

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica, Elettronica e delle
Telecomunicazioni

Lezione n. 13 di Fondamenti di Controlli Automatici
prof. Aurelio Piazzì

Sistemi retroazionati: il luogo delle radici

Università degli Studi di Parma – a.a. 2014-2015

- Il luogo delle radici
- Proprietà del luogo delle radici
- Esempi di luoghi delle radici
- Il contorno delle radici
- Complementi

Il luogo delle radici

Il progetto di un sistema in retroazione richiede la conoscenza dei poli retroazionati e delle variazioni di questi al variare dei più importanti parametri di progetto: fra questi c'è la costante di trasferimento K_1 del guadagno di anello $L(s)$.

$$L(s) = K_1 \frac{(s - z_1) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1) \cdots (s - p_n)}$$

Equazione caratteristica del sistema in retroazione:

$$1 + K_1 G_1(s) = 0$$

$$G_1(s) := \frac{z(s)}{p(s)} := \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)}$$

Definizione:

Luogo delle radici (diretto) è il luogo geometrico descritto dalle radici dell'eq. $1 + K_1 G_1(s) = 0$ al variare di K_1 da 0 a $+\infty$.

Luogo delle radici (inverso) è il luogo geometrico descritto dalle radici dell'eq. $1 + K_1 G_1(s) = 0$ al variare di K_1 da 0 a $-\infty$.

Se $K_1 > 0$ allora:

$$\{1 + K_1 G_1(s) = 0\} \Leftrightarrow \begin{cases} \arg G_1(s) = \pi \mod 2\pi \\ |G_1(s)| = \frac{1}{K_1} \end{cases}$$

Se $K_1 < 0$ allora:

$$\{1 + K_1 G_1(s) = 0\} \Leftrightarrow \begin{cases} \arg G_1(s) = 0 \mod 2\pi \\ |G_1(s)| = -\frac{1}{K_1} \end{cases}$$

Esempio: $\tau > 0, K \in (0, +\infty)$

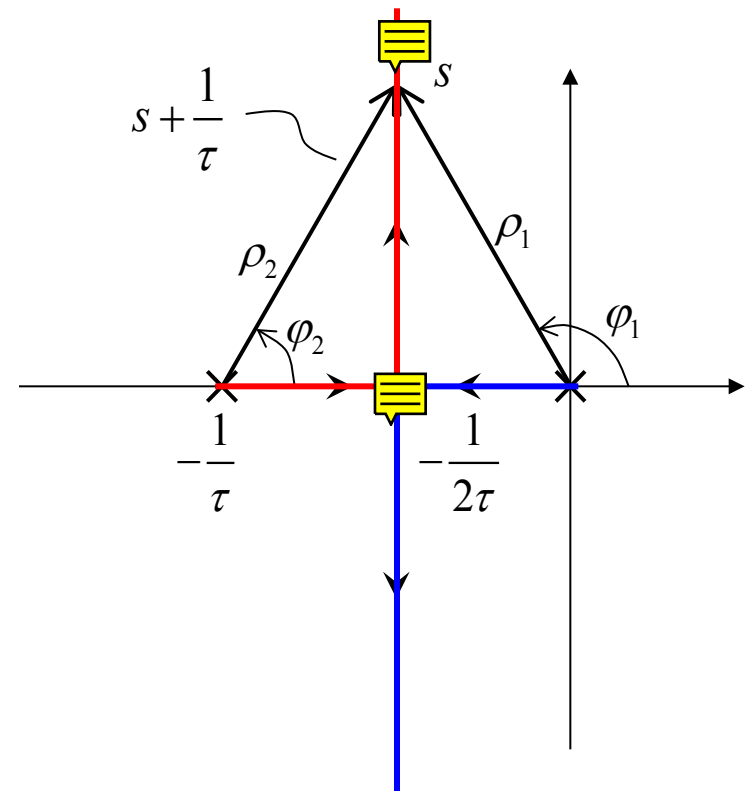
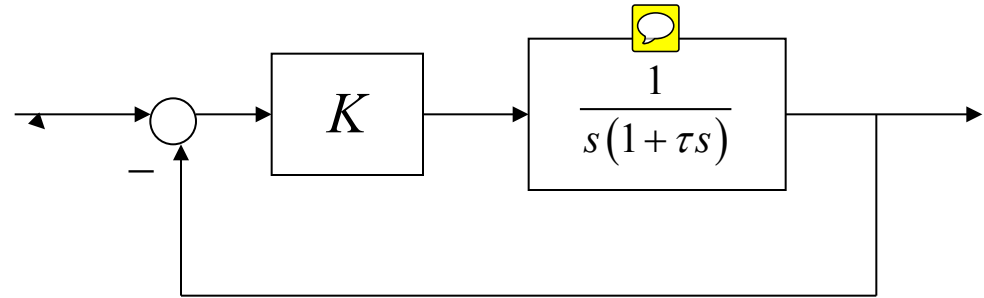
$$\text{eq. car.: } 1 + \frac{K}{s(1 + \tau s)} = 0$$

$$1 + \frac{K}{\tau} \cdot \frac{1}{s \left(s + \frac{1}{\tau} \right)} = 0$$

$$K_1 = \frac{K}{\tau}, \quad G_1(s) = \frac{1}{s \left(s + \frac{1}{\tau} \right)}$$

$$\arg \frac{1}{s \left(s + \frac{1}{\tau} \right)} = \pi \pmod{2\pi}$$

$$\begin{cases} s = \rho_1 e^{j\varphi_1} \\ s + \frac{1}{\tau} = \rho_2 e^{j\varphi_2} \end{cases} \Rightarrow \varphi_1 + \varphi_2 = \pi$$



Proprietà del luogo delle radici

Proprietà 1: Il luogo ha tanti rami quanti sono i poli di $G_1(s)$. Ogni ramo parte da un polo di $G_1(s)$ e **termina in uno zero di $G_1(s)$ o in un punto all'infinito**. I rami si intersecano in corrispondenza delle radici multiple.

Dim.: (si ricorda che $m \leq n$) 

$$1 + K_1 G_1(s) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p(s) + K_1 z(s) = 0 \quad (\text{eq. polinomiale di grado } n)$$

$$K_1 \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad |G_1(s)| \rightarrow +\infty \quad \Leftrightarrow \quad s \rightarrow p_i, \quad i = 1, \dots, n$$

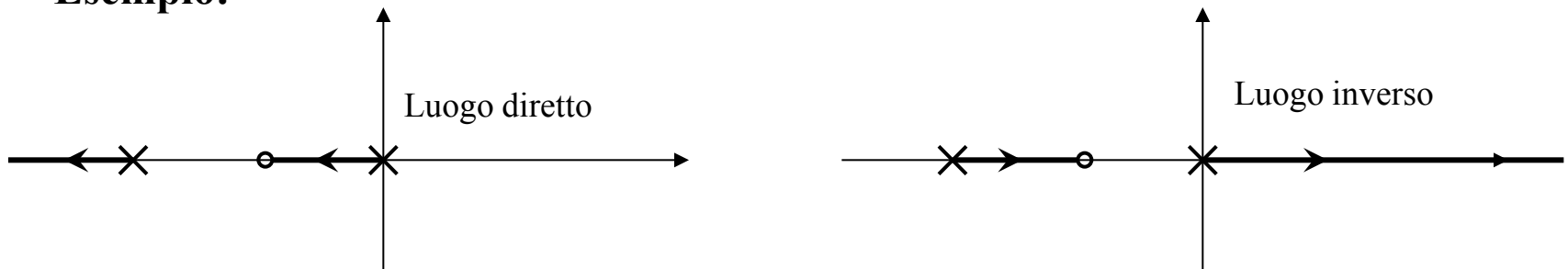
$$|K_1| \rightarrow +\infty \quad \Rightarrow \quad |G_1(s)| \rightarrow 0 \quad \Leftrightarrow \quad s \rightarrow z_i, \quad i = 1, \dots, m \quad \text{oppure} \quad |s| \rightarrow +\infty \quad \square$$

Proprietà 2: Il luogo delle radici è simmetrico rispetto all'asse reale.

Dim.: Le radici complesse di un'eq. polinomiale a coefficienti reali si presentano a coppie coniugate.

Proprietà 3: Nel luogo delle radici diretto ($K_1 > 0$) un punto dell'asse reale fa parte del luogo se si lascia alla sua destra un numero totale *dispari* di zeri e poli di $G_1(s)$. Nel luogo delle radici inverso ($K_1 < 0$) un punto dell'asse reale fa parte del luogo se si lascia alla sua destra un numero totale *pari* di zeri e poli di $G_1(s)$.

Esempio:



Dim.: Eq. del luogo diretto: $\arg G_1(s) = \pi \mod 2\pi \quad s \in \mathbb{R}$

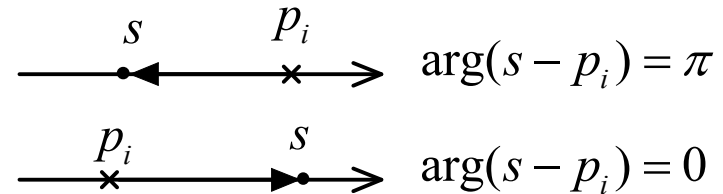
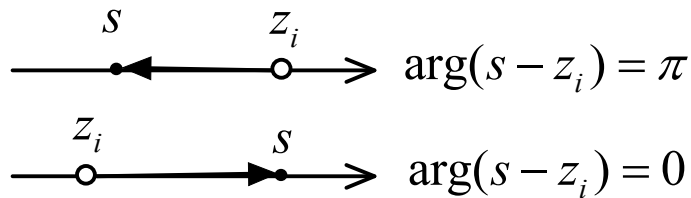
$$\arg \frac{z(s)}{p(s)} = \pi \mod 2\pi \quad \arg \frac{(s - z_1) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1) \cdots (s - p_n)} = \pi \mod 2\pi$$

zeri: $z_1, z_2, \dots, z_q$ reali $z_{q+1}, z_{q+2}, \dots, z_m$ complessi coniugati

poli: $p_1, p_2, \dots, p_r$ reali $p_{r+1}, p_{r+2}, \dots, p_n$ complessi coniugati

$$\arg \frac{(s - z_1) \cdots (s - z_q)}{(s - p_1) \cdots (s - p_r)} = \pi \mod 2\pi$$

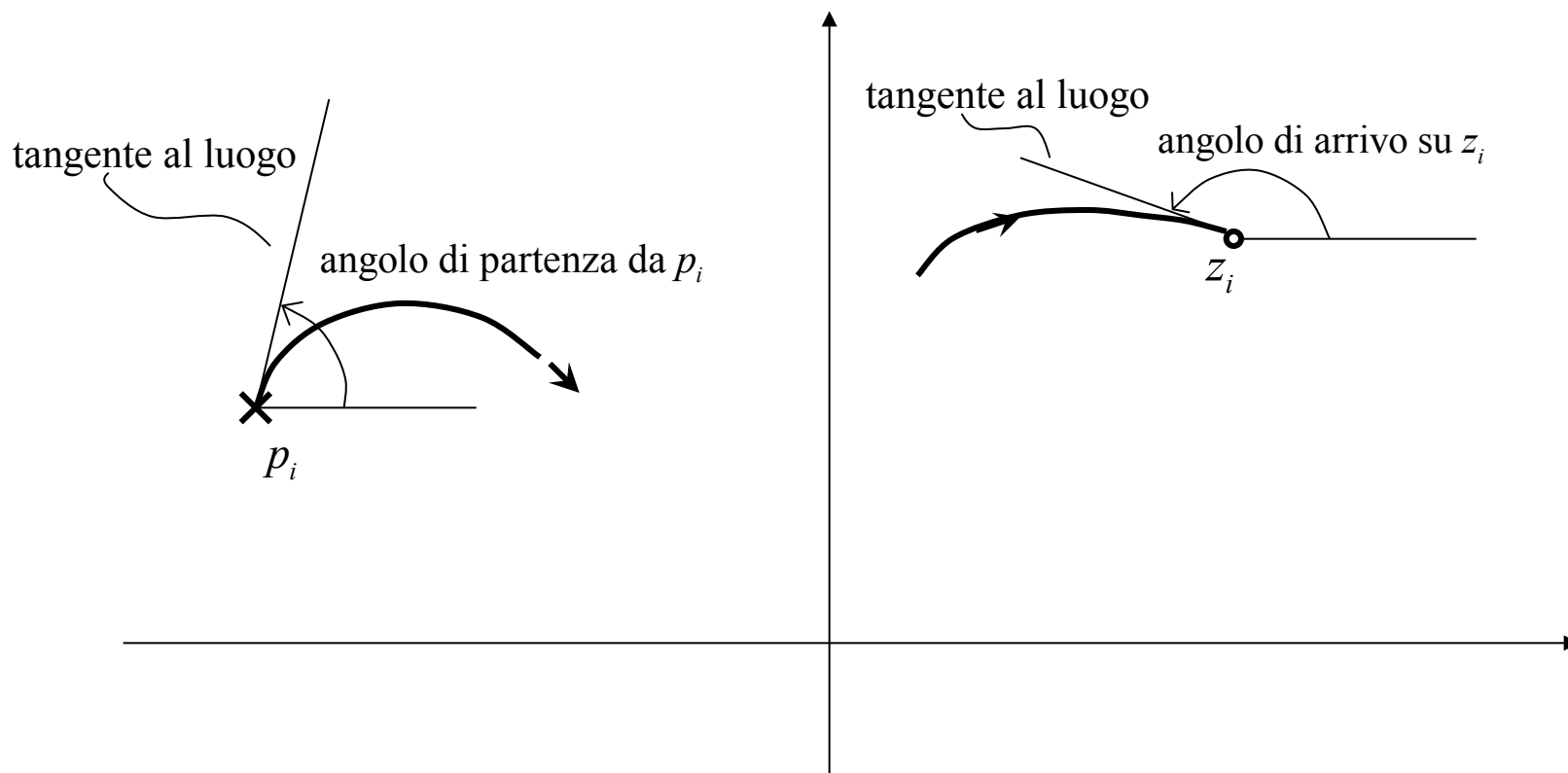
$$\arg(s - z_1) + \cdots + \arg(s - z_q) - \arg(s - p_1) - \cdots - \arg(s - p_r) = \pi \mod 2\pi$$



Il numero totale di zeri e poli **reali** a destra di s è dispari.

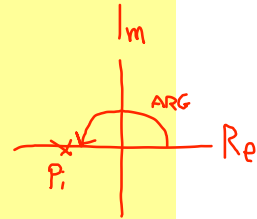
$\Leftrightarrow$ Il numero totale di zeri e poli (reali o complessi) a destra di s è dispari. $\square$

Angoli di partenza e di arrivo nel luogo



Proprietà 4: Nel luogo delle radici diretto ($K_1 > 0$) l'angolo di partenza da un polo p_i semplice è dato dalla relazione:

$$\{\text{ang. di partenza da } p_i\} = \pi + \sum_{j=1}^m \arg(p_i - z_j) - \sum_{j \neq i} \arg(p_i - p_j)$$



l'angolo di arrivo sullo zero z_i semplice è dato da

$$\{\text{ang. di arrivo su } z_i\} = \pi + \sum_{j=1}^n \arg(z_i - p_j) - \sum_{j \neq i} \arg(z_i - z_j)$$

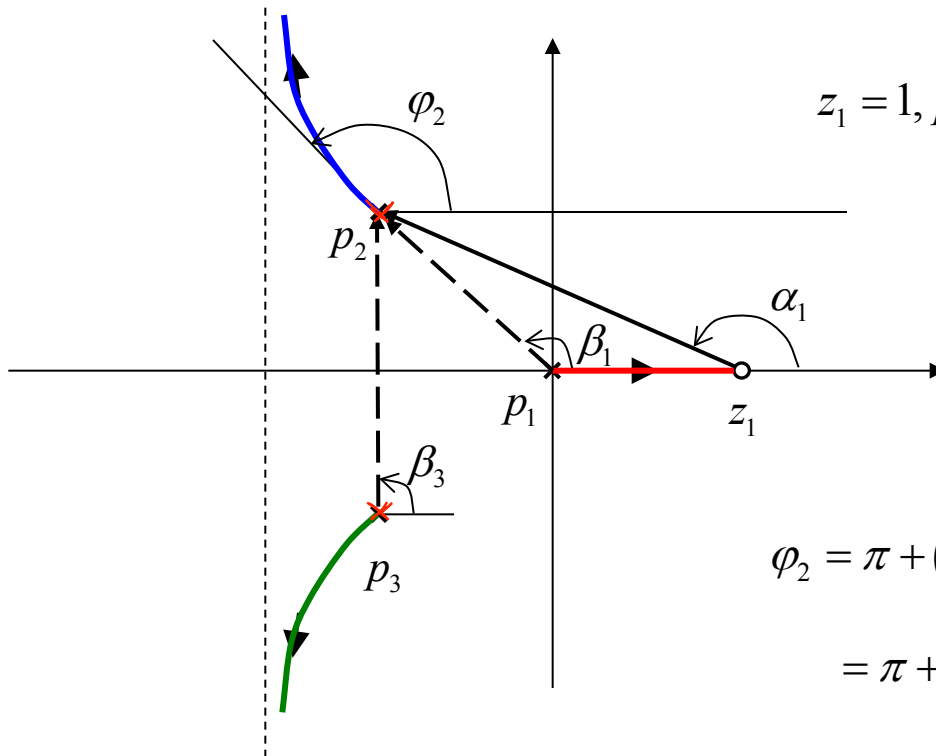
Se il luogo delle radici è inverso ($K_1 < 0$) nelle relazioni si sostituisce 0 a π .

Dim. (cenno): Determinazione dell'angolo di p. da p_i (φ_i)

Si impone il cambio di variabile $s = p_i + \rho e^{j\varphi_i}$, $\rho \rightarrow 0 +$

Quindi si valuta al limite la relazione $\arg G_1(s) = \pi \mod 2\pi \dots$

Esempio: $1 + K_1 \frac{s-1}{s[(s+1)^2 + 1]} = 0, \quad K_1 > 0$



$$z_1 = 1, p_1 = 0, p_2 = -1 + j, p_3 = -1 - j$$

$$\varphi_2 = \pi + (\alpha_1) - (\beta_1 + \beta_3)$$

$$= \pi + \left(\frac{\pi}{2} + \arctan 2 \right) - \left[\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) + \left(\frac{\pi}{2} \right) \right]$$

$$= \frac{\pi}{4} + \arctan 2 = 1.8925 \equiv 108^\circ, 43$$

Nota sulla Proprietà 4 [luogo diretto]

Se il polo p_i è multiplo con molteplicità $h > 1$ gli h angoli di partenza φ_i da p_i si determinano con la congruenza:

$$h\varphi_i = \pi + \sum_{j=1}^m \arg(p_i - z_j) - \sum_{j \neq i} \arg(p_i - p_j) \mod 2\pi$$

Se lo zero z_i è multiplo con molteplicità $h > 1$ gli h angoli di arrivo ψ_i su z_i si determinano con la congruenza:

$$h\psi_i = \pi + \sum_{j=1}^n \arg(z_i - p_j) - \sum_{j \neq i} \arg(z_i - z_j) \mod 2\pi$$

Esempio: $h = 2, \quad 2\varphi_1 = \frac{\pi}{4} \mod 2\pi$

soluzione:
$$\left\{ \begin{array}{l} 2\varphi_{1,a} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \varphi_{1,a} = \frac{\pi}{8} \\ 2\varphi_{1,b} = \frac{\pi}{4} + 2\pi \Rightarrow \varphi_{1,b} = \frac{\pi}{8} + \pi \end{array} \right.$$

Proprietà 5: Una radice del luogo di molteplicità h corrisponde a un punto comune ad h rami in cui oltre all'eq. $1 + K_1 G_1(s) = 0$ sono soddisfatte le relazioni $D^i G_1(s) = 0$, $i = 1, \dots, h - 1$.

Dim.:

Sia p_{Ci} una radice del luogo di molteplicità h :

$$\exists K_1 \in \mathbb{R} \ni 1 + K_1 G_1(s) = (s - p_{Ci})^h f(s), \quad f(p_{Ci}) \neq 0$$

$$\Rightarrow D^i (1 + K_1 G_1(s)) \Big|_{s=p_{Ci}} = 0, \quad i = 1, \dots, h - 1$$

$$\Rightarrow D^i G_1(s) \Big|_{s=p_{Ci}} = 0, \quad i = 1, \dots, h - 1 \quad \square$$

Corollario

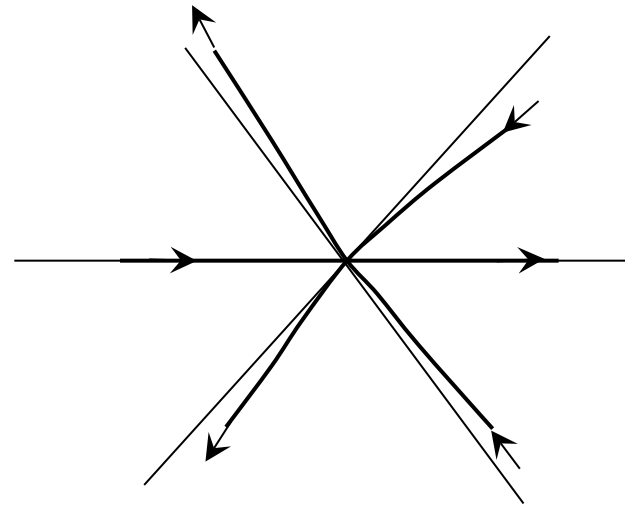
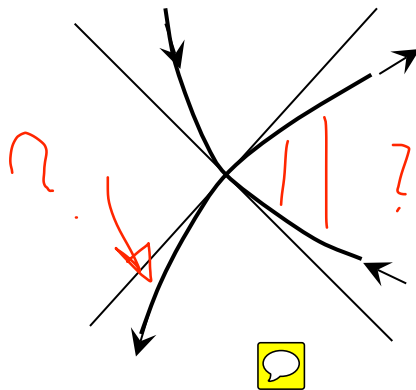
Una radice doppia del luogo soddisfa l'equazione:



$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{s - p_i} - \sum_{i=1}^m \frac{1}{s - z_i} = 0$$

Proprietà 6: In corrispondenza di una radice di molteplicità h il luogo presenta h rami entranti ed h rami uscenti, alternati fra loro, le cui tangenti suddividono lo spazio circostante in settori uguali di π/h radianti.

Esempi:



Dai poli di $G_1(s)$ partono n rami, di questi m terminano sugli zeri di $G_1(s)$, i rimanenti $n - m$ divergono all'infinito adagiandosi ad asintoti rettilinei.

Proprietà 7: Gli asintoti del luogo delle radici formano una stella di raggi con centro nel punto dell'asse reale di ascissa

$$\sigma_a = \left(\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m z_i \right) / (n - m)$$

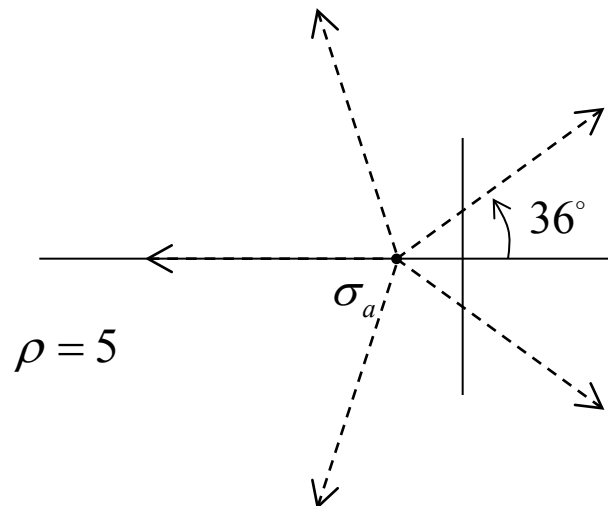
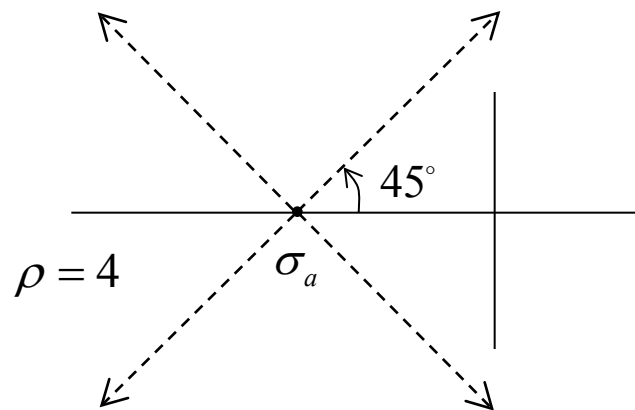
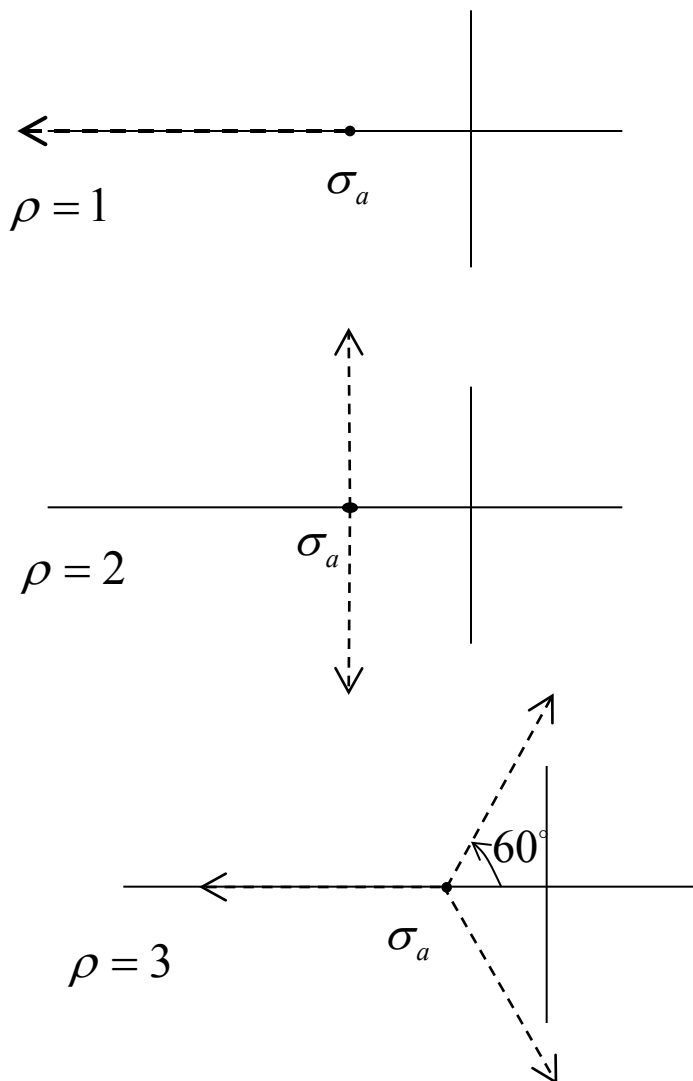
Se il luogo è diretto ($K_1 > 0$) gli asintoti formano con l'asse reale gli angoli:

$$\vartheta_{a,\nu} = (2\nu + 1)\pi / (n - m), \quad \nu = 0, 1, \dots, n - m - 1.$$

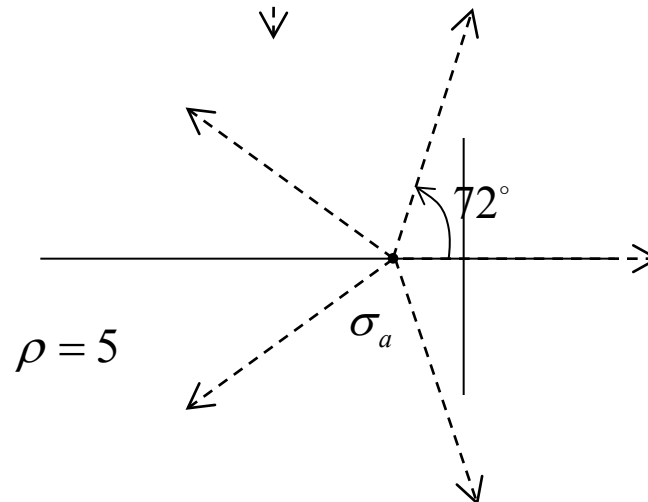
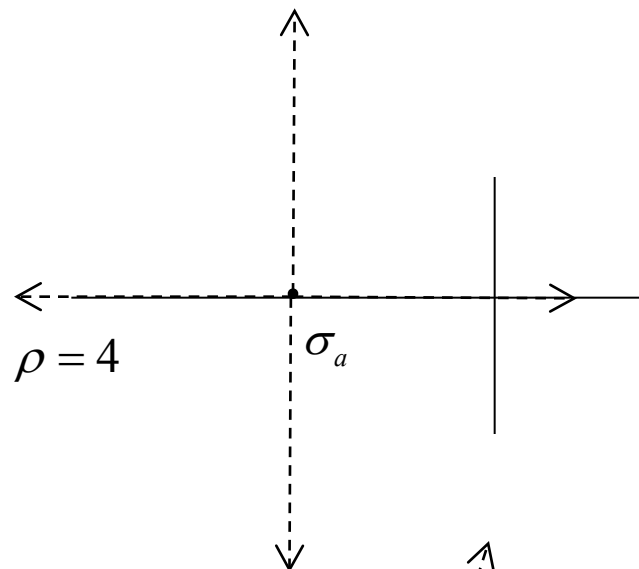
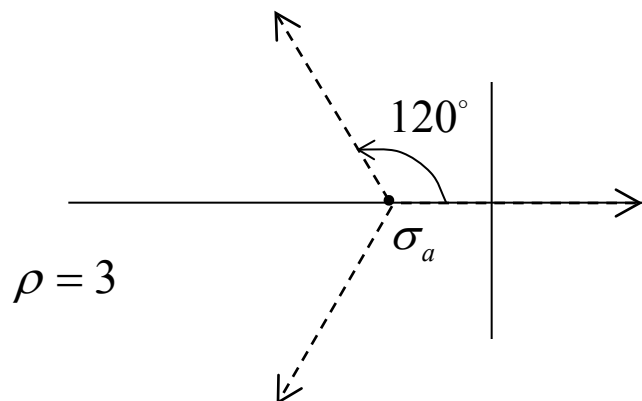
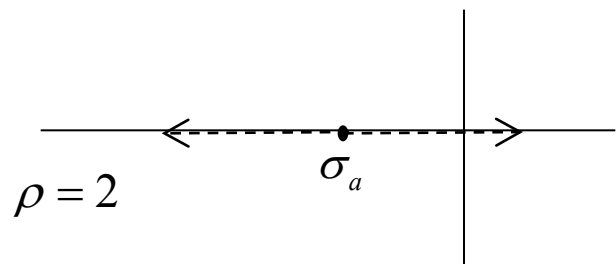
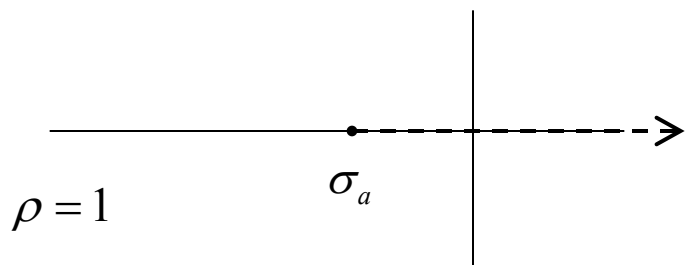
Se il luogo è inverso ($K_1 < 0$) gli asintoti formano con l'asse reale gli angoli:

$$\vartheta_{a,\nu} = 2\nu\pi / (n - m), \quad \nu = 0, 1, \dots, n - m - 1.$$

Asintoti del luogo diretto ($K_1 > 0$) $\rho := n - m$ (ordine relativo di $G_1(s)$)

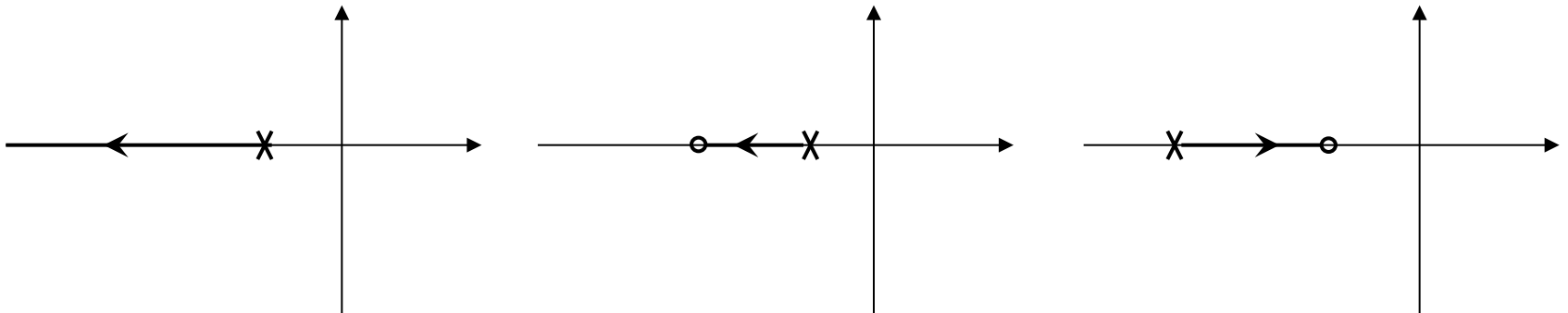


Asintoti del luogo inverso ($K_1 < 0$) $\rho := n - m$ (ordine relativo di $G_1(s)$)

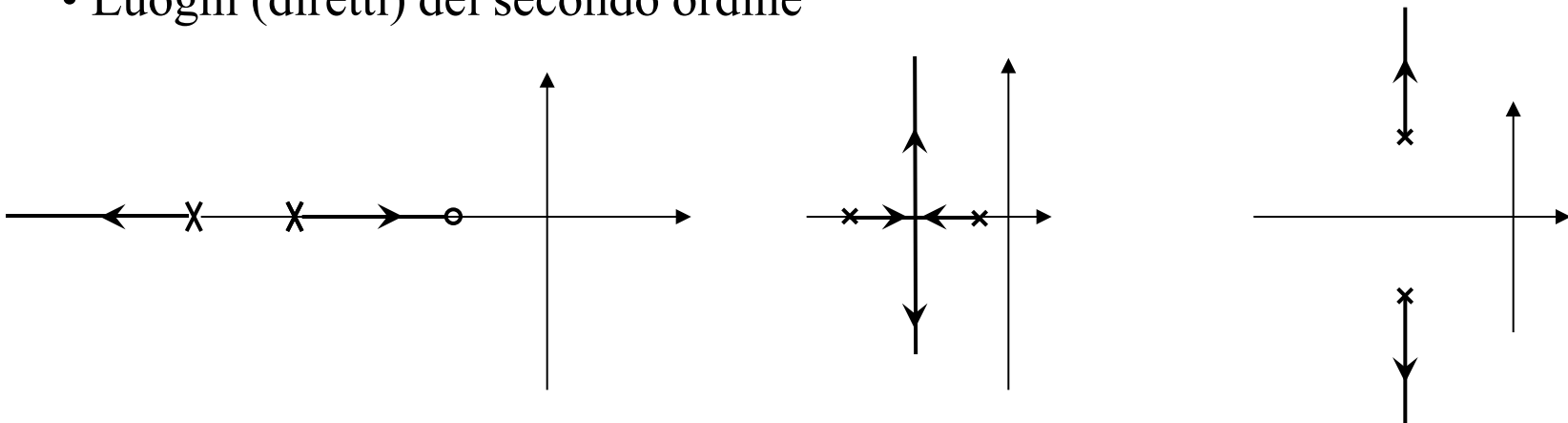


Esempi di luoghi delle radici

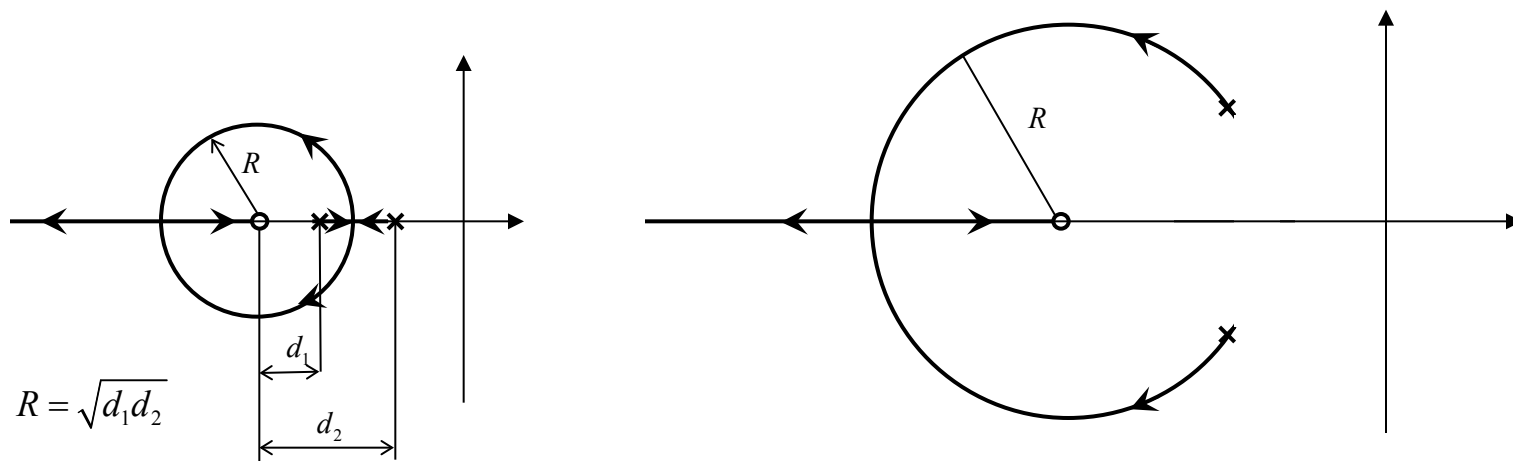
- Luoghi (diretti) del primo ordine



- Luoghi (diretti) del secondo ordine



- Luoghi (diretti) del secondo ordine



Il contorno delle radici

- È un luogo delle radici (dell'eq. caratteristica) per variazioni di un parametro diverso dalla costante di trasferimento del guadagno di anello.
- Questa tecnica è applicabile quando l'eq. caratteristica $1+L(s;p) = 0$ con p parametro variante è riconducibile all'eq. caratteristica standard $1 + K_1 G_1(s) = 0$ con $K_1 = K_1(p)$ funzione biunivoca di p .

Esempio (contorno delle radici per variazioni di un polo):

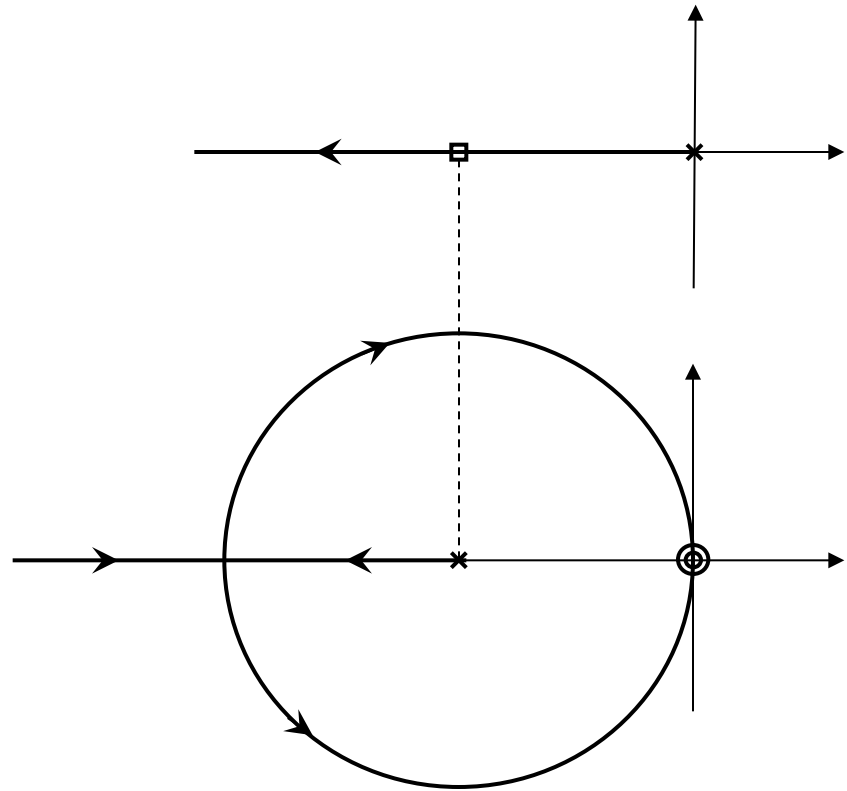
$$L(s; \tau) = \frac{\bar{K}}{s(1 + \tau s)}$$

per $\tau = 0$ $1 + \frac{K}{s} = 0$

per $\tau > 0$ $1 + \frac{\bar{K}}{s(1 + \tau s)} = 0$

$$s + \tau s^2 + \bar{K} = 0$$

$$1 + \tau \frac{s^2}{s + \bar{K}} = 0$$



L'eq. caratteristica $1+L(s;p) = 0$ è riconducibile alla forma standard quando trasformata in equazione polinomiale i suoi coefficienti sono funzioni affini del parametro p .

Esempio:

$$1 + \frac{s + 5p}{s(s + 3p)} = 0 \quad p > 0$$

$$s^2 + 3ps + s + 5p = 0$$

$$1 + \frac{p(3s + 5)}{s^2 + s} = 0$$

$$1 + 3p \frac{s + \frac{5}{3}}{s(s + 1)} = 0$$

Complementi

$$1 + K_1 \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} = 0 \quad 1 + K_1 G_1(s; z_1, \dots, z_m) = 0$$

$\{p_{C1}, p_{C2}, \dots, p_{Cn}\}$ siano le radici dell'eq. caratteristica

$$p_{Ci} \equiv p_{Ci}(K_1; z_1, \dots, z_m)$$

Teorema del baricentro del luogo delle radici

Se il guadagno di anello ha grado relativo $\rho \geq 2$ vale la relazione:

$$\sum_{i=1}^n p_{Ci} = \sum_{i=1}^n p_i \quad \forall K_1 \in \mathbb{R} \text{ e } \forall z_i \in \mathbb{C}, i = 1, \dots, m.$$

Dim.: (si ricorda che $\rho = n - m$)

$$1 + K_1 \frac{(s - z_1) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1) \cdots (s - p_m)} = 0$$

$$1 + K_1 \frac{\beta_{n-2}s^{n-2} + \beta_{n-3}s^{n-3} + \cdots}{s^n - \sum_{i=1}^n p_i s^{n-1} + \alpha_{n-2}s^{n-2} + \cdots} = 0, \quad \beta_{n-2} = \begin{cases} 0 & \text{se } \rho > 2 \\ 1 & \text{se } \rho = 2 \end{cases}$$

$$s^n + \left(-\sum_{i=1}^n p_i \right) s^{n-1} + \alpha_{n-2}s^{n-2} + \cdots + K_1\beta_{n-2}s^{n-2} + K_1\beta_{n-3}s^{n-3} + \cdots = 0$$

$$s^n + \left(-\sum_{i=1}^n p_i \right) s^{n-1} + (\alpha_{n-2} + K_1\beta_{n-2})s^{n-2} + \cdots = (s - p_{C1})(s - p_{C2}) \cdots (s - p_{Cn})$$

$$s^n + \left(-\sum_{i=1}^n p_i \right) s^{n-1} + (\alpha_{n-2} + K_1\beta_{n-2})s^{n-2} + \cdots = s^n + \left(-\sum_{i=1}^n p_{Ci} \right) s^{n-1} + \cdots$$

dal principio di identità dei polinomi $\Rightarrow -\sum_{i=1}^n p_i = -\sum_{i=1}^n p_{Ci} \quad \square$

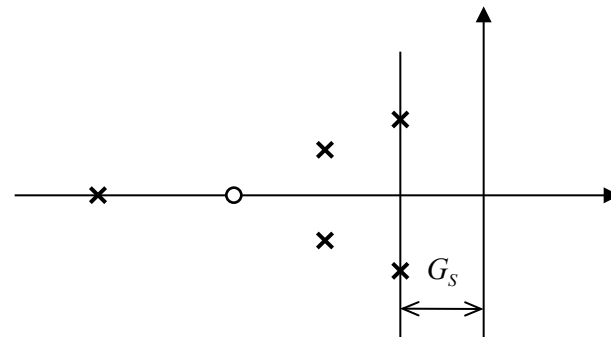
Grado di stabilità

Sia dato un sistema Σ asintoticamente stabile ($\text{Re } p_i < 0, i = 1, \dots, n$;
dove i p_i sono i poli di Σ):

Def.: Si definisce **grado di stabilità** di Σ (nel piano complesso)

$$G_s := -\max \{ \text{Re } p_1, \text{Re } p_2, \dots, \text{Re } p_n \}$$

È la distanza minima dei poli di Σ
dall'asse immaginario.



Nell'ipotesi che fra i poli di Σ esista una coppia dominante vale

approssimativamente: $T_a \approx \frac{3}{G_s}$



Punti salienti della lezione:

- Le 7 proprietà per il tracciamento del luogo
- L'equazione per calcolare le radici doppie del luogo
- La regola per il tracciamento dell'arco di circonferenza nei luoghi del secondo ordine
- Riscrittura dell'equazione caratteristica per tracciare il contorno del luogo
- Il teorema del baricentro
- Il grado di stabilità di un sistema dinamico