

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica, Elettronica e delle
Telecomunicazioni

Lezione n. 11 di Fondamenti di Controlli Automatici
prof. Aurelio Piazzì

**Sistemi retroazionati: proprietà ed
analisi asintotica**

Università degli Studi di Parma – a.a. 2014-2015

- Gli schemi a blocchi
- Sensibilità a variazioni di parametri nei sistemi in retroazione
- Attenuazione dei disturbi
- Allargamento della banda passante
- Analisi a regime dei sistemi in retroazione

Gli Schemi a Blocchi

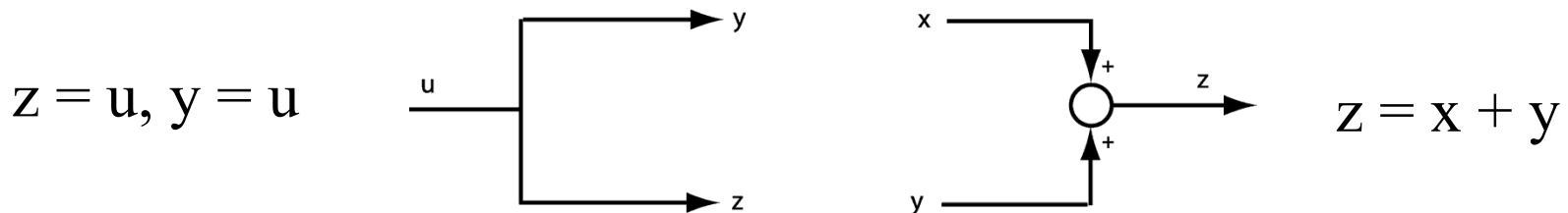
- I sistemi complessi possono essere rappresentati con schemi a blocchi i cui elementi hanno ciascuno un solo ingresso ed una sola uscita:



$y = K u$, $K \equiv$ guadagno dell'elemento o blocco elementare

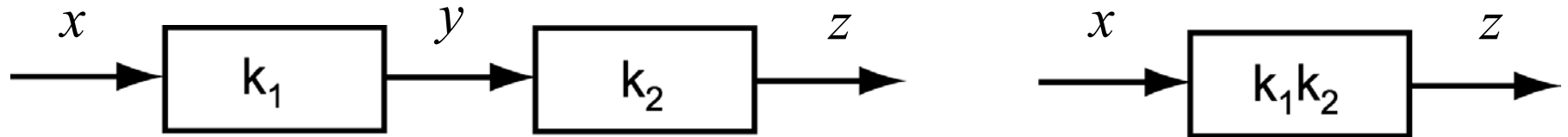
$K \in \mathbb{R}$ o $K \in \{\text{insieme delle funzioni razionali}\}$ o ...

- I blocchi sono collegati fra loro mediante i **punti di diramazione** e le **giunzioni sommanti**:



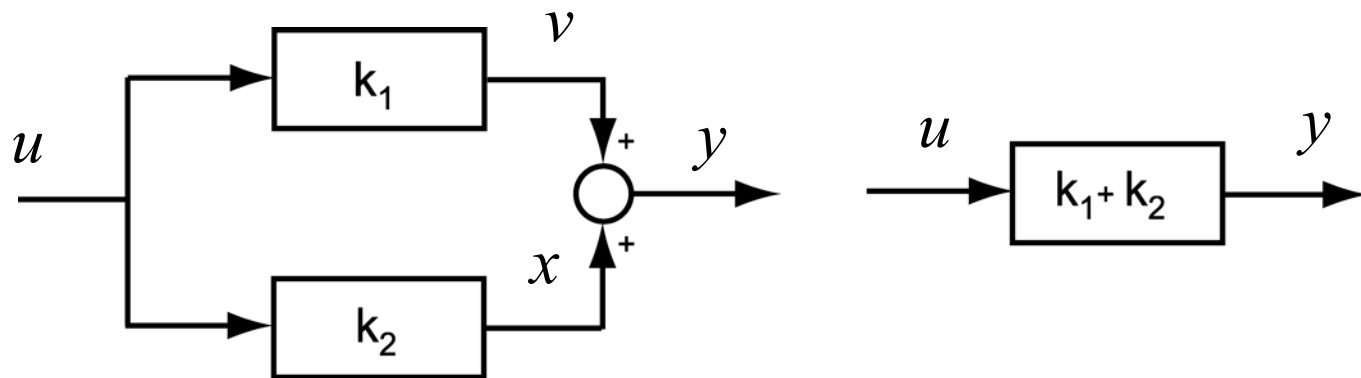
• Regole di riduzione

1. Riduzione di blocchi in cascata

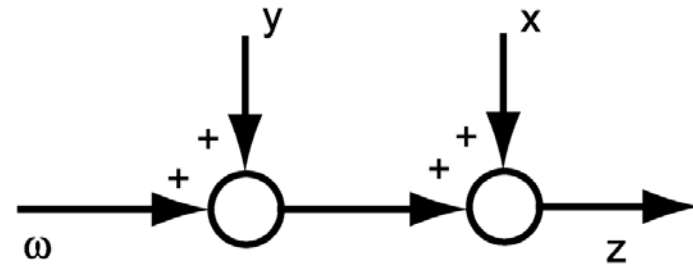
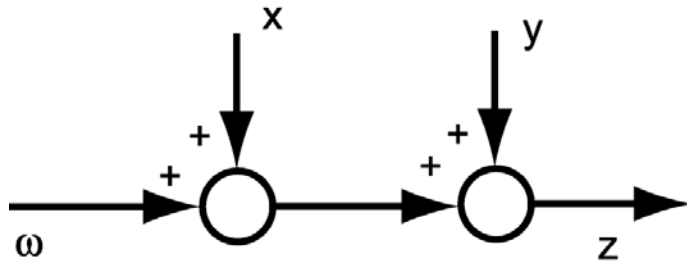


$$\begin{cases} y = K_1 x \\ z = K_2 y \end{cases} \text{ eliminazione della variabile } y \Rightarrow \{ z = K_1 K_2 x$$

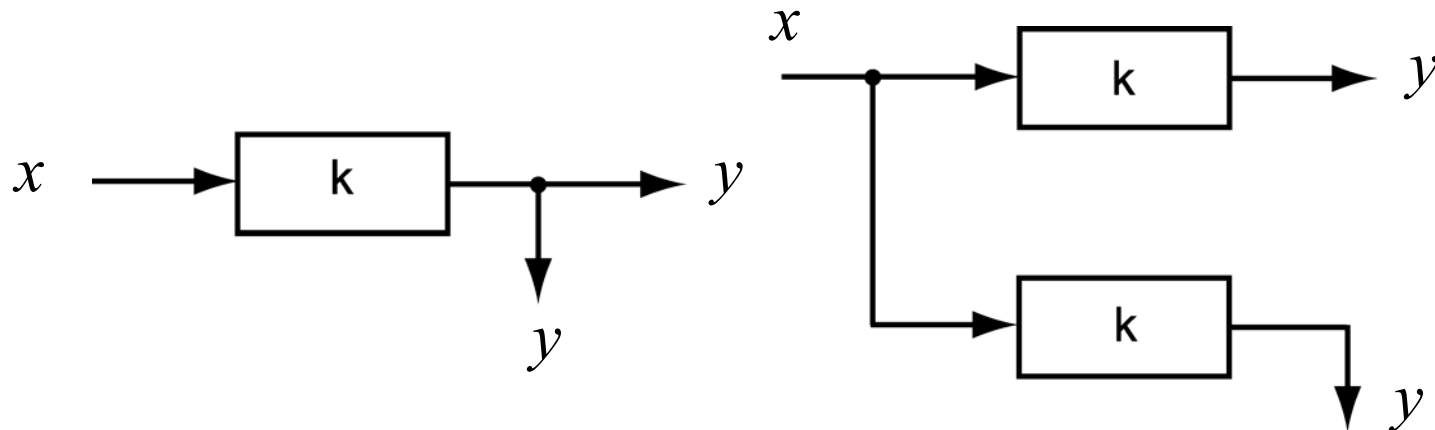
2. Riduzione di blocchi in parallelo



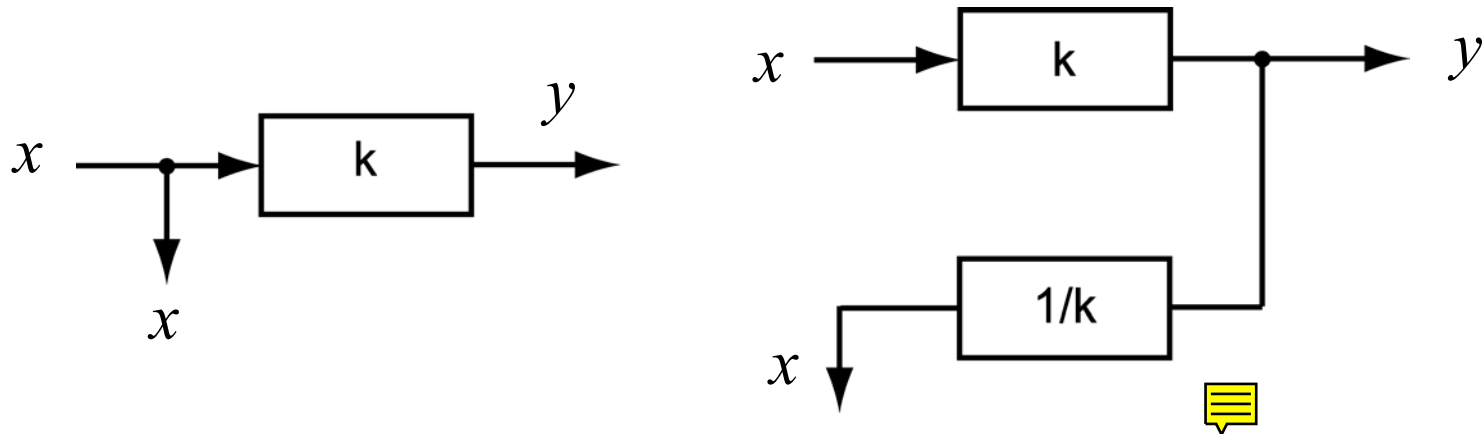
3. Scambio di giunzioni sommanti



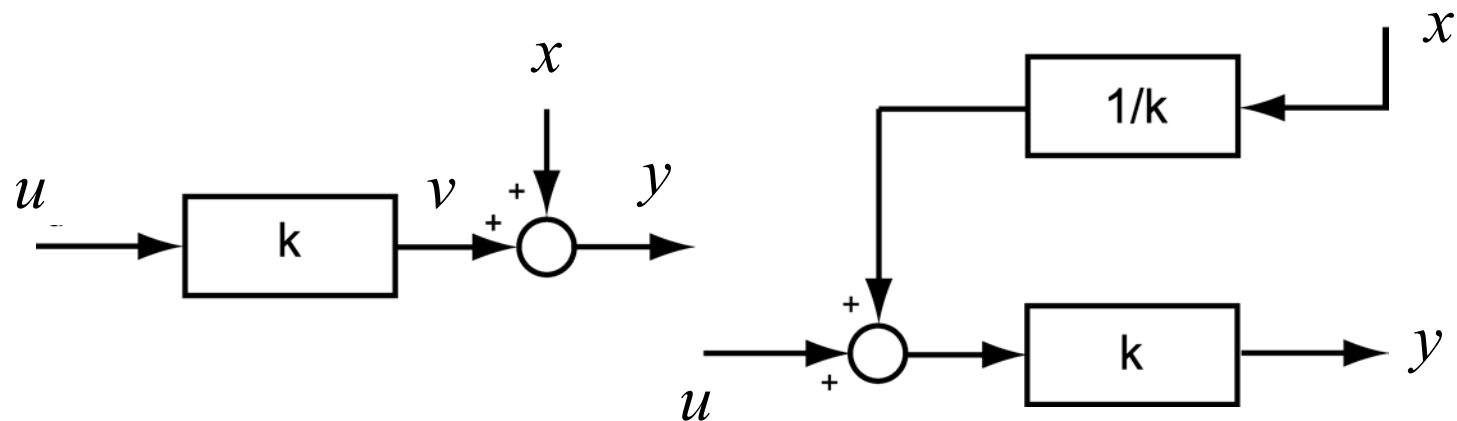
4. Spostamento di prelievo di segnale a monte di un blocco



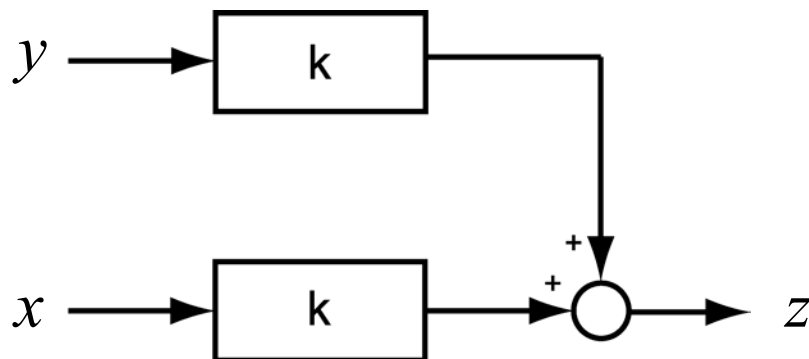
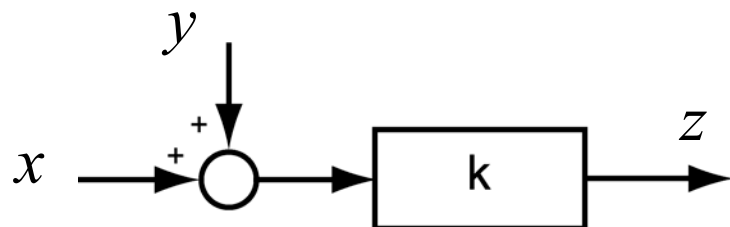
5. Spostamento di prelievo di segnale a valle di un blocco



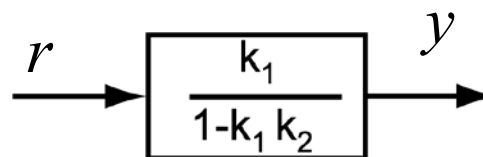
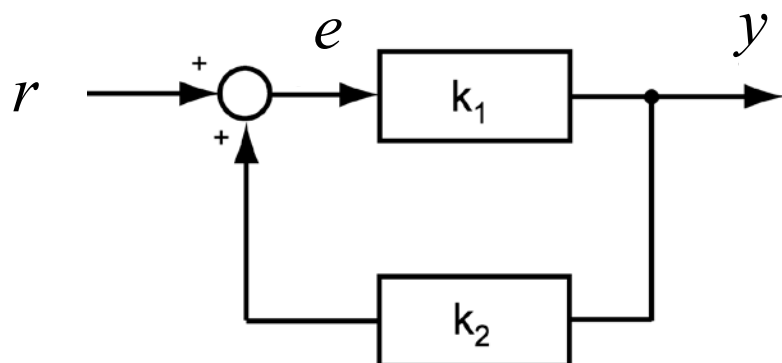
6. Spostamento di giunzione sommannte a monte di un blocco



7. Spostamento di giunzione sommannte a valle di un blocco



8. Eliminazione di un anello

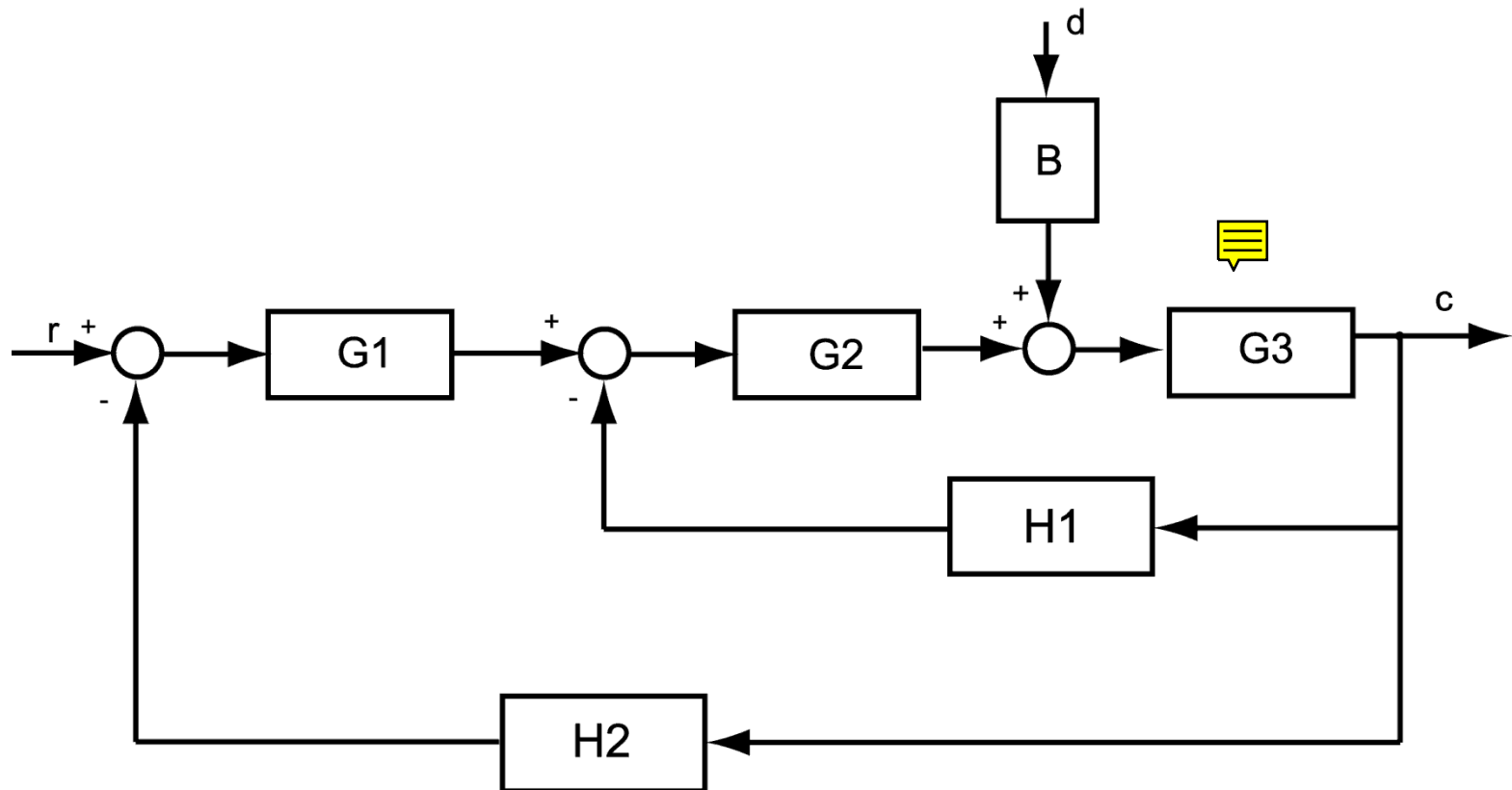


$$\begin{cases} y = K_1 e \\ e = r + K_2 y \end{cases}$$

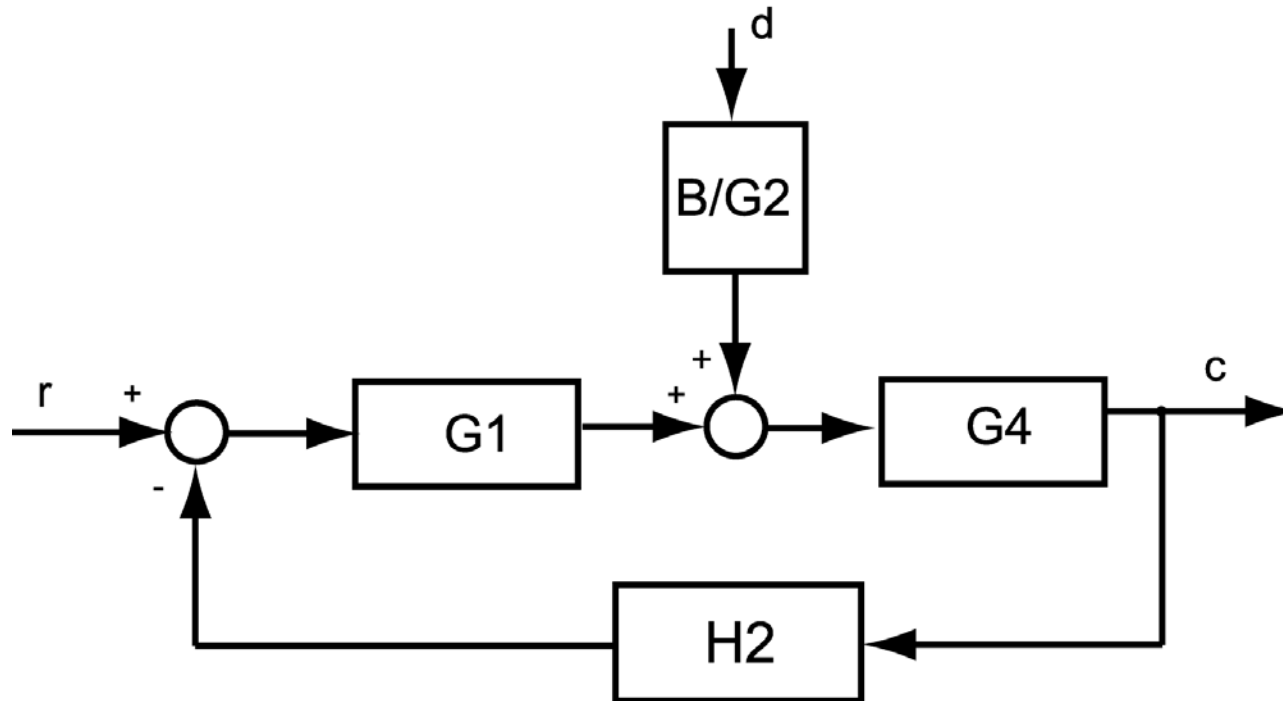
$$y = \frac{K_1}{1 - K_1 K_2} r$$

- **Esempio di riduzione alla forma minima**

Schema a blocchi iniziale

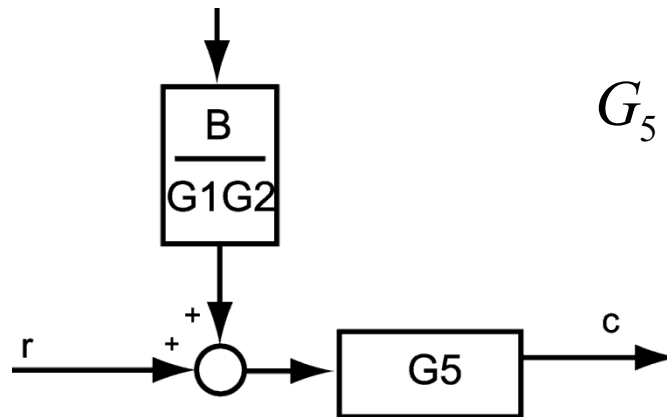


Applicando le regole n° 6, 3, 8 si ottiene



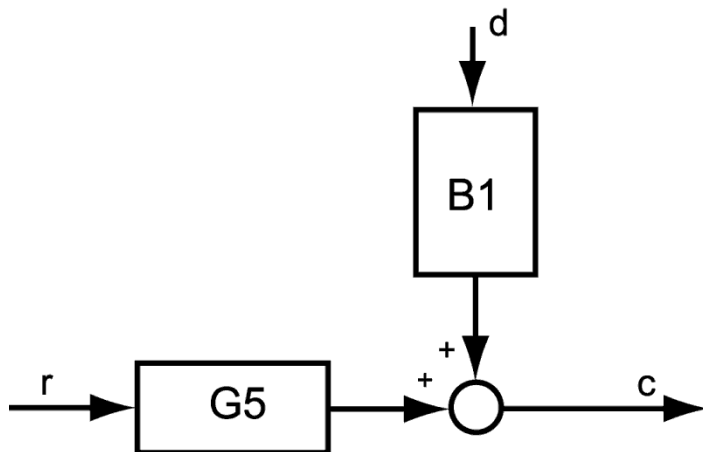
$$G_4 := \frac{G_2 G_3}{1 + G_2 G_3 H_1}$$

Applicando ancora le regole n° 6, 3, 8 :



$$G_5 := \frac{G_1 G_4}{1 + G_1 G_4 H_2}$$

Applicando infine la regola n° 7:



$$B_1 := \frac{B G_5}{G_1 G_2}$$

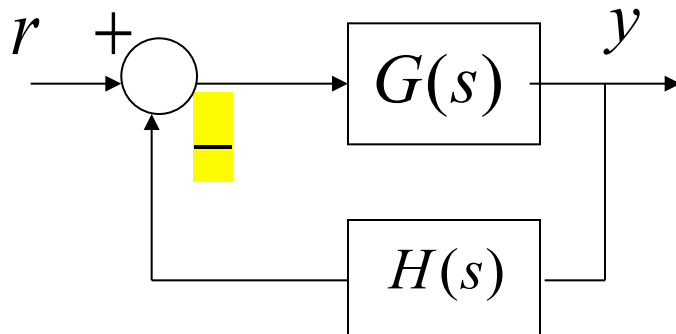
$$c = G_5 r + B_1 d$$

$$c = \begin{bmatrix} G_5 & B_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ d \end{bmatrix}$$

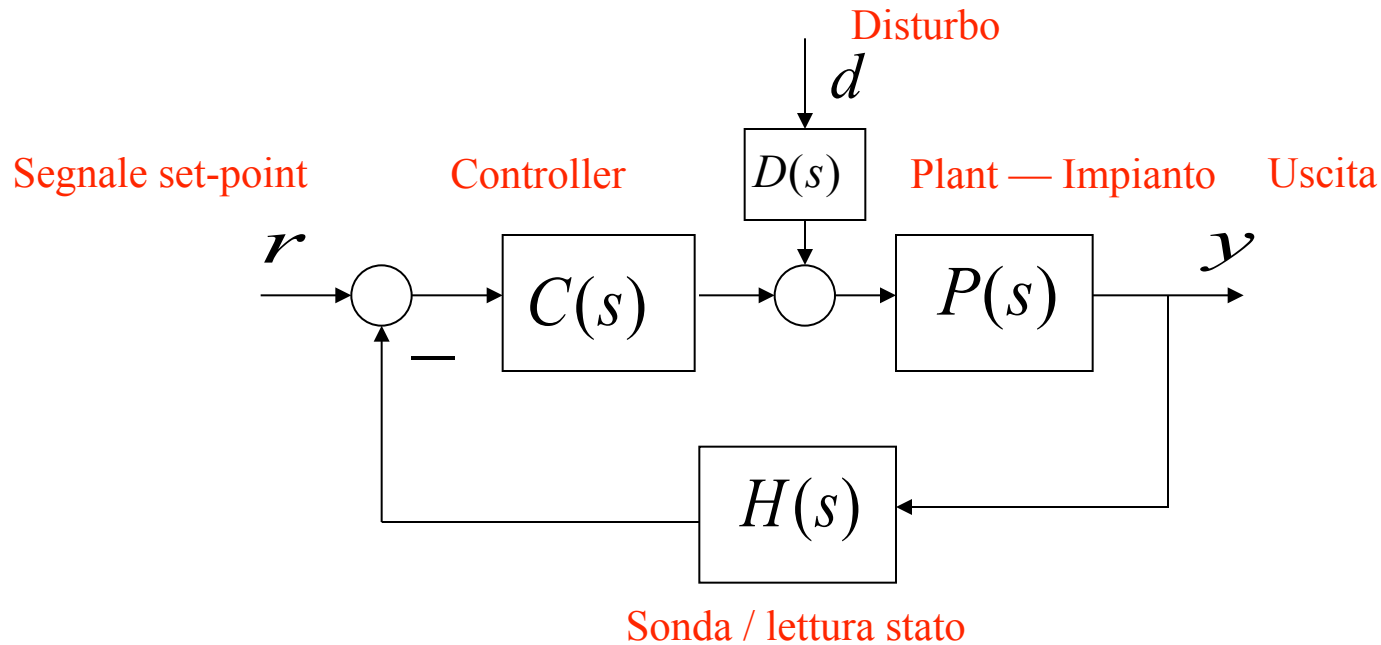
Proprietà generali dei sistemi in retroazione

- Regola rapida per il calcolo della f.d.t. nei sistemi retroazionati (singolo anello con il segnale retroazionato sottratto nella giunzione sommande):

$$\{f.d.t.\} = \left\{ \frac{\text{f.d.t. del percorso di segnale diretto}}{1 + \text{guadagno di anello}} \right\}$$



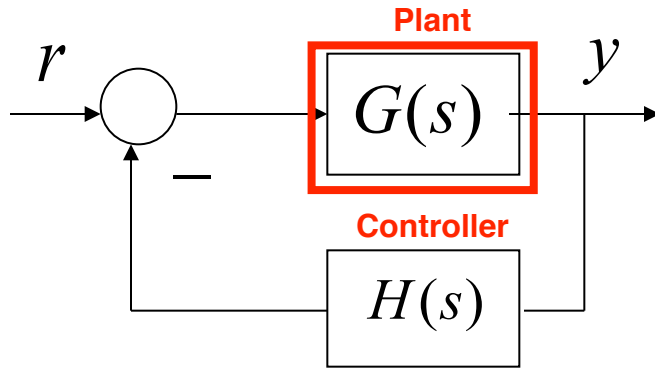
$$T_{ry}(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$



$$T_{ry} = \frac{C(s)P(s)}{1 + C(s)P(s)H(s)}$$

$$T_{dy} = \frac{D(s)P(s)}{1 + C(s)P(s)H(s)}$$

Sensibilità a variazioni di parametri nei sistemi retroazionati



$$T(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

1° caso: **variazione di un parametro nella catena diretta**

$G(s)$ è in realtà $G(s; \alpha)$ con $\alpha = \alpha_0 + \Delta\alpha$, $\alpha_0 \equiv \{\text{valore nominale del p.}\}$

$$\Delta\alpha \rightarrow \Delta G := G(s; \alpha) - G(s; \alpha_0) \rightarrow \frac{\Delta G}{G(s; \alpha_0)} \equiv \left\{ \begin{array}{l} \text{variazione} \\ \text{relativa di } G \end{array} \right\}$$

$$\Delta\alpha \rightarrow \Delta T := T(s; \alpha) - T(s; \alpha_0) \rightarrow \frac{\Delta T}{T(s; \alpha_0)} \equiv \left\{ \begin{array}{l} \text{variazione} \\ \text{relativa di } T \end{array} \right\}$$

$$S_G^T \equiv \left\{ \begin{array}{l} \text{Sensibilità di } T \\ \text{a variazioni di } G \end{array} \right\} := \frac{\frac{\Delta T}{T(s; \alpha_0)}}{\frac{\Delta G}{G(s; \alpha_0)}} \quad \text{}$$

Si consideri $\Delta\alpha$ variazione infinitesimale

$$\Rightarrow S_G^T = \frac{dT}{dG} \bigg|_{\alpha=\alpha_0} \frac{G(s; \alpha_0)}{T(s; \alpha_0)}$$

$$S_G^T = \frac{1 + GH - G(H)}{(1 + GH)^2} \cdot \frac{G}{\frac{G}{1 + GH}} = \frac{1}{1 + GH}$$

$$S_G^T = \frac{1}{1 + \underbrace{G(s; \alpha_0)H(s)}_{\text{guadagno anello}}}$$

Quindi se il guadagno di anello è molto elevato la variazione relativa di T è molto più piccola della variazione relativa di G .

In termini frequenziali:

$$\text{se } |G(j\omega; \alpha_0)H(j\omega)| \gg 1$$

$$\Rightarrow \left| \frac{\Delta T(j\omega)}{T(j\omega; \alpha_0)} \right| \ll \left| \frac{\Delta G(j\omega)}{G(j\omega; \alpha_0)} \right|$$

Conclusione: Un guadagno di anello elevato rende (relativamente) insensibile la f.d.t. del sistema retroazionato a variazioni della f.d.t. del sistema controllato.

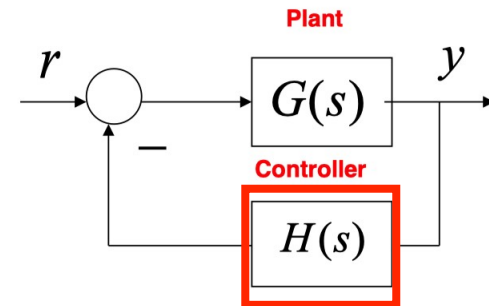
2° caso: variazione di un parametro nella catena di retroazione

$H(s)$ è in realtà $H(s; \beta)$ con $\beta = \beta_0 + \Delta\beta$, $\beta_0 \equiv \{\text{valore nom. del p.}\}$

$$\Delta\beta \rightarrow \Delta H := H(s; \beta) - H(s; \beta_0) \rightarrow \frac{\Delta H}{H(s; \beta_0)} \equiv \left\{ \begin{array}{l} \text{variazione} \\ \text{relativa di H} \end{array} \right\}$$

$$\Delta\beta \rightarrow \Delta T := T(s; \beta) - T(s; \beta_0) \rightarrow \frac{\Delta T}{T(s; \beta_0)} \equiv \left\{ \begin{array}{l} \text{variazione} \\ \text{relativa di T} \end{array} \right\}$$

$$S_H^T \equiv \left\{ \begin{array}{l} \text{Sensibilità di T} \\ \text{a variazioni di H} \end{array} \right\} := \frac{\Delta T}{T(s; \beta_0)} \bigg/ \frac{\Delta H}{H(s; \beta_0)}$$



Considerando $\Delta\beta$ variazione infinitesimale

$$\Rightarrow S_H^T = \frac{dT}{dH} \bigg|_{\beta=\beta_0} \frac{H(s; \beta_0)}{T(s; \beta_0)} \Rightarrow S_H^T = G \frac{-G}{(1+GH)^2} \cdot \frac{H}{\frac{G}{1+GH}}$$

$$S_H^T = -\frac{G(s)H(s; \beta_0)}{1 + G(s)H(s; \beta_0)} \quad \square$$

Quindi se il guadagno di anello è elevato la variazione relativa di T è circa uguale (in modulo) alla variazione relativa di H.

In termini frequenziali:

se $|G(j\omega)H(j\omega; \beta_0)| \gg 1$

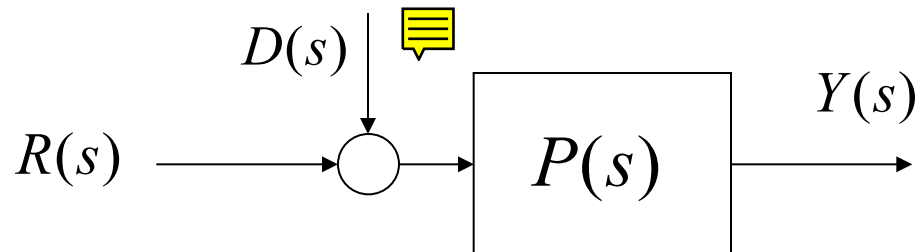
$$\Rightarrow \left| \frac{\Delta T(j\omega)}{T(j\omega; \beta_0)} \right| \cong \left| \frac{\Delta H(j\omega)}{H(j\omega; \beta_0)} \right|$$

Conclusione: Variazioni della f.d.t. nella catena di retroazione si riverberano senza attenuazione in variazioni della f.d.t. del sistema retroazionato.



Attenuazione dei disturbi

disturbo agente su “impianto” ad anello aperto:

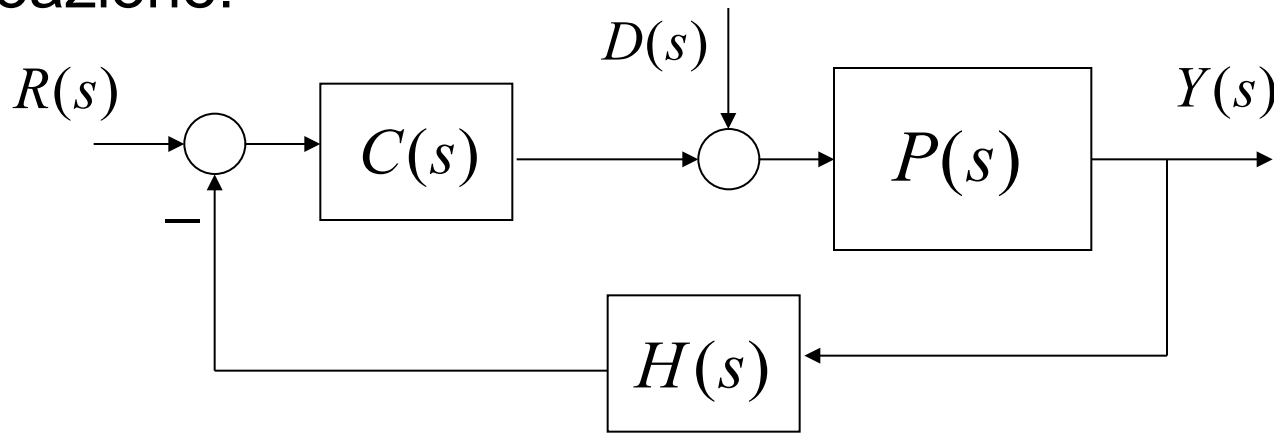


$$\{\text{uscita determinata dal segnale utile}\} \equiv P(s)R(s)$$

$$\{\text{uscita determinata dal disturbo}\} \equiv P(s)D(s)$$

$$\Rightarrow \left\{ \frac{\text{segnale}}{\text{disturbo}} \right\} = \frac{R(s)}{D(s)} \quad \text{🗨️}$$

Ipotizziamo che il disturbo sia indipendente dal segnale “manipolabile” $R(s)$ e mostriamo come sia possibile migliorare il rapporto segnale/disturbo introducendo la retroazione:



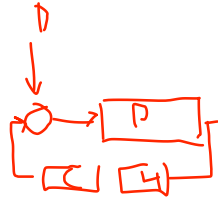
Per un confronto omogeneo si richiede $\frac{CP}{1 + CPH} \cong P$

$\Rightarrow C \cong 1 + CPH$ questo è possibile quando $CPH \gg 1$ e $H \cong 1/P$

ovvero $\left\{ \begin{array}{l} \text{guadagno di anello elevato} \\ \text{f.d.t. della catena di retroazione} \cong \text{ sistema inverso di } P \end{array} \right.$

{uscita determinata dal segnale utile} $\cong P(s)R(s)$

{uscita determinata dal disturbo} $= \frac{P(s)}{1 + C(s)P(s)H(s)} D(s)$



$$\Rightarrow \left\{ \frac{\text{segnale}}{\text{disturbo}} \right\} \cong (1 + C(s)P(s)H(s)) \frac{R(s)}{D(s)}$$

Il rapporto segnale/disturbo viene modificato nel rapporto di 1 a $|1 + C(j\omega)P(j\omega)H(j\omega)|$ e quindi **fortemente aumentato** se nella banda di frequenze del disturbo vale $|C(j\omega)P(j\omega)H(j\omega)| \gg 1$.

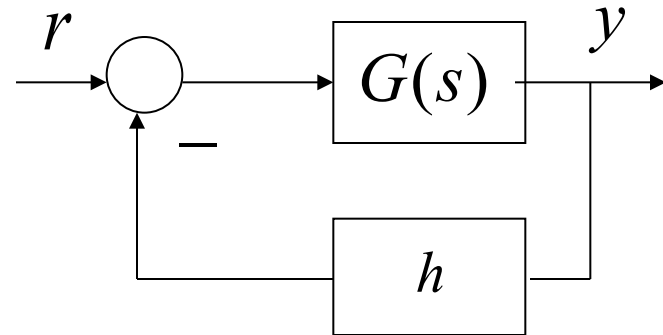
Conclusione: Se il guadagno di anello è elevato il rapporto segnale/disturbo si eleva all'incirca del medesimo fattore passando dallo schema in catena aperta a quello in catena chiusa. Quindi, a parità di segnale utile, il **disturbo viene grandemente attenuato** nel sistema in retroazione.

Allargamento della banda passante

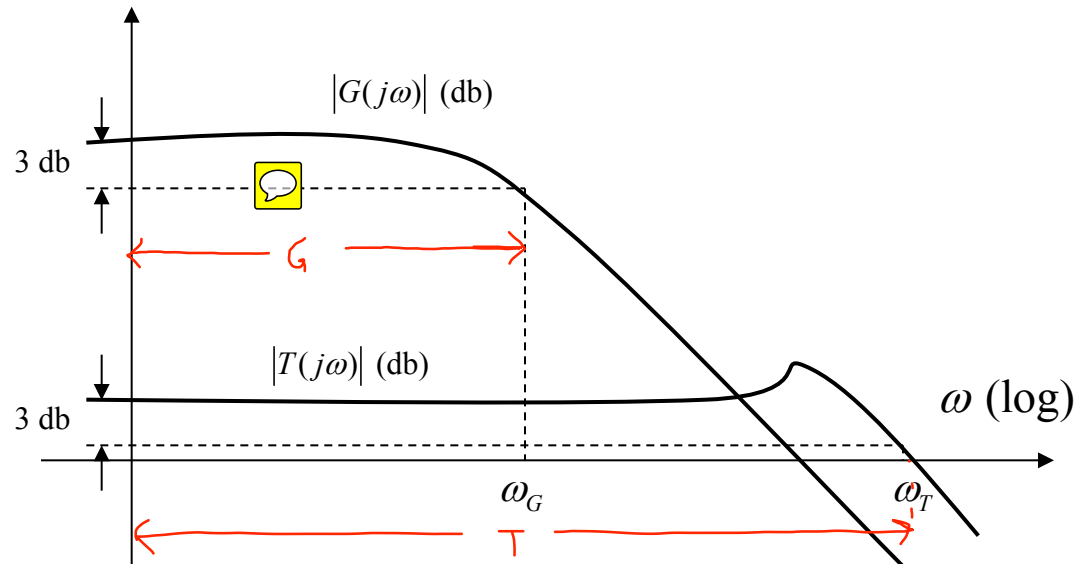
Ipotizziamo che $H(s) = h > 0$

$$T(j\omega) = \frac{G(j\omega)}{1 + hG(j\omega)}$$

Se $h|G(j\omega)| \gg 1 \Rightarrow T(j\omega) \cong 1/h$



Un guadagno di anello elevato implica un allargamento della banda passante.



Esempio:

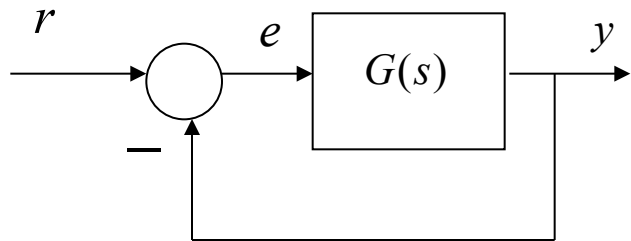
$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + \tau j\omega} \quad \{\text{banda passante}\} \equiv \omega_G = \frac{1}{\tau}$$

$$T(j\omega) = \frac{\frac{1}{1 + \tau j\omega}}{1 + h \frac{1}{1 + \tau j\omega}} = \frac{1}{1 + \tau j\omega + h} = \frac{\frac{1}{1 + h}}{1 + \frac{\tau}{1 + h} j\omega}$$

$$\{\text{banda passante}\} \equiv \omega_T = \frac{1 + h}{\tau}$$

$$\text{Se } h \gg 1 \Rightarrow \omega_T \gg \omega_G$$

Analisi a regime dei sistemi in retroazione



Studio dell'errore di regolazione a regime in risposta a segnali tipici. 

Assunzioni: sistema in **retroazione unitaria**, sistema retroazionato asintoticamente stabile.

 $r(t) \in \left\{ r_0 1(t), r_0 t 1(t), r_0 \frac{t^2}{2} 1(t) \right\}$



$$e(t) := r(t) - y(t)$$

$$E(s) = \frac{1}{1 + G(s)} R(s) \quad \text{☰}$$

$$e_r := \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) \quad \text{☰}$$

$$h := \text{tipo (di sistema) di } G(s) \quad \text{☰}$$

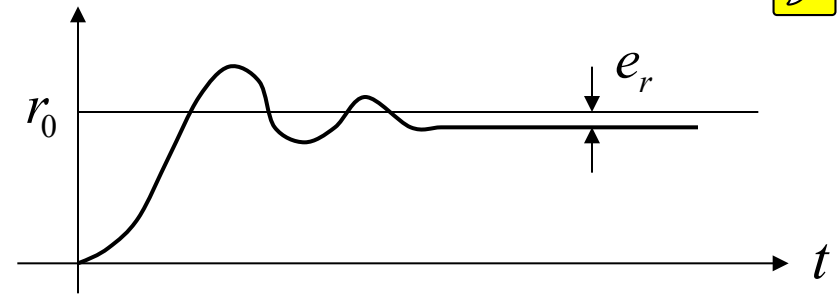
errore a regime



Gradino: $r(t) = r_0 1(t)$, $R(s) = \frac{r_0}{s}$

$$e_r = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1+G(s)} \cdot \frac{r_0}{s}$$

$$e_r = \frac{r_0}{1+K_p} \quad \text{dove } K_p := \lim_{s \rightarrow 0} G(s) \quad (\text{costante di posizione})$$

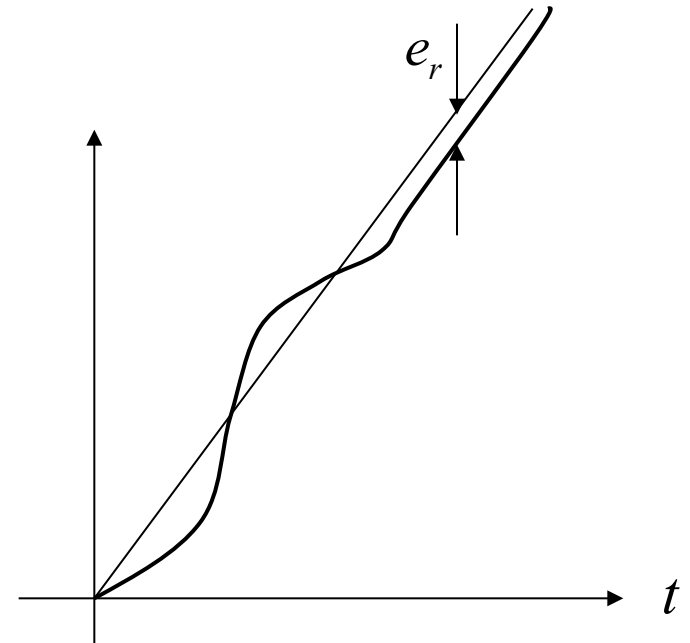


Rampa: $r(t) = r_0 t 1(t)$, $R(s) = \frac{r_0}{s^2}$

$$e_r = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1+G(s)} \cdot \frac{r_0}{s^2} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{r_0}{s + sG(s)}$$

$$e_r = \frac{r_0}{K_v}$$

dove $K_v := \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)$ (costante di velocità)



Parabola : $r(t) = r_0 \frac{t^2}{2} 1(t), \quad R(s) = \frac{r_0}{s^3}$

$$e_r = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1+G(s)} \cdot \frac{r_0}{s^3} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{r_0}{s^2 + s^2 G(s)}$$

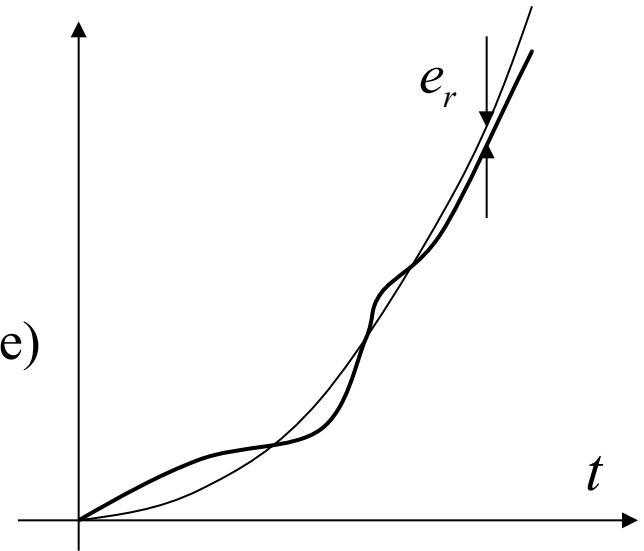
$e_r = \frac{r_0}{K_a}$ dove $K_a := \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)$ (c. di accelerazione)

Quadro riassuntivo:

$$G(s) = K \frac{(1 + \tau_1' s) \cdots}{s^h (1 + \tau_1 s) \cdots}$$

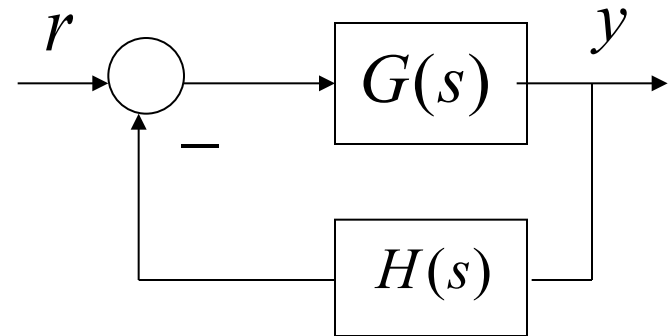
Tipo di sistema	K_p	K_v	K_a
0	K	0	0
1	∞	K	0
2	∞	∞	K

Tipo Ingresso	gradino	rampa	parabola
0	$e_r = \frac{r_0}{1+K}$	$e_r = \infty$	$e_r = \infty$
1	$e_r = 0$	$e_r = \frac{r_0}{K}$	$e_r = \infty$
2	$e_r = 0$	$e_r = 0$	$e_r = \frac{r_0}{K}$



Errore a regime con retroazione non unitaria

La variabile controllata y è in generale dimensionalmente diversa dal segnale di set-point r e quindi occorre definire la condizione ideale di controllo:



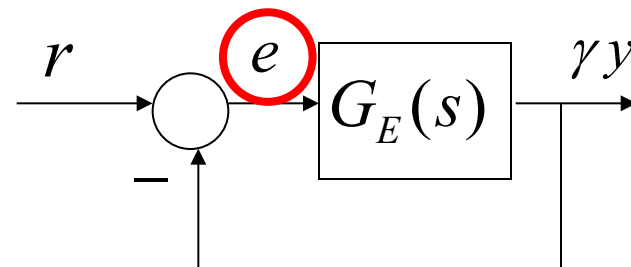
$$y(t) \equiv K_C r(t) \quad K_C := \text{costante di controllo o regolazione}$$

La difformità dalla condizione ideale può essere misurata da una variabile errore, per esempio così definita:

$$e(t) := r(t) - \gamma y(t) ; \quad \gamma := 1/K_C$$

$$e(t) \equiv 0 \Leftrightarrow y(t) \equiv K_C r(t)$$

Lo schema in retroazione non unitaria può essere ricondotto allo schema a fianco con retroazione unitaria. Quest'ultimo incorpora la definizione di errore assegnata.



Affinché i due schemi siano equivalenti occorre e basta che la f.d.t. fra r ed y del primo schema moltiplicata per γ sia uguale alla f.d.t. fra r e γy del secondo schema.

$$\frac{G}{1 + GH} \cdot \gamma = \frac{G_E}{1 + G_E} \Rightarrow$$

$$G_E(s) = \frac{G(s)\gamma}{1 + G(s)(H(s) - \gamma)}$$

Esempio: Se $H(s) = h$ e $K_C = 1/h \Rightarrow G_E(s) = G(s)h$

Punti salienti della lezione:

- Regole di riduzione negli schemi a blocchi
- Funzioni di sensibilità a variazioni di parametri
- Tipo di sistema retroazionato ed errori a regime
- Calcolo dell'errore a regime nei sistemi in retroazione non unitaria