

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica, Elettronica e delle
Telecomunicazioni

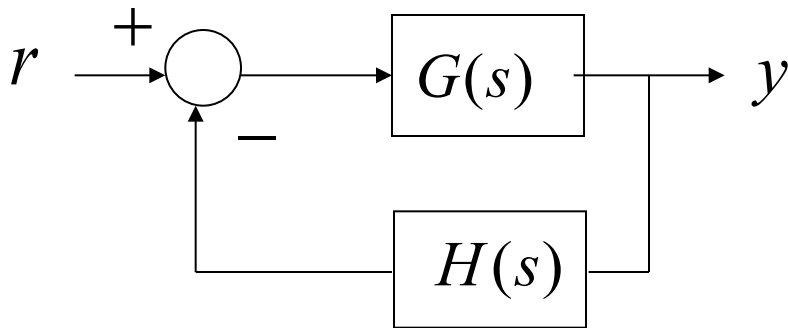
Lezione n. 12 di Fondamenti di Controlli Automatici
prof. Aurelio Piazzi

Sistemi retroazionati: criterio di Nyquist e margini di stabilità

Università degli Studi di Parma – a.a. 2014-2015

- La buona connessione nei sistemi retroazionati
- Un metodo grafico per lo studio della stabilità nei sistemi retroazionati: il criterio di Nyquist
- Una misura della distanza dall'instabilità: i margini di stabilità

Sistemi retroazionati: il requisito di buona connessione



$$T_{ry}(s) = \frac{G(s)}{1 + L(s)}$$

 $L(s) := G(s)H(s)$ (g. di anello)

Def. (buona connessione)

Il sistema retroazionato è **ben connesso** se $\lim_{|s| \rightarrow +\infty} 1 + L(s) \neq 0$.



La buona connessione è una condizione necessaria per la realizzabilità fisica dell'anello di retroazione. E' una condizione che assumiamo sia sempre soddisfatta.

Esempi di sistemi in retroazione non ben connessi :

$$1. G(s) = 1, H(s) = -1 \Rightarrow T_{ry} = \frac{G}{1+GH} = \frac{1}{1-1} = \frac{1}{0} ! \quad \text{☞}$$

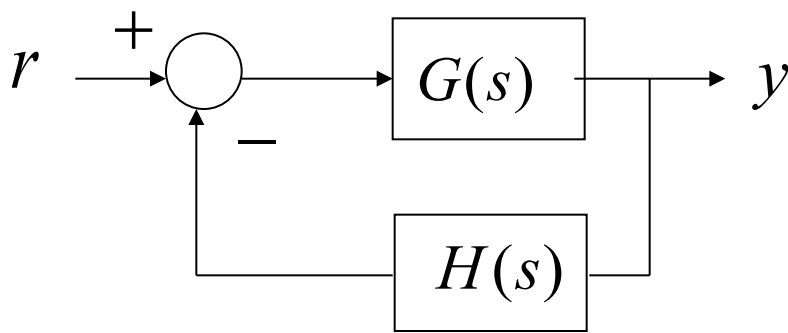
$$\begin{cases} y = e \\ e = r - (-1)y \end{cases} \Rightarrow y = r + y \text{ eq. impossibile con } r \neq 0$$

$$2. G(s) = -\frac{s+2}{s+1}, H(s) = \frac{s+2}{s+5} \Rightarrow T_{ry} = \frac{G}{1+GH} = \frac{-\frac{s+2}{s+1}}{1 - \frac{s+2}{s+1} \cdot \frac{s+2}{s+5}}$$

$$\begin{aligned} T_{ry} &= \frac{-\frac{s+2}{\cancel{s+1}}}{\frac{(s+1)(s+5) - (s+2)^2}{(\cancel{s+1})(s+5)}} = -\frac{(s+2)(s+5)}{\cancel{s^2} + 6s + 5 - (\cancel{s^2} + 4s + 4)} \\ &= -\frac{(s+2)(s+5)}{2s+1} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{(s+2)(s+5)}{s + \frac{1}{2}} \quad \text{sistema improprio!} \end{aligned}$$

Il criterio di Nyquist

È un criterio grafico per lo studio della stabilità asintotica dei sistemi retroazionati.



$$T_{ry}(s) = \frac{G(s)}{1 + L(s)}$$

$$L(s) := G(s)H(s) \text{ (g. di anello)}$$

- Il sistema retroazionato è stabile asintoticamente se e solo se l'eq. caratteristica $1 + L(s) = 0$ ha tutte le radici a parte reale negativa.
- Il criterio di N. richiede il tracciamento del diagramma polare (o di N.) di $L(j\omega)$.

Teorema dell'indice logaritmico (*Principle of the Argument*)

Sia Γ una curva chiusa semplice del piano complesso e $\mathcal{D}$ la regione ad esso interna ($\Gamma = \partial\mathcal{D}$). Sia $F(s)$ una funzione analitica su $\mathcal{D}$ ad eccezione di un numero finito di poli. Inoltre $F(s)$ non abbia su Γ né poli né zeri. Vale quindi la relazione:



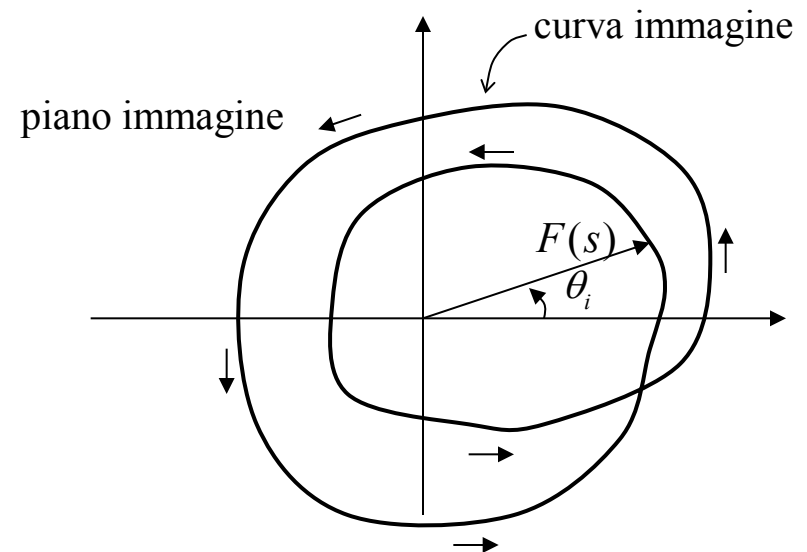
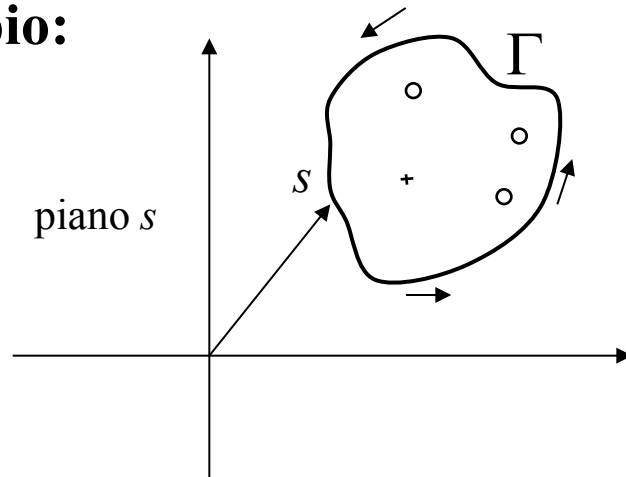
$$\frac{1}{2\pi} \Delta \arg F(s) = n_z - n_p$$

dove $\Delta \arg F(s)$ denota la variazione dell'argomento di $F(s)$ al variare di s lungo Γ per un giro completo in senso antiorario ed n_z e n_p sono rispettivamente il numero degli zeri e dei poli di $F(s)$ su $\mathcal{D}$ computati con le loro molteplicità.

Nota: Se la curva Γ fosse percorsa in senso orario la relazione sarebbe:

$$-\frac{1}{2\pi} \Delta \arg F(s) = n_z - n_p$$

Esempio:



$$\Delta \arg F(s) = \theta_f - \theta_i = (\theta_i + 2 \cdot 2\pi) - \theta_i = 4\pi$$

$$n_z = 3, \quad n_p = 1 \quad (\text{zeri e polo con molteplicità unitaria})$$

$$\frac{1}{2\pi} \cdot 4\pi = 3 - 1$$

Con la percorrenza oraria di Γ avremmo:

$$\Delta \arg F(s) = \theta_f - \theta_i = (\theta_i - 2 \cdot 2\pi) - \theta_i = -4\pi \Rightarrow -\frac{1}{2\pi} \cdot (-4\pi) = 3 - 1$$



Corollario (formulazione geometrica del teorema dell'indice log.)

Assunte le ipotesi del teorema dell'indice log. con la **percorrenza di Γ antioraria** vale la relazione:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{numero di giri, in senso antiorario,} \\ \text{della curva immagine intorno all'origine} \end{array} \right\} = n_z - n_p$$

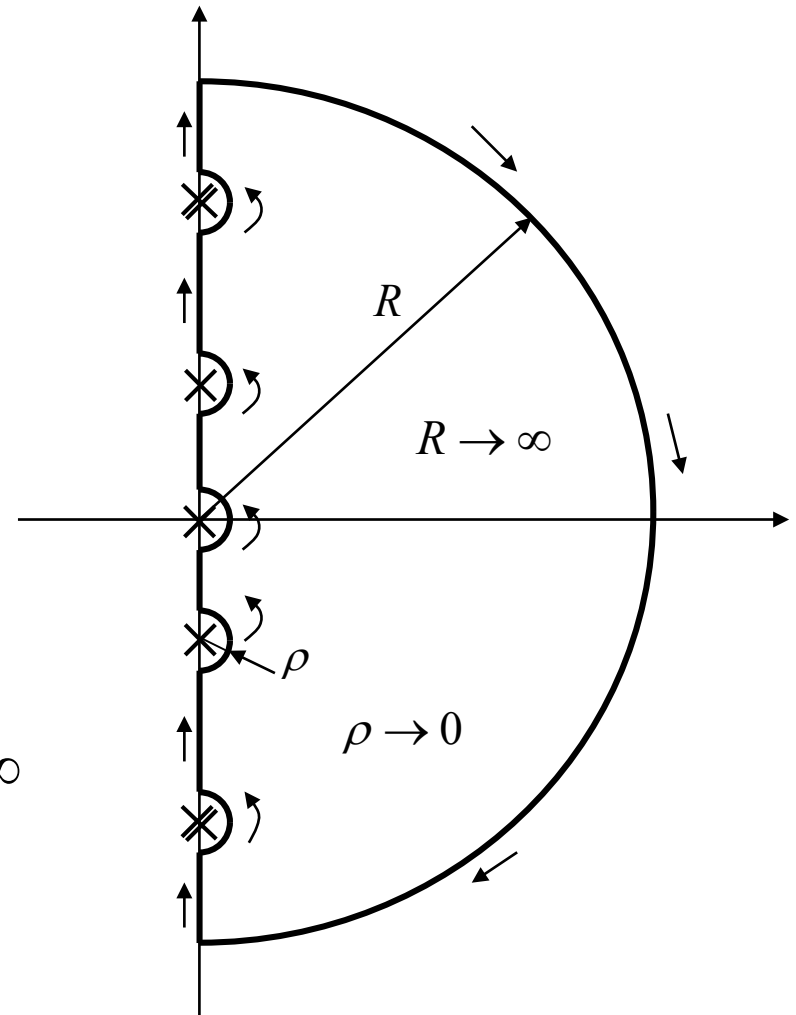
oppure, assunte le ipotesi del teorema dell'indice log. con la **percorrenza di Γ oraria** vale la relazione:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{numero di giri, in senso orario,} \\ \text{della curva immagine intorno all'origine} \end{array} \right\} = n_z - n_p$$

- Applicazione del teorema dell'indice log. alla stabilità dei sistemi retroazionati:

La curva chiusa di figura percorsa in senso orario è detta **contorno di Nyquist**: è composta da una semicirconferenza all'infinito, semicirconferenze infinitesime aggiranti i poli immaginari di $L(s)$ e da segmenti dell'asse immaginario.

Si osservi che per $\rho \rightarrow 0+$ e $R \rightarrow +\infty$
 $\Rightarrow \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}_+$



Si applica il teorema dell'indice logaritmico nella sua formulazione geometrica con scelta del contorno di Nyquist quale curva chiusa semplice e della funzione $1 + L(s)$.

Condizioni di applicabilità:

- $1 + L(s)$ è analitica sul contorno di Nyquist ed è analitica su $\mathbb{C}_+$ (regione interna al contorno di Nyquist) ad eccezione di un numero finito di poli (condizione soddisfatta).
- $1 + L(s)$ non deve presentare zeri sul contorno di Nyquist.

Questi se presenti possono esserci solo sull'asse immaginario.

Quindi il diagramma polare di $L(s)$ (ovvero di $L(j\omega)$) non deve attraversare il punto $-1 + j0$ (condizione da soddisfare).

Definizioni:

$n_z :=$ n. degli zeri di $1 + L(s)$ appartenenti a $\mathbb{C}_+$

$n_p :=$ n. dei poli di $L(s)$ (o di $1 + L(s)$) appartenenti a $\mathbb{C}_+$

$\psi := \left\{ \begin{array}{l} \text{n. di giri in senso orario della} \\ \text{curva immagine di } 1 + L(s) \text{ sul contorno} \\ \text{di Nyquist intorno all'origine} \end{array} \right\}$



Assunto che il diagramma polare di $L(s)$ non tocca il punto -1
vale

$$\psi = n_z - n_p$$

- Def. (**diagramma polare completo**)

Il **diagramma polare completo** (di $L(s)$) è la curva chiusa immagine di $L(s)$ sul contorno di Nyquist.

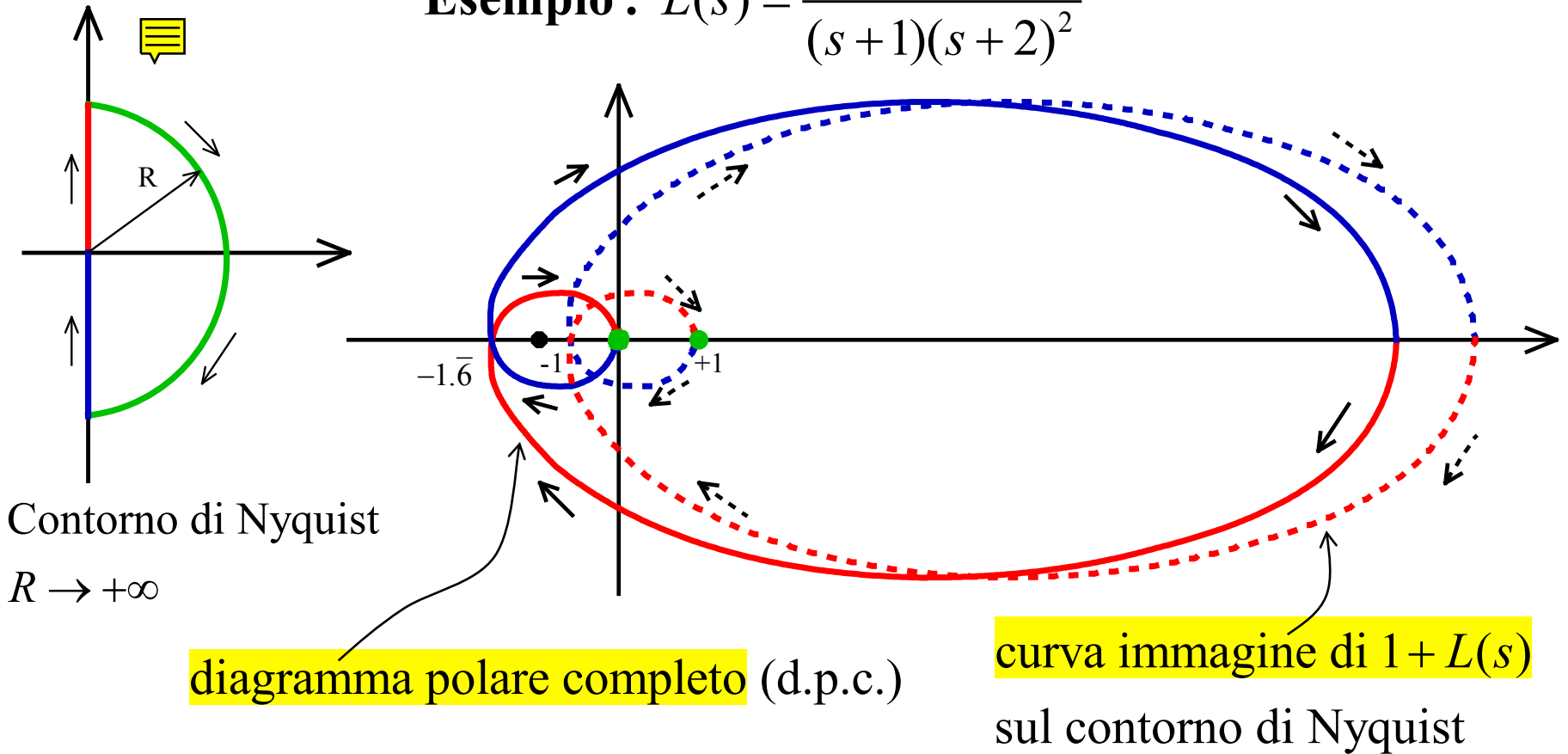
Quindi

$$\psi = \{\text{n. di giri in senso orario del d.p.c. intorno al punto } -1 + j0\}$$

Infatti

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{n. di giri in senso orario della} \\ \text{curva immagine di } 1 + L(s) \text{ sul contorno} \\ \text{di Nyquist intorno all'origine} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{n. di giri in senso orario del} \\ \text{d.p.c. intorno al punto } -1 + j0 \end{array} \right\}$$

Esempio : $L(s) = \frac{60}{(s+1)(s+2)^2}$



$$\psi = 2, n_p = 0$$

$$\psi = n_z - n_p \Rightarrow n_z = 2 \text{ Il sistema retroazionato è instabile!}$$

Criterio di Nyquist

Condizione necessaria e sufficiente affinché il sistema in retroazione sia asintoticamente stabile è che il diagramma polare completo non tocchi il punto critico -1 ma lo circonda tante volte in senso antiorario quanti sono i poli del guadagno di anello con parte reale positiva.

Corollario (caso particolare del Criterio di Nyquist)

Nell'ipotesi che il guadagno di anello $L(s)$ non abbia poli a parte reale positiva, condizione necessaria e sufficiente affinché il sistema in retroazione sia asintoticamente stabile è che il diagramma polare completo non tocchi né circonda il punto critico -1 .

Nota: Il corollario non è da associarsi ai sistemi stabili ad anello aperto.

Dimostrazione del Criterio di Nyquist

Il sistema retroazionato è asintoticamente stabile se e solo se

1. il diagramma polare completo di $L(s)$ non tocca -1 (equivalente a "il diagramma polare di $L(s)$ non tocca -1 ")
2. $-\psi = n_p$

Sufficienza: Valgono le condizioni 1 e 2. La prima condizione significa che $1 + L(s)$ non presenta zeri (puramente) immaginari. Dal teorema dell'indice logaritmico si ottiene $\psi = n_z - n_p$ e dalla seconda condizione segue $n_z = 0$. Quindi il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

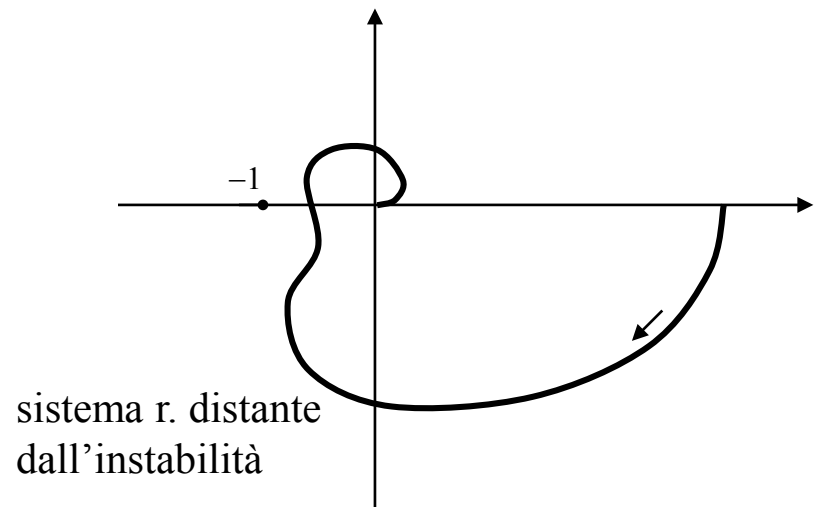
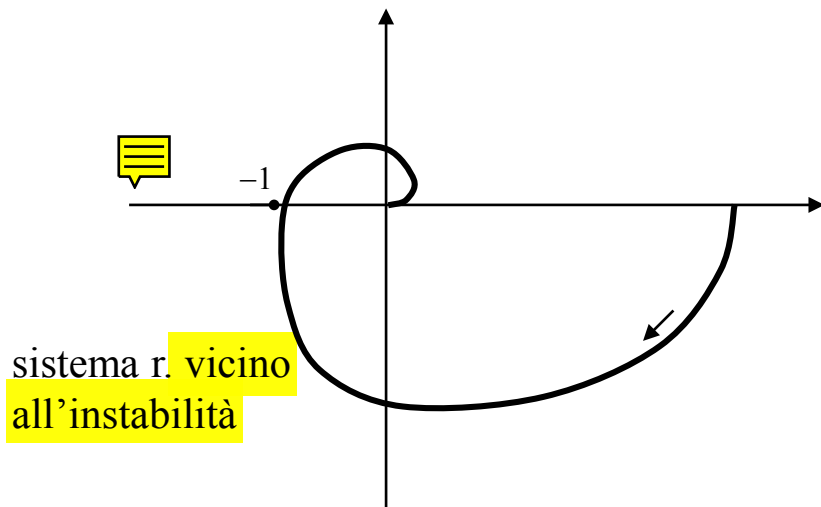
Necessità: Il sistema retroazionato è asintoticamente stabile. Tutti gli zeri di $1 + L(s)$ sono a parte reale negativa. Quindi non sono presenti zeri (puramente) immaginari di $1 + L(s)$ (equivalente alla condizione 1) e $n_z = 0$. Applicando il teorema dell'indice logaritmico si ottiene $\psi = n_z - n_p$ da cui si deduce $\psi = -n_p$ e quindi $-\psi = n_p$ (condizione 2).

Nota: Il criterio di Nyquist è valido per una classe di funzioni $L(s)$ più ampia delle sole funzioni razionali: in particolare è valido per $L(s) = R(s)\exp(-Ts)$ con $R(s)$ funzione razionale.

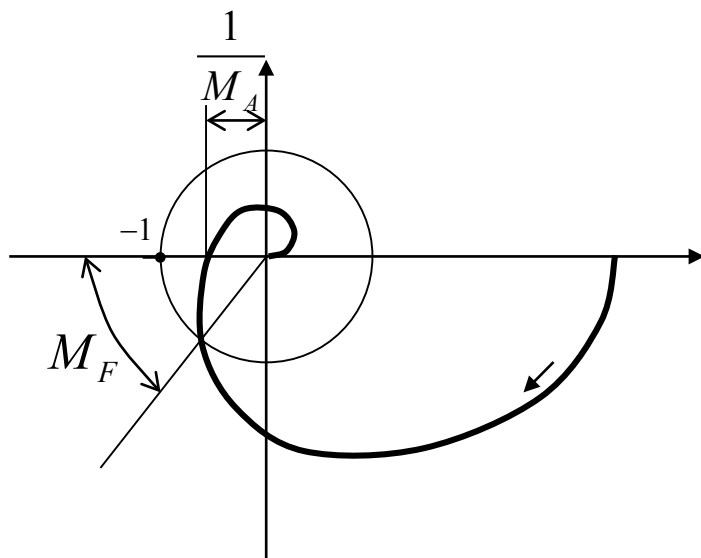
Margini di stabilità

La proprietà di stabilità (asintotica) di un sistema retroazionato è di per sé una proprietà **on/off**. Tuttavia è opportuno e necessario inserire nelle specifiche tecniche associate ad un sistema retroazionato una misura della distanza dall'instabilità.

Esempio: $L(s)$ asintoticamente stabile ...



- La distanza dall'instabilità nei sistemi retroazionati è tradizionalmente affidata ai cosiddetti margini di stabilità frequenziali ovvero il **margine di ampiezza** (M_A) e il **margine di fase** (M_F).



$$M_A := \frac{1}{|L(j\omega_p)|} \quad \text{dove } \omega_p \ni \arg L(j\omega_p) = -\pi$$

$\omega_p \equiv$ pulsazione di fase pi greco

$$M_F := \pi - |\varphi_c|$$

dove $\varphi_c = \arg L(j\omega_c)$ e $\omega_c \ni |L(j\omega_c)| = 1$

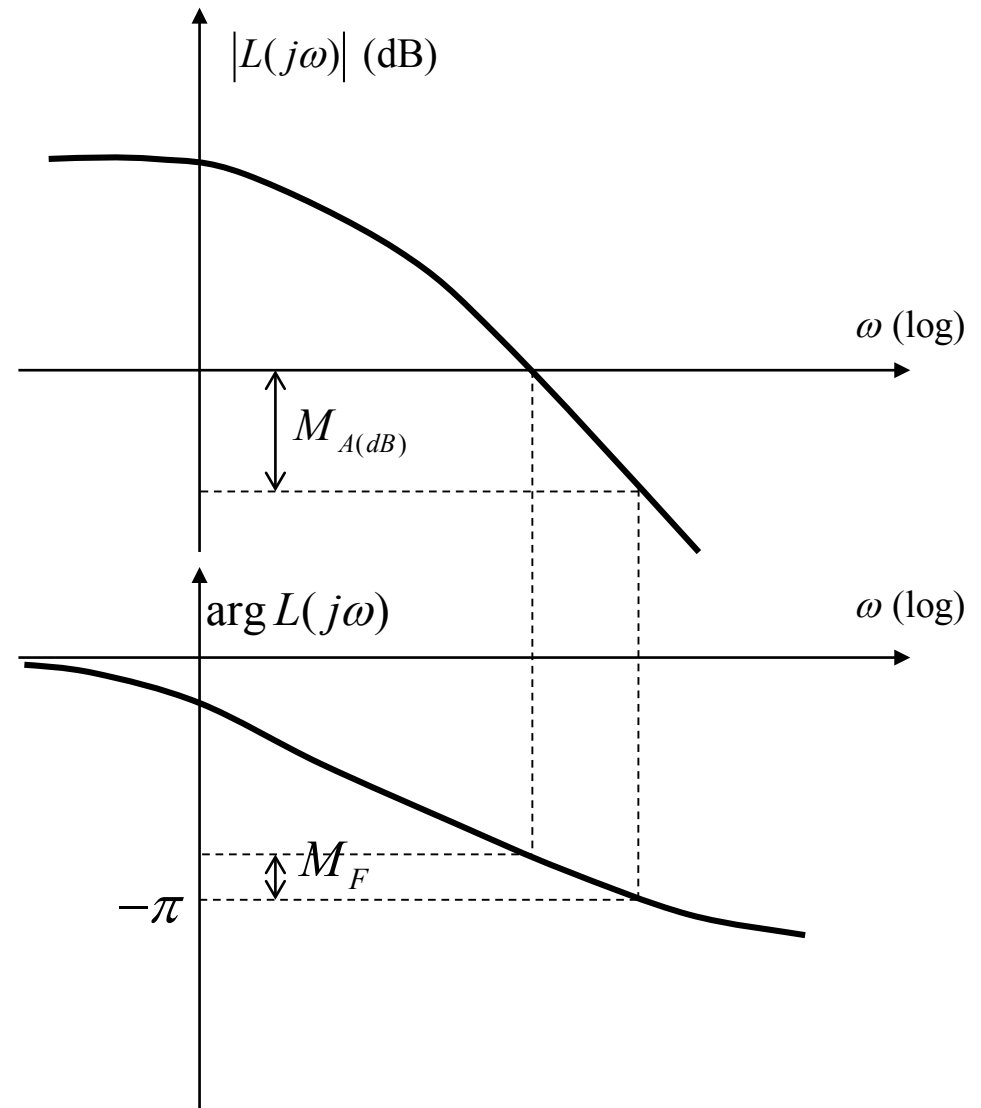
$\varphi_c \in (-\pi, 0)$, $\omega_c \equiv$ pulsazione critica

$M_A \in (1, +\infty)$ a volte espresso in decibel: $M_{A(dB)} = 20 \log M_A$

$M_F > 0$ espresso usualmente in gradi sessagesimali

Margini di ampiezza
e di fase misurati sui
diagrammi di Bode

$$M_{A(dB)} = -20 \log |L(j\omega_p)|$$



- Problemi con le definizioni tradizionali dei margini di stabilità

Esempio

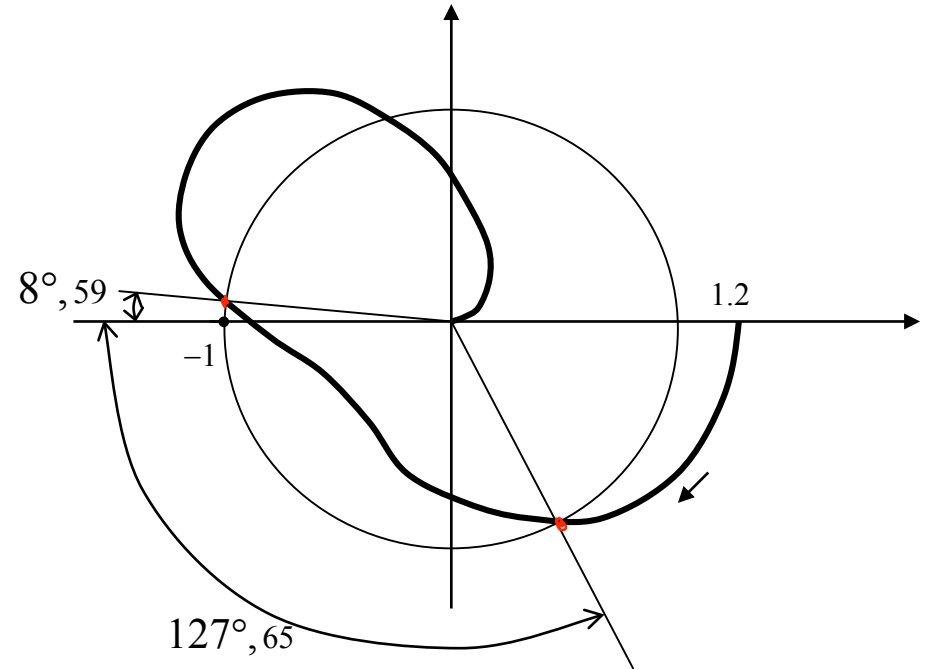
$$L(s) = \frac{1.2}{(1+s)^2 \left(1 + 2 \cdot \frac{1}{20} \cdot \frac{s}{3} + \frac{s^2}{3^2} \right)} =$$

$$= \frac{1.2}{(1+s)^2 \left(1 + \frac{s}{30} + \frac{s^2}{9} \right)}$$

$$L(j\omega) = \frac{1.2}{(1+j\omega)^2 \left(1 - \frac{\omega^2}{9} + \frac{j\omega}{30} \right)}$$

$$M_A = 1.11$$

$$M_F = 8^\circ, 59 \quad \text{e} \quad \text{non} \quad 127^\circ, 65$$



Definizioni generalizzate dei margini di stabilità

Il sistema retroazionato sia stabile asintoticamente:

$$M_A := \sup \left\{ M > 1 : |1 + \gamma L(j\omega)| > 0 \quad \forall \gamma \in \left[\frac{1}{M}, M \right] \text{ e } \forall \omega \geq 0 \right\}$$
$$M_F := \sup \left\{ \phi > 0 : |1 + e^{-j\phi} L(j\omega)| > 0 \quad \forall \phi \in [-\phi, +\phi] \text{ e } \forall \omega \geq 0 \right\}$$

I margini di stabilità sono “norme” che misurano la distanza del punto critico $-1+j0$ dal diagramma polare di $L(j\omega)$.

Proprietà

Sia $M > 1$. Vale la disequazione $|1 + \gamma L(j\omega)| > 0 \quad \forall \gamma \in \left[\frac{1}{M}, M\right]$ e $\forall \omega \geq 0$ se e solo se il segmento dell'asse reale compreso fra $-M$ e $-1/M$ non interseca il diagramma polare di $L(j\omega)$.

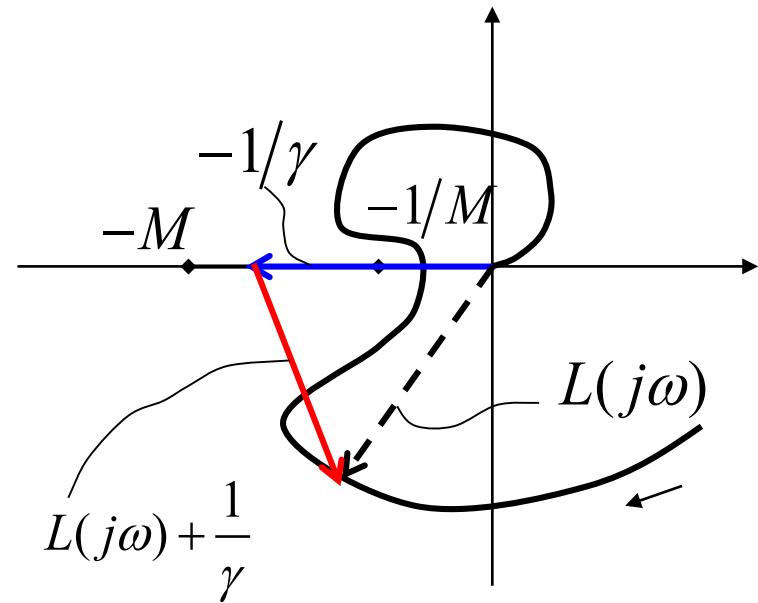
Dim.:

$$\left\{ |1 + \gamma L(j\omega)| > 0 \quad \forall \gamma \in \left[\frac{1}{M}, M\right] \text{ e } \forall \omega \geq 0 \right\}$$

$\Leftrightarrow$

$$\left\{ \left| \frac{1}{\gamma} + L(j\omega) \right| > 0 \quad \forall \gamma \in \left[\frac{1}{M}, M\right] \text{ e } \forall \omega \geq 0 \right\}$$

Si noti che $\frac{1}{M} \leq \gamma \leq M \Leftrightarrow -M \leq -\frac{1}{\gamma} \leq -\frac{1}{M}$



Proprietà

Sia $\phi > 0$. Vale la disequazione $|1 + e^{-j\varphi} L(j\omega)| > 0 \quad \forall \varphi \in [-\phi, +\phi] \text{ e } \forall \omega \geq 0$ se e solo se l'arco di circonferenza di equazione $e^{j(\pi+\varphi)}, \varphi \in [-\phi, +\phi]$ non interseca il diagramma polare di $L(j\omega)$.

Dim.:

$$\left\{ |1 + e^{-j\varphi} L(j\omega)| > 0 \quad \forall \varphi \in [-\phi, +\phi] \text{ e } \forall \omega \geq 0 \right\}$$

$$\Leftrightarrow$$

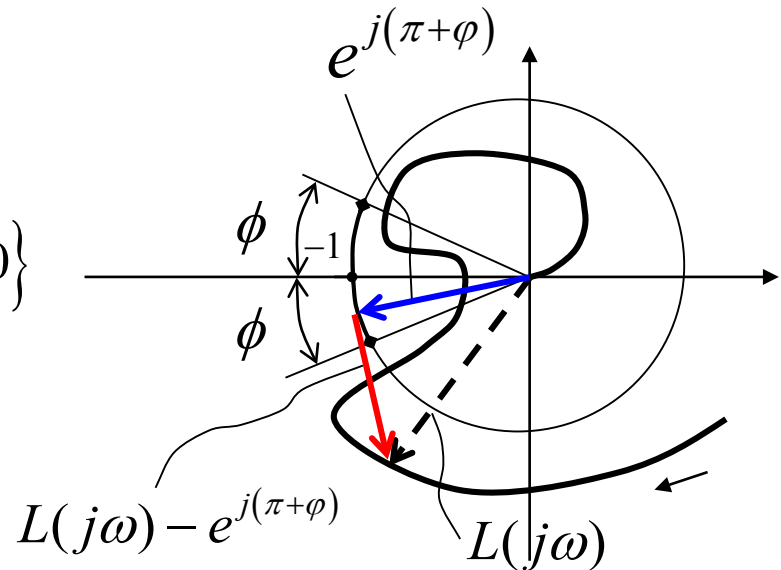
$$\left\{ \left| (1 + e^{-j\varphi} L(j\omega)) e^{j\varphi} \right| > 0 \quad \forall \varphi \in [-\phi, +\phi] \text{ e } \forall \omega \geq 0 \right\}$$

$$\Leftrightarrow$$

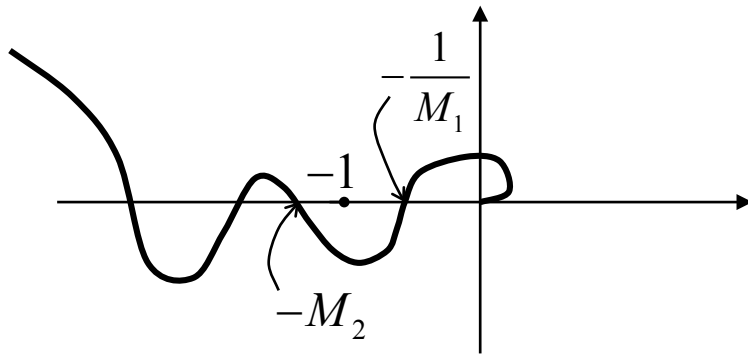
$$\left\{ |L(j\omega) + e^{j\varphi}| > 0 \quad \forall \varphi \in [-\phi, +\phi] \text{ e } \forall \omega \geq 0 \right\}$$

$$\Leftrightarrow$$

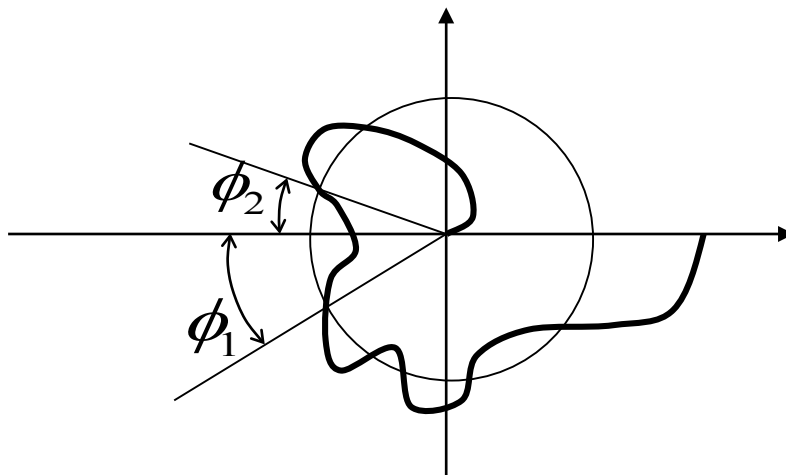
$$\left\{ |L(j\omega) - e^{j(\pi+\varphi)}| > 0 \quad \forall \varphi \in [-\phi, +\phi] \text{ e } \forall \omega \geq 0 \right\}$$



Procedura generale per il calcolo dei margini di stabilità



$$M_A = \min \{M_1, M_2\}$$



$$M_F = \min \{\phi_1, \phi_2\}$$

Punti salienti della lezione:

- Il teorema dell'indice logaritmico
- Il contorno di Nyquist ed il diagramma polare completo
- Margine di ampiezza e margine di fase