

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica, Elettronica e delle
Telecomunicazioni

Lezione n. 9 di Fondamenti di Controlli Automatici
prof. Aurelio Piazzì

Analisi armonica e diagrammi di Bode

Università degli Studi di Parma – a.a. 2015-2016

- Il fenomeno armonico nei sistemi lineari
- La funzione di risposta armonica
- Una rappresentazione grafica: i diagrammi di Bode

L'analisi armonica nei sistemi lineari

Un esempio : Applichiamo il segnale armonico $u(t) = 2 \sin(t)$, $t \geq 0$

ad un sistema con f.d.t. $G(s) = \frac{10}{s+1}$:

$$Y(s) = \frac{10}{s+1} \cdot \mathcal{L}[2 \sin(t)] = \frac{10}{s+1} \cdot \frac{2}{s^2 + 1} = \frac{k_1}{s+1} + \frac{k_2}{s-j} + \frac{\bar{k}_2}{s+j}$$

$$k_1 = 10, \quad k_2 = \frac{10}{j(j+1)}$$

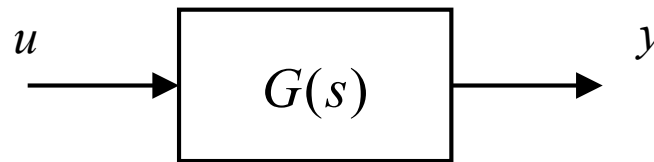
$$y(t) = 10e^{-t} + 2 \frac{10}{\sqrt{2}} \cos \left(t + \arg \left(\frac{10}{j(j+1)} \right) \right) = 10e^{-t} + 10\sqrt{2} \cos \left(t - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right)$$

quando $t \rightarrow +\infty$: $y_{\infty}(t) = 10\sqrt{2} \sin \left(t - \frac{\pi}{4} \right)$

Più in generale consideriamo un sistema dinamico Σ ,

asintoticamente stabile, descritto dall'eq. diff. $\sum_{i=0}^n a_i D^i y = \sum_{i=0}^m b_i D^i u$

($a(s)$ e $b(s)$ siano coprimi fra loro). La f.d.t. è $G(s) = \frac{b(s)}{a(s)}$.



Fenomeno di risposta armonica: Col sistema in quiete, all'istante $t = 0-$, si applichi $u(t) = U \sin(\omega t)$, $\omega \geq 0$, $U > 0$. La risposta forzata di Σ per $t \rightarrow +\infty$ assume la forma:

$$y_{\infty}(t) = Y(\omega) \sin(\omega t + \varphi(\omega))$$



Def. (funzione di risposta armonica)

$$F : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$\omega \rightarrow F(\omega) := \frac{Y(\omega)}{U} e^{j\varphi(\omega)}$$

In virtù della linearità di Σ , $F(\omega)$ è indipendente da U .

Teorema (di analisi armonica)

Sia Σ un sistema asintoticamente stabile con f.d.t. $G(s)$ razionale.

La risposta forzata di Σ ad un segnale armonico all'ingresso è ancora, a regime ($t \rightarrow +\infty$), un segnale armonico con la stessa frequenza dell'ingresso. La funzione di risposta armonica associata soddisfa la relazione:

$$F(\omega) = G(j\omega)$$

$$\mathbf{Dim.}: Y(s) = G(s)\mathcal{L}[U \text{ sen } \omega t] = G(s) \frac{U\omega}{s^2 + \omega^2} = G(s) \frac{U\omega}{(s - j\omega)(s + j\omega)}$$

dallo sviluppo in fratti semplici ...

$$Y(s) = \frac{k_1}{s - p_1} + \dots + \frac{k_n}{s - p_n} + \frac{k}{s - j\omega} + \frac{\bar{k}}{s + j\omega} \quad \text{con } \operatorname{Re} p_i < 0, \quad i = 1, \dots, n$$

$$\text{quindi } y(t) = y_t(t) + y_\infty(t) \quad , \quad \text{con } \lim_{t \rightarrow \infty} y_t(t) = 0$$

$$y_t(t) := \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{k_1}{s - p_1} + \dots + \frac{k_n}{s - p_n} \right] \quad y_\infty(t) := \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{k}{s - j\omega} + \frac{\bar{k}}{s + j\omega} \right]$$

$$k = G(s) \frac{U\omega}{s + j\omega} \Big|_{s=j\omega} = G(j\omega) \frac{U}{2j}$$

$$y_\infty(t) = 2|G(j\omega)| \frac{U}{2} \cos \left(\omega t + \arg G(j\omega) - \frac{\pi}{2} \right) = U|G(j\omega)| \sin(\omega t + \arg G(j\omega))$$

$$\Rightarrow F(\omega) = |G(j\omega)| e^{j \arg G(j\omega)} = G(j\omega)$$

□

- La funzione di risposta armonica $F(\omega)$ è un modello matematico di Σ (alternativo all'eq.diff., f.d.t., risposta all'impulso, risposta al gradino, ecc. ...).

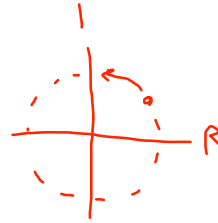
$F(\omega)$ può essere determinata sperimentalmente ...

- Sfruttando la relazione $F(\omega) = G(j\omega)$ la f. di risposta armonica è definibile anche per sistemi non asintoticamente stabili.
- Relazioni fra la risposta armonica $G(j\omega)$ e la risposta all'impulso $g(t)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{~} G(j\omega) = \int_{0-}^{+\infty} g(t) e^{-j\omega t} dt \\ \text{~} g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \end{array} \right.$$

- Ponendo $G(j\omega) = R(\omega) + j I(\omega)$ si potrebbe dimostrare:

$$\begin{cases} R(\omega) = \int_0^{+\infty} g(t) \cos \omega t \, dt \\ I(\omega) = - \int_0^{+\infty} g(t) \sin \omega t \, dt \end{cases}$$



$$\begin{cases} g(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} R(\omega) \cos \omega t \, d\omega \\ g(t) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} I(\omega) \sin \omega t \, d\omega \end{cases}$$

- Rappresentazioni grafiche della f. di risposta armonica: diagrammi di Bode, diagrammi **polari** (o di Nyquist), diagrammi di Nichols.

Guadagni del sistema lineare Σ

Funzione di trasferimento
(Guadagno dinamico)

$$G(s)$$



$$s := j\omega$$

Funzione di risposta armonica,
anche Risposta in frequenza
(Guadagno armonico)

$$G(j\omega)$$



$$s := 0$$

Guadagno statico

$$G(0)$$

I diagrammi di Bode

diagrammi di B. $\equiv$ diagrammi (cartesiani) logaritmici della risposta armonica



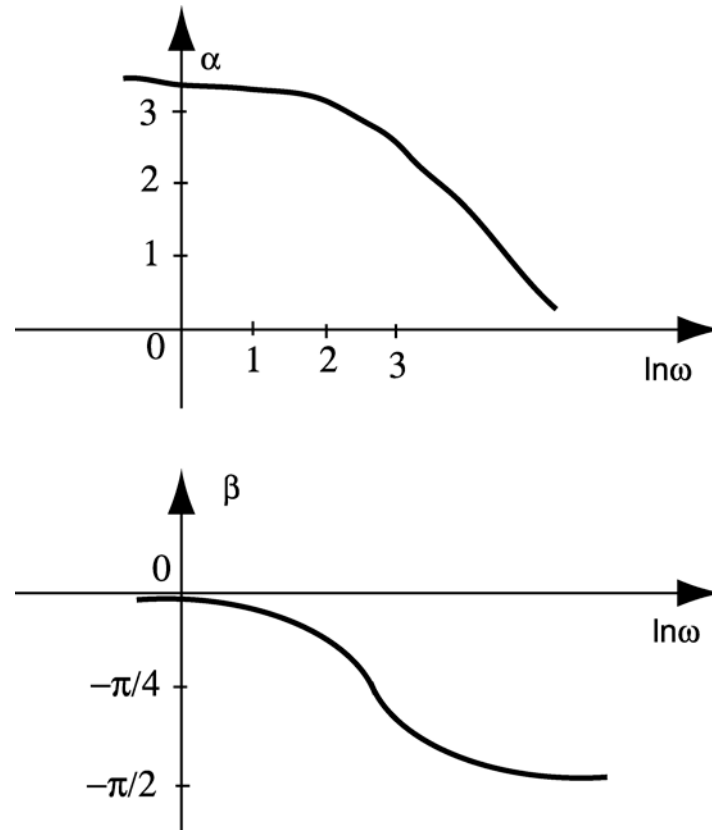
$$G(j\omega) = |G(j\omega)| e^{j \arg G(j\omega)}$$

$$\ln G(j\omega) = \ln |G(j\omega)| + j \arg G(j\omega) =: \alpha + j\beta$$

$$\alpha = \ln |G(j\omega)| \cong 2,3025 \log_{10} |G(j\omega)|$$

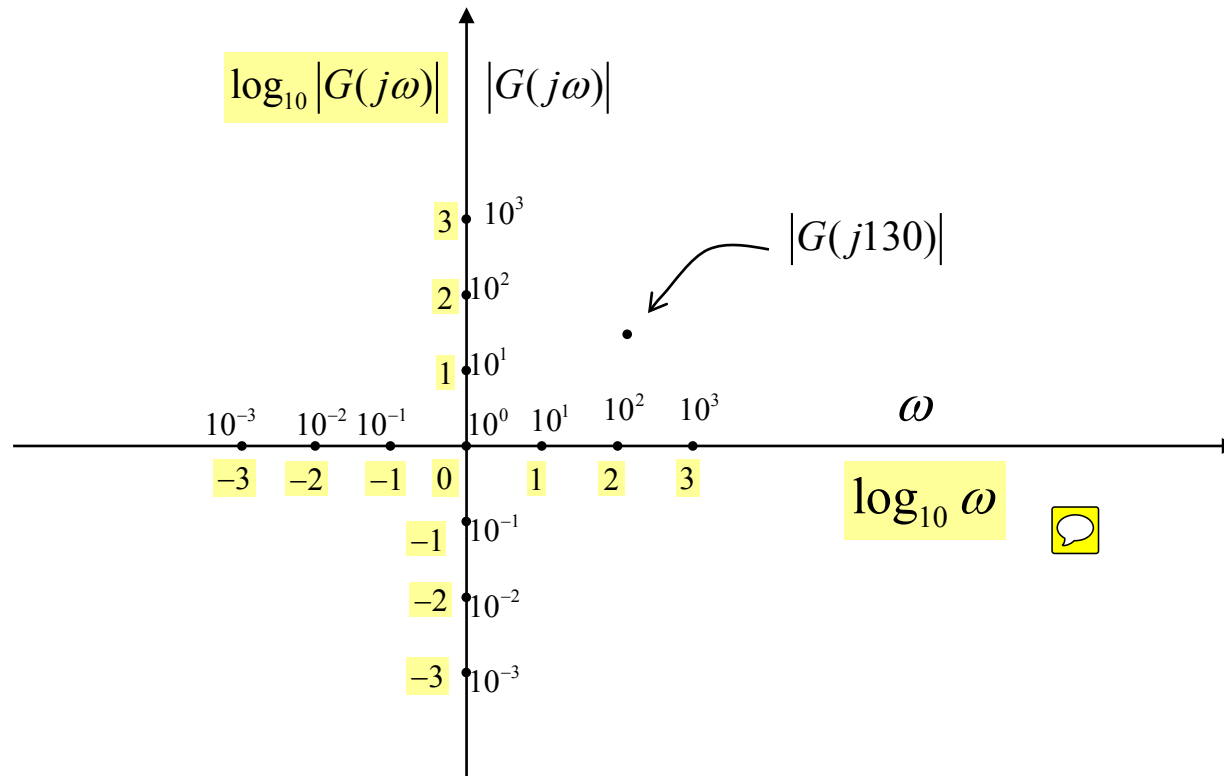
$$\beta = \arg G(j\omega)$$

- **Diagramma delle ampiezze o dei moduli o diagramma α** : riporta il logaritmo del modulo della r.a. in funzione del logaritmo della pulsazione ω .
- **Diagramma delle fasi o degli argomenti o diagramma β** : riporta l'argomento della r.a. in funzione del logaritmo della pulsazione ω .



- Usualmente nelle ascisse vengono riportati direttamente i valori delle pulsazioni utilizzando una scala logaritmica in base 10.
- Analogamente, per i diagrammi dei moduli, nelle ordinate vengono riportati direttamente i valori dei moduli (utilizzando una scala logaritmica in base 10).

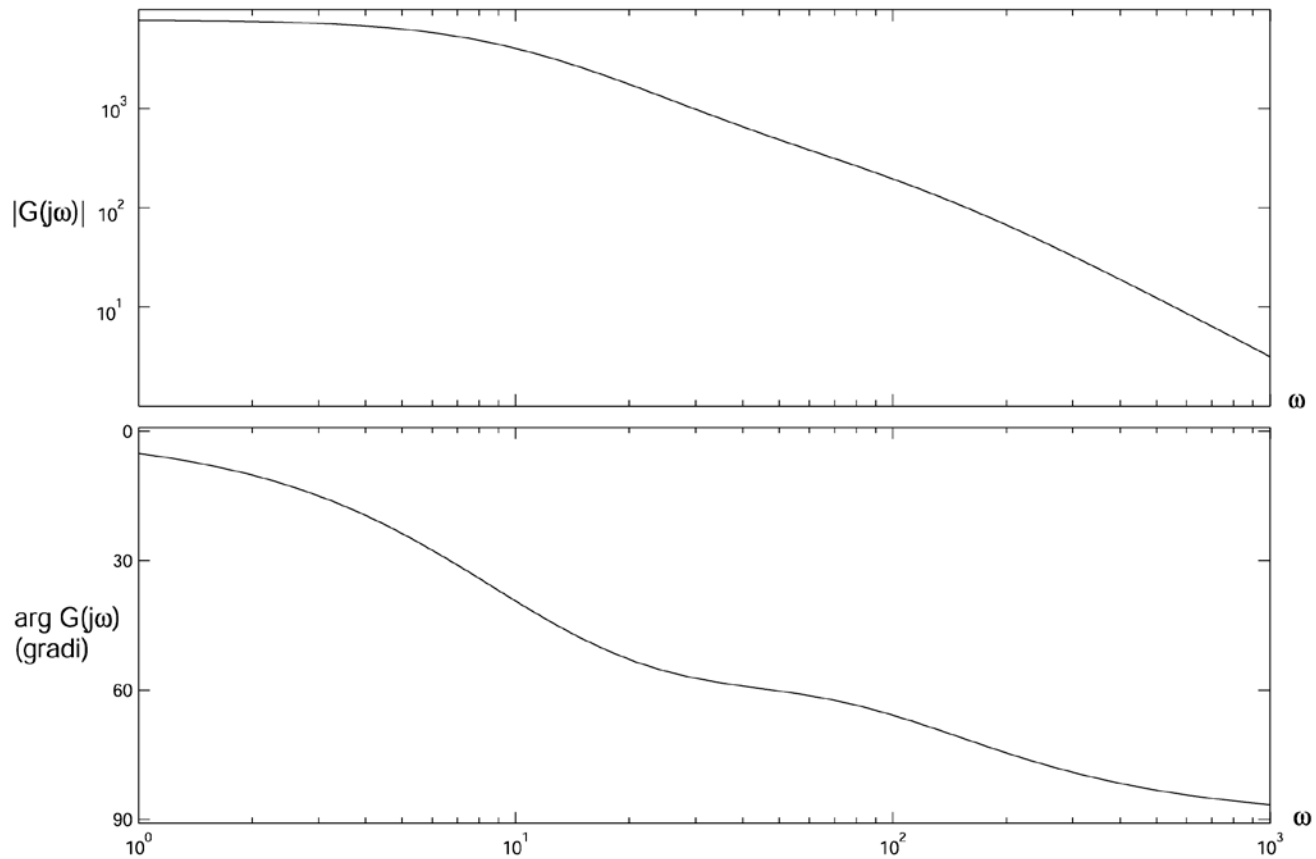
Costruzione del grafico logaritmico di $|G(j\omega)|$ (diagramma del modulo)



Esempio:

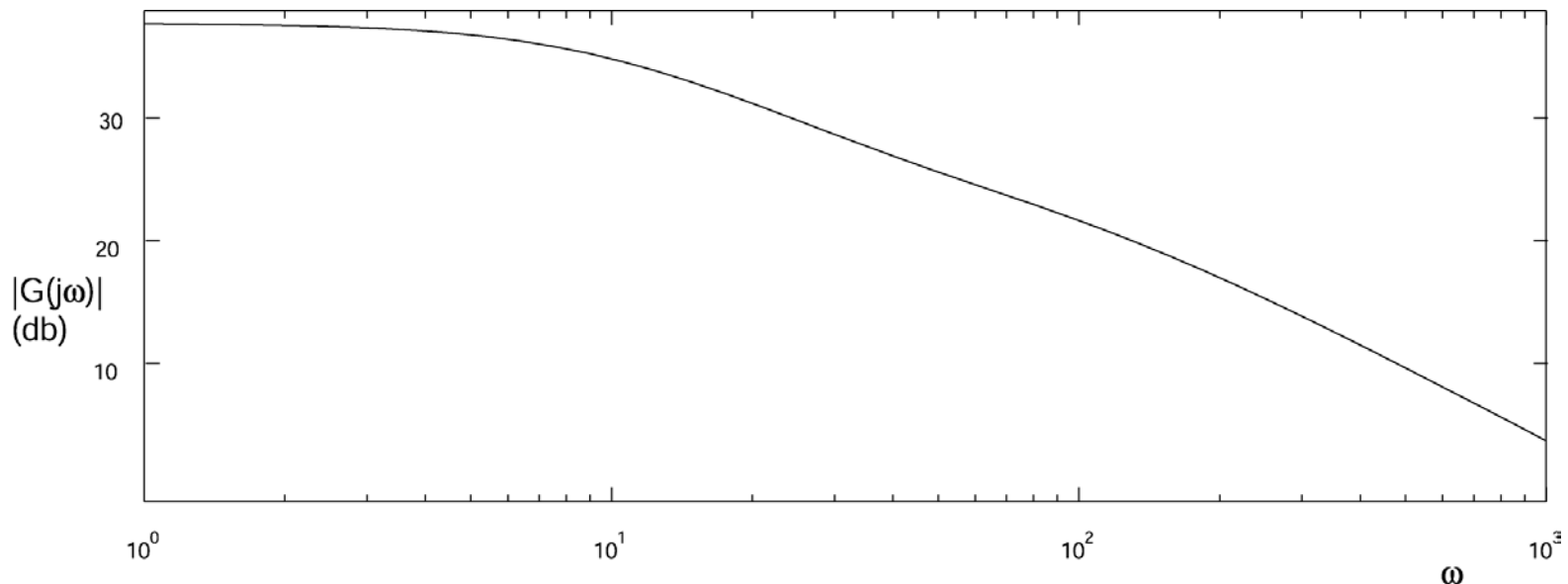
a $|G(j130)| = 21$ corrisponde il punto $(\log_{10} 130, \log_{10} 21) \cong (2.114, 1.322)$ delle scale lineari ed il punto $(130, 21)$ delle scale logaritmiche.

Esempio :
$$G(j\omega) = 50 \frac{\left(1 + j \frac{\omega}{50}\right)}{\left(1 + j \frac{\omega}{10}\right)\left(1 + j \frac{\omega}{100}\right)}$$



- Alternativamente, per i diagrammi dei moduli, si riporta nelle ordinate il modulo della r.a. espresso in decibel (in questo caso, la scala delle ordinate è quella solita, cioè lineare):

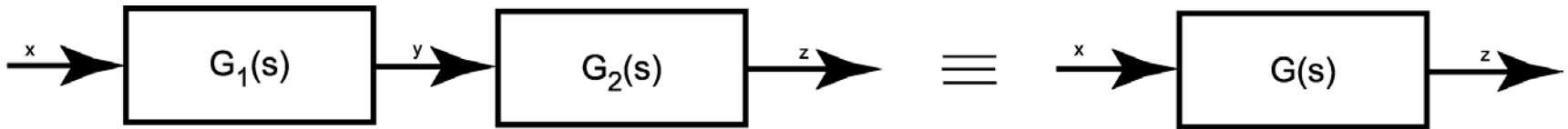
$$dB = 20 \log_{10} |G(j\omega)|$$



In generale, i decibel della r.a. non rappresentano una grandezza adimensionale.

Vantaggi della rappresentazione logaritmica:

1. è possibile rappresentare grandezze variabili in campi molto estesi;
2. è possibile sommare i diagrammi di sistemi in cascata;
3. è possibile costruire i diagrammi come somme di diagrammi elementari.



$$G(s) = G_1(s)G_2(s) \quad \text{e quindi} \quad G(j\omega) = G_1(j\omega)G_2(j\omega)$$

$$\begin{cases} \ln |G(j\omega)| = \ln |G_1(j\omega)| + \ln |G_2(j\omega)| \\ \arg G(j\omega) = \arg G_1(j\omega) + \arg G_2(j\omega) \end{cases}$$

Rappresentazioni e parametri della f.d.t.

Una f.d.t. razionale $G(s)=b(s)/a(s)$ si può scrivere nella **forma (standard) con polinomi monici:**

$$G(s) = K_1 \frac{s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0}$$

o nella **forma (standard) con poli e zeri:**

$$G(s) = K_1 \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)}$$

$K_1 \equiv$ costante di trasferimento

Ipotizzando la presenza di un **polo nell'origine di molteplicità h** (il valore di h definisce il cosiddetto “tipo” del sistema in oggetto):

$$G(s) = K_1 \frac{(s - z_1) \cdots (s - z_m)}{s^h (s - p_{h+1}) \cdots (s - p_n)}$$

e da questa si può ottenere

$$G(s) = K_1 \frac{\left(s + \frac{1}{\tau_1'}\right) \left(s + \frac{1}{\tau_2'}\right) \cdots \left(s^2 + 2\delta_1' \omega_{n1}' s + \omega_{n1}'^2\right) \left(s^2 + 2\delta_2' \omega_{n2}' s + \omega_{n2}'^2\right) \cdots}{s^h \left(s + \frac{1}{\tau_1}\right) \left(s + \frac{1}{\tau_2}\right) \cdots \left(s^2 + 2\delta_1 \omega_{n1} s + \omega_{n1}^2\right) \left(s^2 + 2\delta_2 \omega_{n2} s + \omega_{n2}^2\right) \cdots}$$

τ_i (τ_i') $\equiv$ **costante di tempo** ass.ta ad un polo (zero) reale; τ_i (τ_i') < 0 se il polo (zero) è positivo

ω_{ni} (ω_{ni}') $\equiv$ **pulsazione naturale ass.ta ad una coppia di poli (zeri) complessi coniugati** ($\omega_{ni}, \omega_{ni}' > 0$)

δ_i (δ_i') $\equiv$ **coefficiente di smorzamento ass.to ad una coppia di poli (zeri) complessi coniugati**

($\delta_i, \delta_i' \in \mathbb{R}$, coef. di smorzamento in senso stretto solo se $\delta_i, \delta_i' \in (0, 1)$)

$$G(s) = K_1 \frac{\omega_{n1}'^2 \omega_{n2}'^2 \cdots \tau_1' \tau_2' \cdots}{\omega_{n1}^2 \omega_{n2}^2 \cdots \tau_1' \tau_2' \cdots} \cdot \frac{(1 + \tau_1' s)(1 + \tau_2' s) \cdots \left(1 + 2\delta_1' \frac{s}{\omega_{n1}'} + \frac{s^2}{\omega_{n1}'^2}\right) \cdots}{s^h (1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s) \cdots \left(1 + 2\delta_1 \frac{s}{\omega_{n1}} + \frac{s^2}{\omega_{n1}^2}\right) \cdots}$$

Forma (standard) con le costanti di tempo:

$$G(s) = K \frac{(1 + \tau_1' s)(1 + \tau_2' s) \cdots \left(1 + 2\delta_1' \frac{s}{\omega_{n1}'} + \frac{s^2}{\omega_{n1}'^2}\right) \left(1 + 2\delta_2' \frac{s}{\omega_{n2}'} + \frac{s^2}{\omega_{n2}'^2}\right) \cdots}{s^{\circledast h} (1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s) \cdots \left(1 + 2\delta_1 \frac{s}{\omega_{n1}} + \frac{s^2}{\omega_{n1}^2}\right) \left(1 + 2\delta_2 \frac{s}{\omega_{n2}} + \frac{s^2}{\omega_{n2}^2}\right) \cdots}$$

$K \equiv$ costante di guadagno

Se $h = 0$ (Σ di tipo zero), $K \equiv$ guadagno statico.

Se $h = 1$ (Σ di tipo uno), $K \equiv$ guadagno di velocità.

Se $h = 2$ (Σ di tipo due), $K \equiv$ guadagno di accelerazione.

$$K = K_1 \frac{\omega_{n1}'^2 \omega_{n2}'^2 \cdots \tau_1' \tau_2' \cdots}{\omega_{n1}^2 \omega_{n2}^2 \cdots \tau_1' \tau_2' \cdots}$$

- Rappresentazione della r.a. con le costanti di tempo:

$$G(j\omega) = K \frac{(1 + \tau_1' j\omega)(1 + \tau_2' j\omega) \cdots \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{n1}'^2} + 2\delta_1' \frac{j\omega}{\omega_{n1}'}\right) \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{n2}'^2} + 2\delta_2' \frac{j\omega}{\omega_{n2}'}\right) \cdots}{(j\omega)^h (1 + \tau_1 j\omega)(1 + \tau_2 j\omega) \cdots \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{n1}^2} + 2\delta_1 \frac{j\omega}{\omega_{n1}}\right) \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{n2}^2} + 2\delta_2 \frac{j\omega}{\omega_{n2}}\right) \cdots}$$

 Diagrammi elementari associati a

a) K

b) $(j\omega)^{-h}$

c) $(1 + \tau j\omega)^{\pm 1}$

d) $\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + 2\delta \frac{j\omega}{\omega_n}\right)^{\pm 1}$

Parametri caratteristici della risposta armonica

1. Pulsazione di risonanza ω_R : $\omega_R := \arg \max_{\omega \in \mathbb{R}_{\geq 0}} |G(j\omega)|$
2. Picco di risonanza M_R : $M_R := \frac{|G(j\omega_R)|}{|G(j0)|}$ oppure $M_R := |G(j\omega_R)|$

3. Larghezza di banda B_ω : $B_\omega := \omega_{t2} - \omega_{t1}$; $\omega_{t2} > \omega_{t1} \geq 0$

$\omega_{t2} \equiv$ pulsazione di taglio superiore $\omega_{t1} \equiv$ pulsazione di taglio inferiore

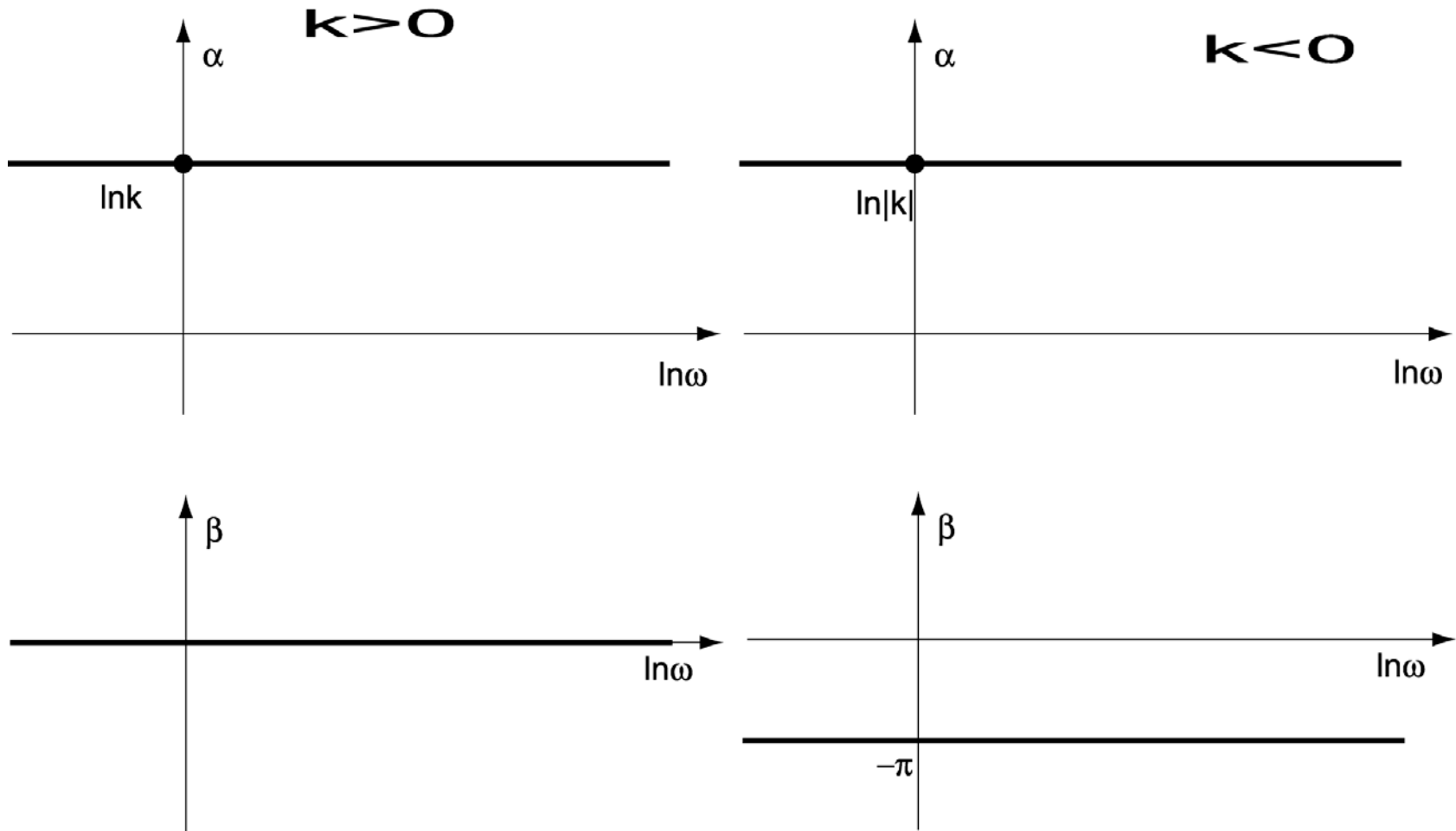
con una r.a. del tipo passa-basso: $\omega_{t1} = 0$, $\omega_{t2} \ni |G(j\omega_{t2})| = \frac{|G(j0)|}{\sqrt{2}}$

con una r.a. del tipo passa-banda:

$$\omega_{t1} \ni |G(j\omega_{t1})| = \frac{|G(j\omega_R)|}{\sqrt{2}} \quad \text{e} \quad \omega_{t1} < \omega_R$$

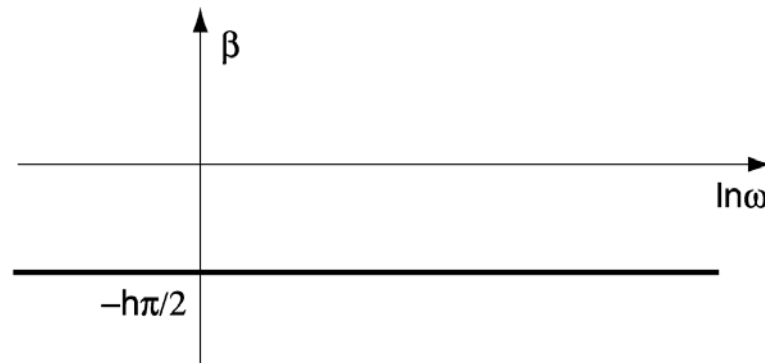
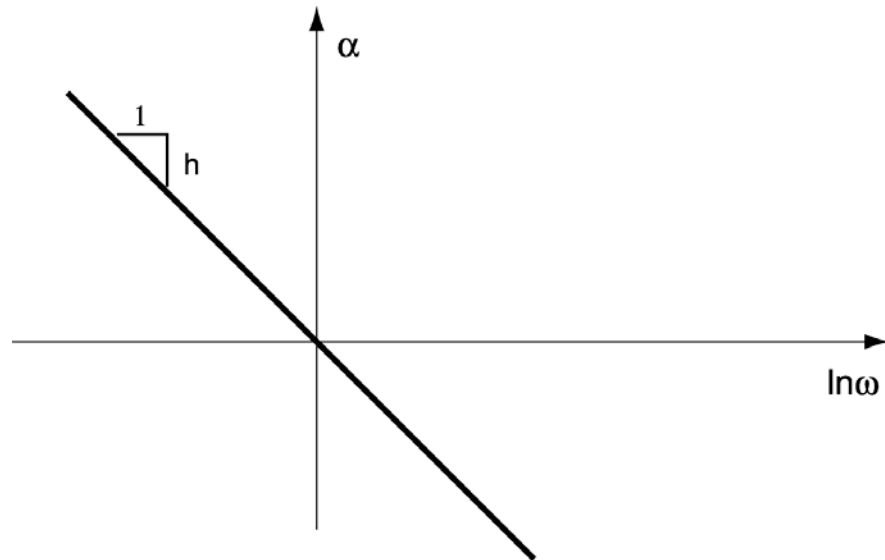
$$\omega_{t2} \ni |G(j\omega_{t2})| = \frac{|G(j\omega_R)|}{\sqrt{2}} \quad \text{e} \quad \omega_{t2} > \omega_R$$

a) $G(j\omega) = K$



b) $G(j\omega) = (j\omega)^{-h}$: $\ln(j\omega)^{-h} = -h \ln j\omega = -h \left(\ln |\omega| + j \frac{\pi}{2} \right) = -h \ln \omega - j \frac{\pi}{2} h$

$$\frac{1}{(j\omega)^h}$$



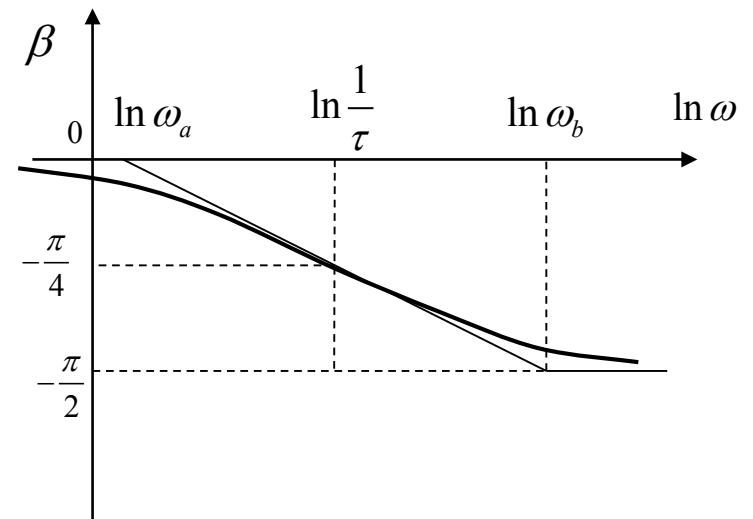
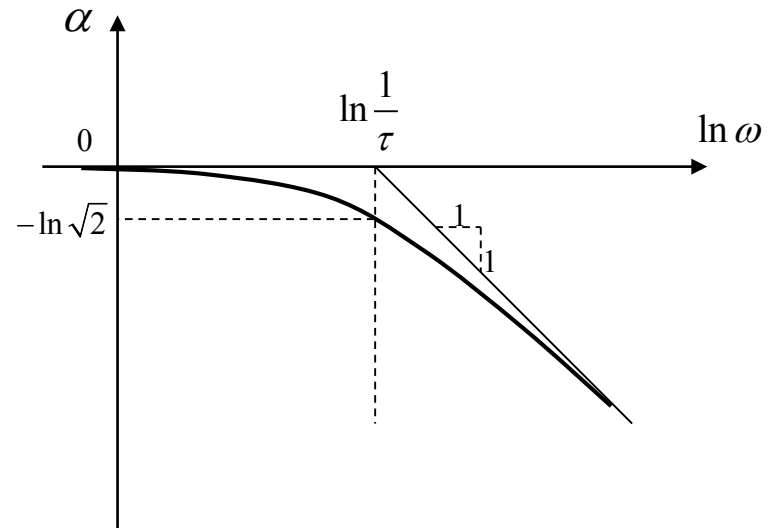
c) $G(j\omega) = (1 + j\omega\tau)^{-1}$

$$\ln G(j\omega) = \ln \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}} + j(-\arctg \omega\tau)$$

Se $\omega \ll \frac{1}{\tau} \Rightarrow \alpha \approx 0$

Se $\omega \gg \frac{1}{\tau} \Rightarrow \alpha \approx \ln \frac{1}{\omega\tau}$

$$\alpha \approx \ln \frac{1}{\omega} + \ln \frac{1}{\tau} = -\ln \omega + \ln \frac{1}{\tau}$$



$\omega_0 := \frac{1}{\tau} \equiv$ pulsazione d'angolo

Determinazione pulsazioni ω_a e ω_b : $\beta = -\arctg \omega \tau$

$$\left. \frac{d\beta}{d(\ln \omega)} \right|_{\omega=\omega_0} = \frac{d\beta}{d\omega} \cdot \frac{d\omega}{d(\ln \omega)} \bigg|_{\omega=\omega_0} = -\frac{\tau}{1 + \omega_0^2 \tau^2} \cdot \omega_0 = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{\pi/4}{\ln \omega_0 - \ln \omega_a} = \frac{\pi/4}{\ln \omega_b - \ln \omega_0} = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \ln \frac{\omega_0}{\omega_a} = \ln \frac{\omega_b}{\omega_0} = \frac{\pi}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\omega_0}{\omega_a} = \frac{\omega_b}{\omega_0} = e^{\frac{\pi}{2}} \cong 4,81$$

$$\begin{cases} \omega_a = \frac{\omega_0}{4,81} \\ \omega_b = \omega_0 \cdot 4,81 \end{cases} \quad \begin{cases} \ln \omega_a = \ln \omega_0 - \ln 4,81 \\ \ln \omega_b = \ln \omega_0 + \ln 4,81 \end{cases}$$

-I diagrammi di $G(j\omega) = 1 + j \omega \tau$ si ottengono per simmetria ribaltando i precedenti rispetto all'asse delle ascisse.

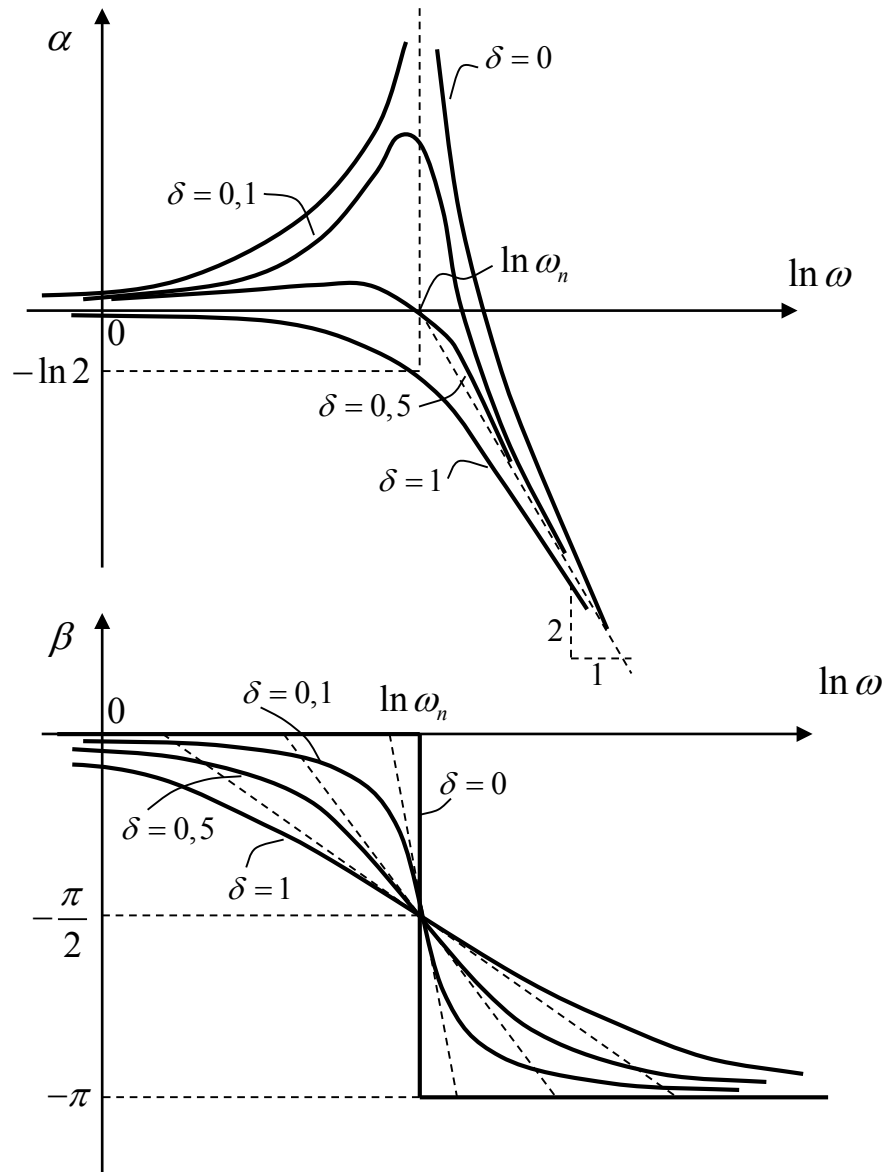
- Se $\tau < 0$, si ribalta il diagramma degli argomenti.

$$d) \quad G(j\omega) = \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + 2\delta \frac{j\omega}{\omega_n} \right)^{-1}$$

$$\ln G(j\omega) = \ln \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4\delta^2 \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}} + j\beta; \quad \beta = \begin{cases} -\arctg \frac{2\delta \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} & \omega < \omega_n \\ -\frac{\pi}{2} & \omega = \omega_n \\ -\arctg \frac{2\delta \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} - \pi & \omega > \omega_n \end{cases}$$

$$\text{Se } \omega \ll \omega_n \Rightarrow \alpha \approx 0$$

$$\text{Se } \omega \gg \omega_n \Rightarrow \alpha \approx \ln \frac{1}{\omega^2 / \omega_n^2} = \ln \frac{\omega_n^2}{\omega^2} = \ln \omega_n^2 - \ln \omega^2 = -2 \ln \omega + 2 \ln \omega_n$$



$$\begin{cases} \ln \omega_a = \ln \omega_n - \ln 4,81^\delta \\ \ln \omega_b = \ln \omega_n + \ln 4,81^\delta \end{cases}$$

Determinazione del picco di risonanza ω_R :

$$u := \frac{\omega}{\omega_n} \quad \min_{u>0} \left[(1-u^2)^2 + 4\delta^2 u^2 \right] \quad 2(1-u^2)(-2u) + 8\delta^2 u = 0$$

$$-4u + 4u^3 + 8\delta^2 u = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u^2 = 1 - 2\delta^2 \quad \Leftrightarrow \quad u = \sqrt{1 - 2\delta^2}$$

$$\omega_R = \omega_n \sqrt{1 - 2\delta^2} \quad \text{c'è risonanza per } 1 - 2\delta^2 > 0, \quad \delta < \frac{1}{\sqrt{2}} \cong 0,707$$

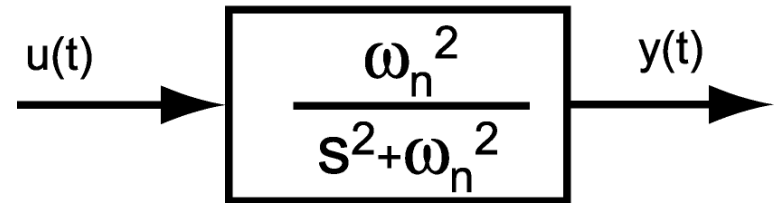
$$\text{quindi } M_R = \frac{|G(j\omega_R)|}{|G(j0)|} = \frac{1}{2\delta\sqrt{1-\delta^2}}$$

$$\begin{cases} \delta \in \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) & \text{c'è risonanza} \\ \delta \in \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1 \right] & \text{non c'è risonanza} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \delta \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \text{ il d. } \alpha \text{ è tutto al di sopra del d. asintotico} \\ \delta \in \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ il d. } \alpha \text{ interseca l'asse delle pulsazioni a sinistra di } \ln \omega_n (\omega_n) \\ \delta \in \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right] \text{ il d. } \alpha \text{ è tutto al di sotto del d. asintotico} \end{cases}$$

- Perché il diagramma α (dei moduli) diverge per $\delta = 0$ ed $\omega = \omega_n$?

$$G(s) = \frac{1}{\left(1 + \frac{s^2}{\omega_n^2}\right)} = \frac{\omega_n^2}{(s^2 + \omega_n^2)}$$



$$u(t) = U \sin \omega_n t, \quad U(s) = \frac{U \omega_n}{s^2 + \omega_n^2}$$

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{\omega_n^2}{(s^2 + \omega_n^2)} \cdot \frac{U \omega_n}{s^2 + \omega_n^2} = \frac{U \omega_n^3}{(s^2 + \omega_n^2)^2} = \frac{U \omega_n^3}{(s - j\omega_n)^2 (s + j\omega_n)^2} =$$

$$= \frac{k_{11}}{(s - j\omega_n)^2} + \frac{k_{12}}{s - j\omega_n} + \frac{k_{21}}{(s + j\omega_n)^2} + \frac{k_{22}}{s + j\omega_n} = \left(\frac{k_{12}}{s - j\omega_n} + \frac{k_{22}}{s + j\omega_n} \right) + \left(\frac{k_{11}}{(s - j\omega_n)^2} + \frac{k_{21}}{(s + j\omega_n)^2} \right)$$

$$\text{quindi } \exists c_1, c_2, \varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{R} \quad \ni \quad y(t) = c_1 \sin(\omega_n t + \varphi_1) + c_2 t \sin(\omega_n t + \varphi_2)$$

Larghezza di banda B_ω :

$$B_\omega = \omega_n \sqrt{(1 - 2\delta^2) + \sqrt{(1 - 2\delta^2)^2 + 1}}$$

- I diagrammi di $G(j\omega) = 1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + 2\delta \frac{j\omega}{\omega_n}$ si ottengono ribaltando i precedenti rispetto all'asse delle ascisse.

- Se $\delta < 0$, si ribalta il diagramma delle fasi.

Punti salienti della lezione:

- Il teorema di analisi armonica
- Il sistema dinamico lineare come filtro
- Rappresentazioni standard di $G(s)$ e $G(j\omega)$
- Diagrammi di Bode elementari
- Diagrammi di Bode asintotici