

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica, Elettronica e delle
Telecomunicazioni

Lezione n. 10 di Fondamenti di Controlli Automatici
prof. Aurelio Piazzì

I diagrammi di Nyquist e i sistemi a fase minima

Università degli Studi di Parma – a.a. 2014-2015

- I diagrammi di Nyquist della funzione di risposta armonica
- I sistemi a fase minima
- Le approssimanti di Padé del ritardo finito

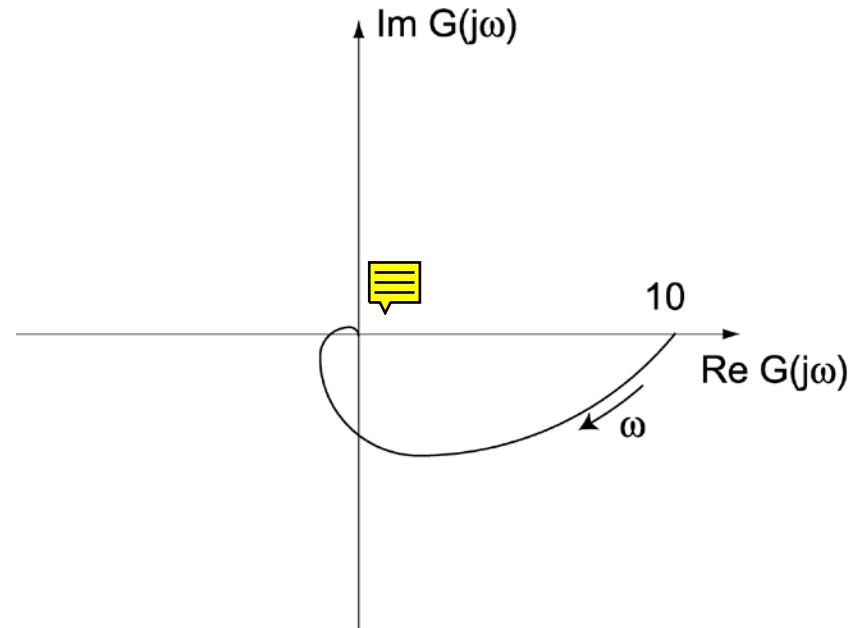
I diagrammi polari o di Nyquist

Def.: Diagramma polare o di N. della r.a. $G(j\omega)$ o della f.d.t. $G(s)$

È la curva tracciata sul piano complesso dal vettore $G(j\omega)$ per ω che varia da 0 a $+\infty$.

Esempio:

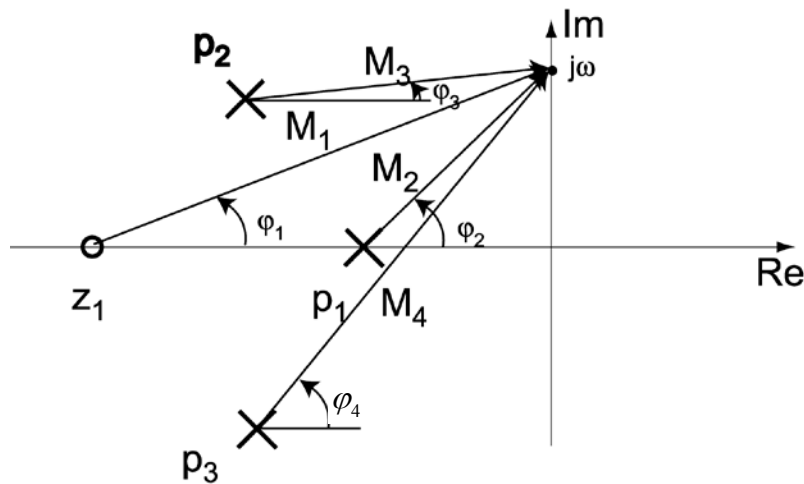
$$G(j\omega) = \frac{10}{\left(1 + \frac{1}{5}j\omega\right)\left(1 + \frac{1}{10}j\omega\right)\left(1 + \frac{1}{100}j\omega\right)}$$



- I diagrammi polari sono importanti nello studio della stabilità dei sistemi retroazionati. Per questo fine, è sufficiente un tracciamento qualitativo del d.p. con individuazione di punti notevoli.

- Il tracciamento del d.p. può essere coadiuvato dal seguente procedimento grafico. Per esempio, si consideri una f.d.t. descritta con la forma poli-zero:

$$G(s) = K_1 \frac{(s - z_1)}{(s - p_1)(s - p_2)(s - p_3)} ; \quad G(j\omega) = K_1 \frac{(j\omega - z_1)}{(j\omega - p_1)(j\omega - p_2)(j\omega - p_3)}$$



$$|G(j\omega)| = |K_1| \frac{M_1}{M_2 M_3 M_4}$$

$$\arg G(j\omega) = \begin{cases} \varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3 - \varphi_4 & \text{se } K_1 > 0 \\ \varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3 - \varphi_4 - \pi & \text{se } K_1 < 0 \end{cases}$$

- **Proprietà (comportamento per $\omega \rightarrow +\infty$)**

Il d.p. di un sistema **strettamente proprio** termina (per $\omega \rightarrow +\infty$) sull'origine tangente ad uno degli assi coordinati.

Dim.: immediata

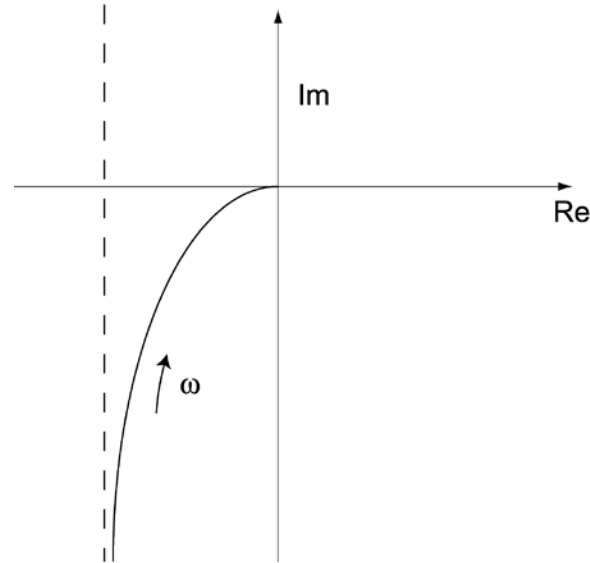
- **Proprietà (Σ **di tipo 0**: comp. per $\omega \rightarrow 0+$)**

Il d.p. di un sistema di tipo zero parte (da $\omega = 0$) dal punto dell'asse reale $G(j0) = K = K_1(b_0/a_0)$.

Dim.: immediata ...

Esempio di sistema di tipo 1 :

$$G(j\omega) = \frac{10}{j\omega(1+j2\omega)}$$



- **Proprietà (Σ di tipo 1: comp. per $\omega \rightarrow 0+$)**

Il d.p. di un sistema di tipo uno parte (per $\omega \rightarrow 0+$) adiacente ad un asintoto, parallelo all'asse immaginario, la cui ascissa σ_a è esprimibile:

$$\sigma_a = K_1 \frac{a_1 b_1 - a_2 b_0}{a_1^2} = K \left(\sum_i \tau'_i - \sum_i \tau_i + \sum_i 2 \frac{\delta'_i}{\omega'_{ni}} - \sum_i 2 \frac{\delta_i}{\omega_{ni}} \right)$$

Dim.: Deduciamo la seconda relazione

$$G(s) = K \frac{(1 + \tau'_1 s)(1 + \tau'_2 s) \cdots \left(1 + 2\delta'_1 \frac{s}{\omega'_{n1}} + \frac{s^2}{\omega'^2_{n1}}\right) \left(1 + 2\delta'_2 \frac{s}{\omega'_{n2}} + \frac{s^2}{\omega'^2_{n2}}\right) \cdots}{s(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s) \cdots \left(1 + 2\delta_1 \frac{s}{\omega_{n1}} + \frac{s^2}{\omega^2_{n1}}\right) \left(1 + 2\delta_2 \frac{s}{\omega_{n2}} + \frac{s^2}{\omega^2_{n2}}\right) \cdots}$$

$$G(j\omega) = K \frac{(1 + \tau'_1 j\omega)(1 + \tau'_2 j\omega) \cdots \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega'^2_{n1}} + 2\delta'_1 \frac{j\omega}{\omega'_{n1}}\right) \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega'^2_{n2}} + 2\delta'_2 \frac{j\omega}{\omega'_{n2}}\right) \cdots}{j\omega(1 + \tau_1 j\omega)(1 + \tau_2 j\omega) \cdots \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega^2_{n1}} + 2\delta_1 \frac{j\omega}{\omega_{n1}}\right) \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega^2_{n2}} + 2\delta_2 \frac{j\omega}{\omega_{n2}}\right) \cdots}$$

$$\omega \rightarrow 0+ \quad G(j\omega) \rightarrow K \frac{(1 + \tau'_1 j\omega)(1 + \tau'_2 j\omega) \cdots \left(1 + 2\delta'_1 \frac{j\omega}{\omega'_{n1}}\right) \left(1 + 2\delta'_2 \frac{j\omega}{\omega'_{n2}}\right) \cdots}{j\omega(1 + \tau_1 j\omega)(1 + \tau_2 j\omega) \cdots \left(1 + 2\delta_1 \frac{j\omega}{\omega_{n1}}\right) \left(1 + 2\delta_2 \frac{j\omega}{\omega_{n2}}\right) \cdots}$$

$$= K \frac{1 + j\omega \left(\sum_i \tau'_i + \sum_i 2 \frac{\delta'_i}{\omega'_{n,i}} \right) + o(\omega)}{j\omega \left(1 + j\omega \left(\sum_i \tau_i + \sum_i 2 \frac{\delta_i}{\omega_{n,i}} \right) + o(\omega) \right)} \quad (\text{cont.})$$

(cont.)

$$\begin{aligned}\omega \rightarrow 0+ \quad G(j\omega) &\rightarrow K \frac{1 + j\omega \left(\sum_i \tau_i' + \sum_i 2 \frac{\delta_i'}{\omega_{n,i}} \right)}{j\omega \left(1 + j\omega \left(\sum_i \tau_i + \sum_i 2 \frac{\delta_i}{\omega_{n,i}} \right) \right)} \\&= K \frac{1 + j\omega \left(\sum_i \tau_i' + \sum_i 2 \frac{\delta_i'}{\omega_{n,i}} \right)}{j\omega \left(1 + j\omega \left(\sum_i \tau_i + \sum_i 2 \frac{\delta_i}{\omega_{n,i}} \right) \right)} \cdot \frac{\left(1 - j\omega \left(\sum_i \tau_i + \sum_i 2 \frac{\delta_i}{\omega_{n,i}} \right) \right)}{\left(1 - j\omega \left(\sum_i \tau_i + \sum_i 2 \frac{\delta_i}{\omega_{n,i}} \right) \right)} \\&= K \frac{1 + j\omega \left(\sum_i \tau_i' + \sum_i 2 \frac{\delta_i'}{\omega_{n,i}} - \sum_i \tau_i - \sum_i 2 \frac{\delta_i}{\omega_{n,i}} \right) + o(\omega)}{j\omega \left(1 + \omega^2 \left(\sum_i \tau_i + \sum_i 2 \frac{\delta_i}{\omega_{n,i}} \right)^2 \right)} \\&\rightarrow K \frac{1 + j\omega \left(\sum_i \tau_i' + \sum_i 2 \frac{\delta_i'}{\omega_{n,i}} - \sum_i \tau_i - \sum_i 2 \frac{\delta_i}{\omega_{n,i}} \right)}{j\omega} = K \left(\sum_i \tau_i' - \sum_i \tau_i + \sum_i 2 \frac{\delta_i'}{\omega_{n,i}} - \sum_i 2 \frac{\delta_i}{\omega_{n,i}} \right) - j \frac{K}{\omega} \quad \square\end{aligned}$$

I sistemi a fase minima

Per una significativa classe di sistemi, detti a fase minima, si nota che, nella funzione di risposta armonica, l'andamento del diagramma delle fasi è strettamente associato a quello delle ampiezze:

Se in una certa banda di frequenze l'ampiezza è costante, la fase tende ad essere nulla, mentre una pendenza negativa del diagramma delle ampiezze è associata ad un ritardo di fase, una pendenza positiva ad un anticipo di fase.



Def.: Sistemi a fase minima (fase non minima)

Sia Σ un sistema lineare e stazionario con funzione di trasferimento $G(s)$ e risposta armonica $G(j\omega)$.

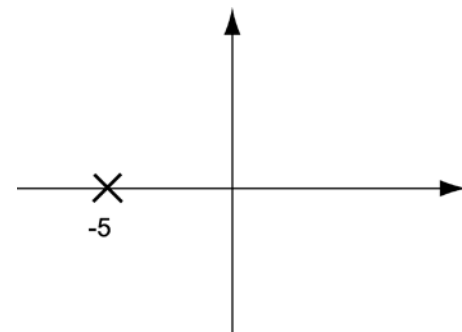
Σ è detto a fase minima (fase non minima) se il diagramma delle fasi $\beta = \arg G(j\omega)$ è (non è) determinato univocamente, modulo 2π , dal diagramma dei moduli $\alpha = \ln |G(j\omega)|$ mediante la **formula di Bode**.

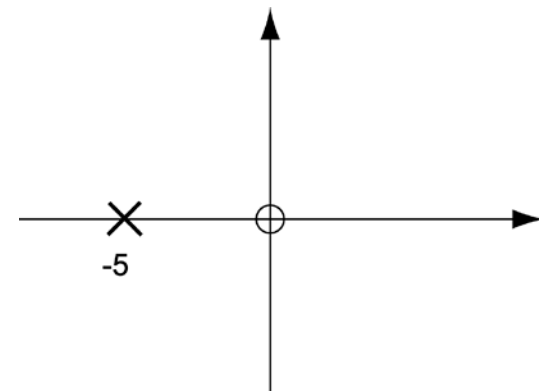
Proposizione

Un sistema con funzione di trasferimento **razionale** è a fase minima se non presenta poli o zeri a parte reale positiva.

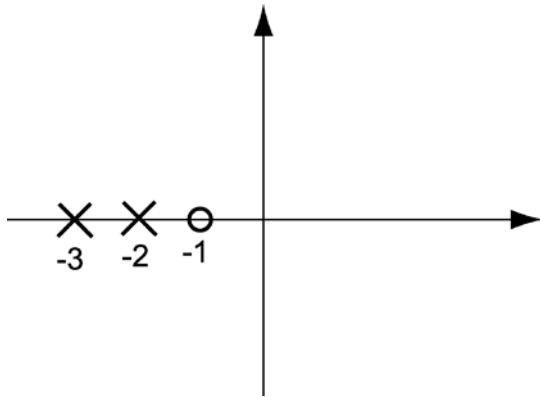
Esempi di sistemi a fase minima:

$$G(s) = 10$$

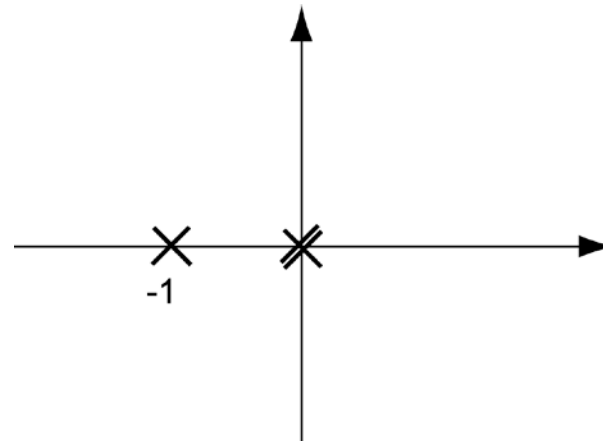
$$G(s) = \frac{4}{s+5}$$


$$G(s) = \frac{s}{s+5}$$


$$G(s) = \frac{s+1}{s^2+5s+6}$$



$$G(s) = \frac{1}{s^2(s+1)}$$



Formula di Bode

$$\alpha := \ln |G(j\omega)|, \quad \beta := \arg G(j\omega)$$

$$\beta_c := \arg G(j\omega_c) \quad u := \ln \frac{\omega}{\omega_c} = \ln \omega - \ln \omega_c$$

$$\beta_c = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\alpha}{du} \ln \cotgh \left| \frac{u}{2} \right| du \quad \text{se } \lim_{s \rightarrow 0} s^h G(s) > 0$$

$$\beta_c = \{\text{come sopra}\} - \pi \quad \text{se } \lim_{s \rightarrow 0} s^h G(s) < 0$$

$$h := \{\text{"tipo" del sistema } \Sigma\}$$

$$h = 0 \quad \text{se } \Sigma \text{ non presenta nè poli nè zeri nell'origine}$$

$$h > 0 \quad \text{se } \Sigma \text{ presenta un polo di molteplicità } h \text{ nell'origine}$$

$$h < 0 \quad \text{se } \Sigma \text{ presenta uno zero di molteplicità } |h| \text{ nell'origine}$$

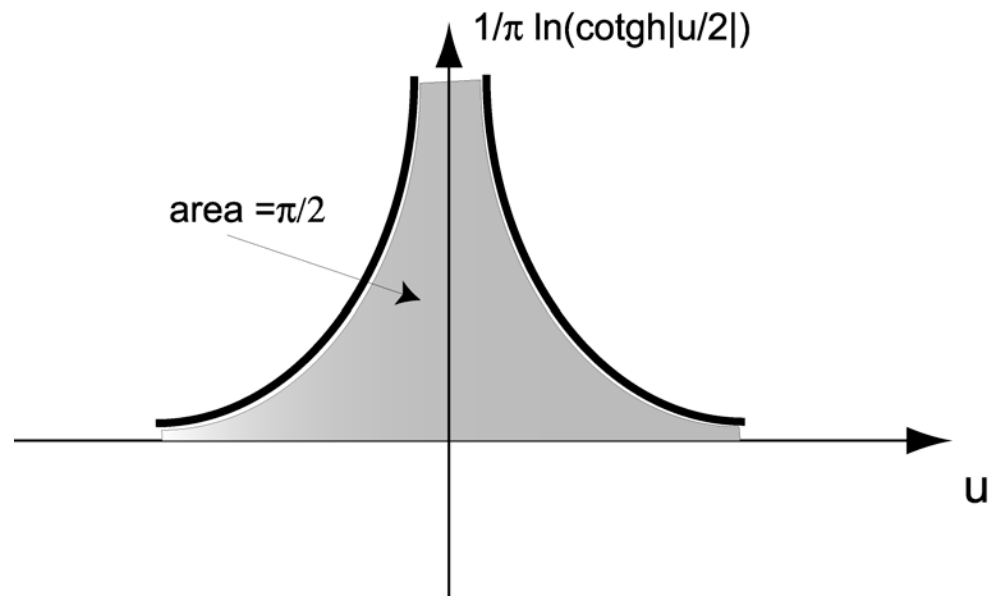
- Interpretazione della formula di Bode: 

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \ln \coth \left| \frac{u}{2} \right| du = \frac{\pi}{2}$$

da cui la regola pratica:

Se $\frac{d\alpha}{du}$ è costante per due decadi di pulsazione centrate su ω_c

allora $\beta_c \approx \left(\frac{d\alpha}{du} \right) \cdot \frac{\pi}{2}$

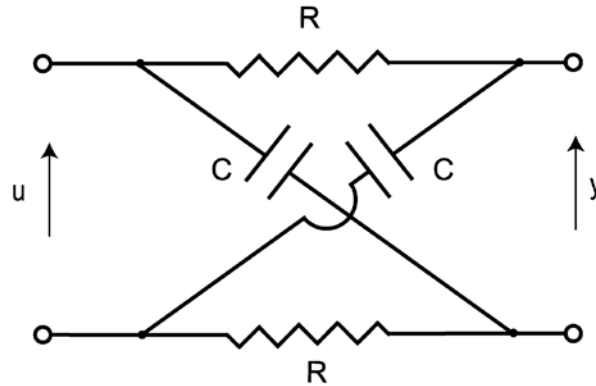


Esempi di sistemi a fase non minima

Ritardo finito: $G(s) = e^{-t_0 s}$, $G(j\omega) = e^{-t_0 j\omega}$

$$\alpha = \ln |e^{-t_0 j\omega}| = 0 \quad \forall \omega, \quad \beta = -t_0 \omega = -t_0 e^{\ln \omega}$$

Rete elettrica:



$$Y(s) = G(s)U(s), \quad G(s) = \frac{1 - Ts}{1 + Ts}, \quad T := RC$$

$$G(j\omega) = \frac{1 - jT\omega}{1 + jT\omega}, \quad |G(j\omega)| = \frac{\sqrt{1 + T^2\omega^2}}{\sqrt{1 + T^2\omega^2}} = 1 \quad \forall \omega$$

$$\alpha = \ln |G(j\omega)| = 0, \quad \beta = \arg G(j\omega) = -2 \arctg T\omega$$

Approssimanti di Padè del ritardo finito

È conveniente sia per problemi di analisi ma anche, soprattutto, per problemi di sintesi **approssimare il ritardo finito con una funzione razionale.**



Def.: Approssimante di Padè di $e^{-t_0 s}$ (di ordine q)

$$G_q(s; t_0) := \frac{\sum_{k=0}^q \frac{(2q-k)!q!}{(2q)!k!(q-k)!} (-1)^k t_0^k s^k}{\sum_{k=0}^q \frac{(2q-k)!q!}{(2q)!k!(q-k)!} t_0^k s^k}$$

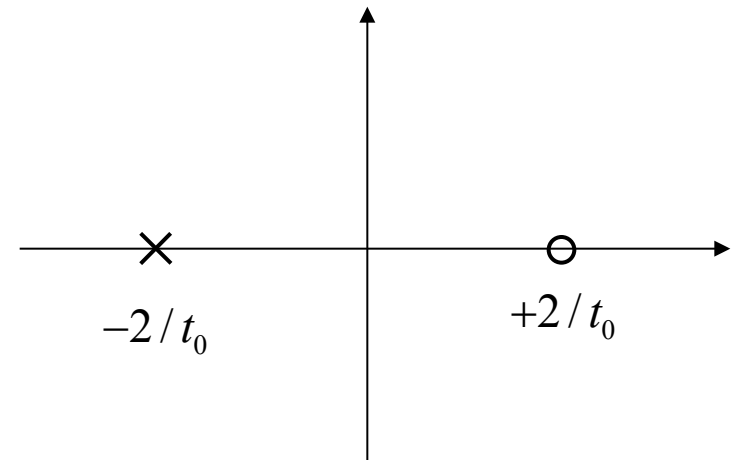
• Proprietà

Lo sviluppo in serie di **McLaurin** di $G_q(s; t_0)$ coincide con l'analogo sviluppo di $\exp\{-t_0 s\}$ fino alla potenza $(2q)$ -esima.

$$e^{-t_0 s} = 1 - t_0 s + \frac{t_0^2}{2!} s^2 - \frac{t_0^3}{3!} s^3 + \frac{t_0^4}{4!} s^4 - \frac{t_0^5}{5!} s^5 + \dots$$

Approssimante di Padè del 1° ordine:

$$G_1(s; t_0) = \frac{1 - \frac{t_0}{2} s}{1 + \frac{t_0}{2} s}$$



Approssimante di Padè del 2° ordine:

$$G_2(s; t_0) = \frac{1 - \frac{t_0}{2}s + \frac{t_0^2}{12}s^2}{1 + \frac{t_0}{2}s + \frac{t_0^2}{12}s^2}$$

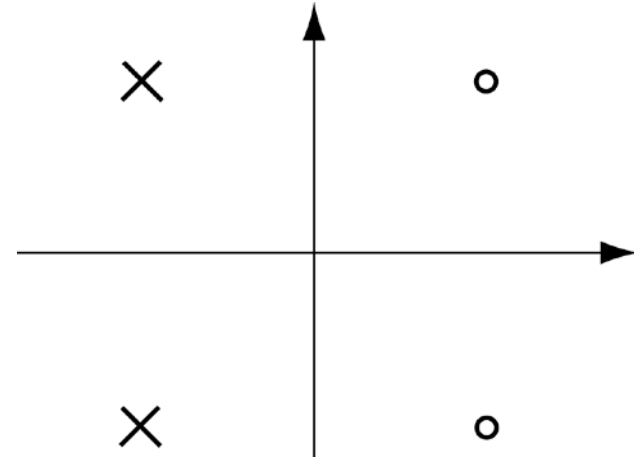


Diagramma polare di $\exp\{-t_0 j\omega\}$: è una circonferenza percorsa infinite volte.

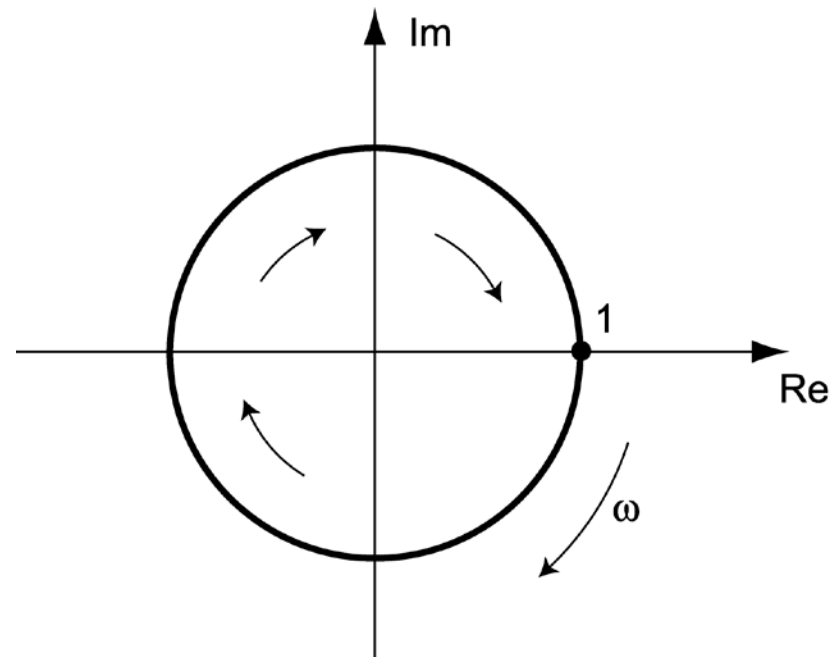


Diagramma polare di $G_1(j\omega; t_0)$: è una semicirconferenza

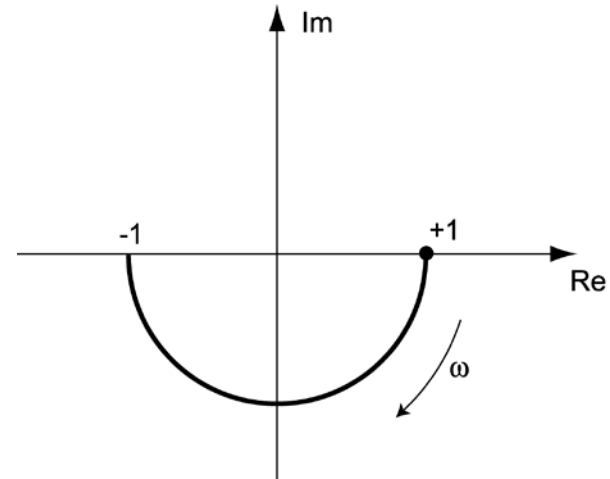


Diagramma polare di $G_2(j\omega; t_0)$: è una circonferenza percorsa una sola volta

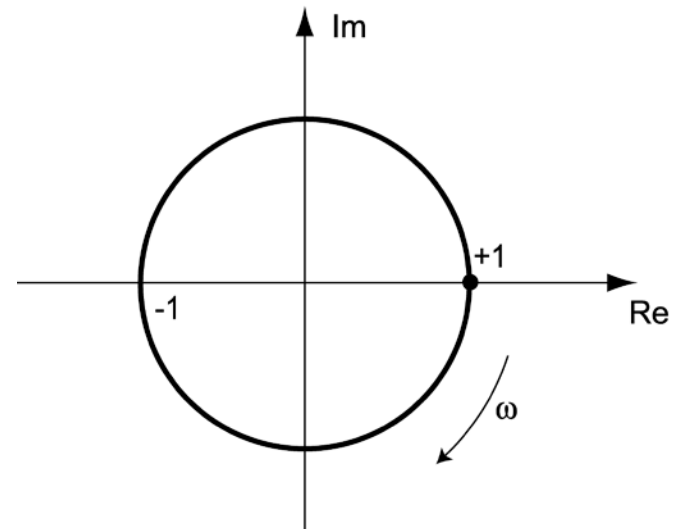


Diagramma polare di $G_3(j\omega; t_0)$: è una circonferenza percorsa una volta e mezzo

...

Punti salienti della lezione:

- Determinazione dell'asintoto verticale nel diagramma polare dei sistemi di tipo uno
- Formula di Bode
- Diagrammi polari delle approssimanti di Padé del ritardo finito