(a) = 2 + 1 = 3$$