

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica, Elettronica e delle
Telecomunicazioni

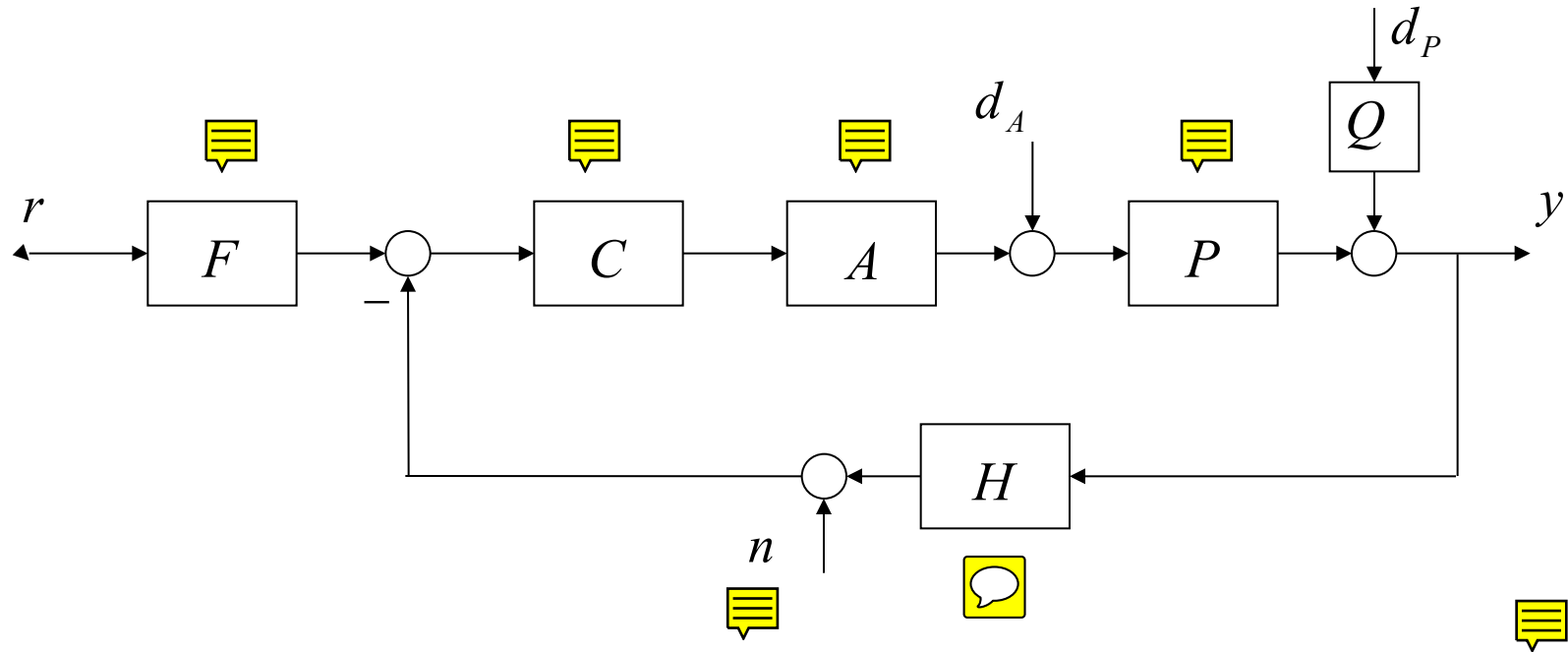
Lezione n. 14 di Fondamenti di Controlli Automatici
prof. Aurelio Piazzì

Il progetto di un sistema di controllo in retroazione – Parte I

Università degli Studi di Parma – a.a. 2014-2015

- Il progetto di un sistema di controllo in retroazione
- La sintesi con controllori di struttura prefissata
- La rete ritardatrice
- La rete anticipatrice

Struttura di un sistema di controllo in retroazione a singolo anello



I requisiti per il sistema di controllo riguardano:

0. **Buona connessione;**
1. **Stabilità asintotica interna;**
2. **Prestazioni statiche e/o asintotiche;**
3. **Prestazioni dinamiche;** 
4. **Robustezza.** 

Questi requisiti devono essere soddisfatti nelle condizioni nominali ma anche in condizioni perturbate.

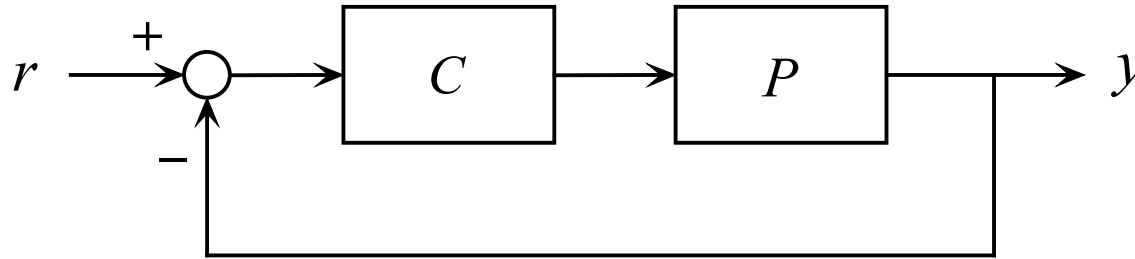
I requisiti vengono imposti mediante le specifiche di progetto. Lo studio della compatibilità di queste è un aspetto imprescindibile del progetto.

Esempi: $M_A \geq 3$, $M_F \geq 40^\circ$,

$e_r \leq 0,05$ (in risposta a $1(t)$), $T_A \leq 0,2$ s , $S \leq 20\%$

$|T_{dpy}(j\omega)| \leq \bar{T}_{dpy} \quad \forall \omega \in [\omega_1, \omega_2]$

$\max M_F$,  $\min T_A$



Proprietà

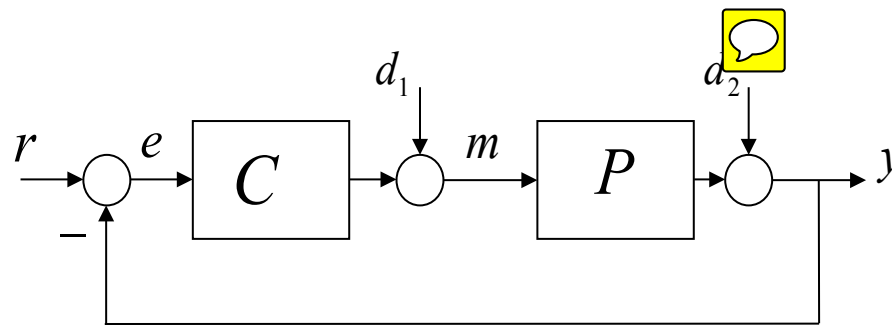
Sia $P(s)$ strettamente propria e $C(s)$ propria. Allora il sistema retroazionato è ben connesso.

Dim.:

Sia $L(s) := C(s)P(s)$ il guadagno di anello.

$$\lim_{|s| \rightarrow +\infty} 1 + L(s) = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{|s| \rightarrow +\infty} 1 + L(s) \neq 0 \text{ (sistema retroazionato ben connesso)} \quad \square$$



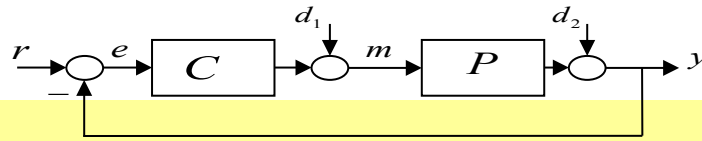
Def. (Stabilità asintotica interna)

Il sistema retroazionato di figura è **asintoticamente ed internamente stabile** quando tutte le f.d.t. fra gli ingressi $\{r, d_1, d_2\}$ e le uscite $\{e, m, y\}$ sono asintoticamente stabili.

Esempio: $C(s) = \frac{s-1}{s+1}$, $P(s) = \frac{1}{(s-1)(s+10)}$

$$T_{ry}(s) = \frac{C(s)P(s)}{1 + C(s)P(s)} = \frac{1}{(s+1)(s+10)+1} \quad \text{è asintoticamente stabile}$$

$$T_{d_1y}(s) = \frac{P(s)}{1 + C(s)P(s)} = \frac{\frac{1}{(s-1)(s+10)}}{1 + \frac{s-1}{s+1} \cdot \frac{1}{(s-1)(s+10)}} = \frac{s+1}{(s-1)[(s+1)(s+10)+1]} \quad \text{è instabile}$$



Proprietà

Il sistema retroazionato è stabile asintoticamente ed internamente se e solo se:

1. le radici dell'eq. $1 + L(s) = 0$ sono tutte a parte reale negativa;
2. le eventuali cancellazioni polo-zero fra $C(s)$ e $P(s)$ avvengono in $\mathbb{C}_-$.

Dim.

$$\begin{bmatrix} E \\ M \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1+CP} & -\frac{P}{1+CP} & -\frac{1}{1+CP} \\ \frac{C}{1+CP} & \frac{1}{1+CP} & -\frac{C}{1+CP} \\ \frac{CP}{1+CP} & \frac{P}{1+CP} & \frac{1}{1+CP} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R \\ D_1 \\ D_2 \end{bmatrix}, \quad C(s) = \frac{y(s)(s-\beta)}{x(s)(s-\alpha)}, \quad P(s) = \frac{b(s)(s-\alpha)}{a(s)(s-\beta)}$$

$$\frac{1}{1+CP} = \frac{1}{1 + \frac{y(s)}{x(s)} \cdot \frac{b(s)}{a(s)}} = \frac{x(s)a(s)}{x(s)a(s) + y(s)b(s)}, \quad \frac{CP}{1+CP} = \frac{y(s)b(s)}{x(s)a(s) + y(s)b(s)},$$

$$\frac{P}{1+CP} = \frac{\frac{b(s)(s-\alpha)}{\cancel{a(s)}(s-\beta)}}{\frac{x(s)a(s) + y(s)b(s)}{x(s)\cancel{a(s)}}} = \frac{b(s)(s-\alpha)x(s)}{(s-\beta)(x(s)a(s) + y(s)b(s))}, \quad (\text{cont.})$$

$$C(s) = \frac{y(s)(s - \beta)}{x(s)(s - \alpha)}, \quad P(s) = \frac{b(s)(s - \alpha)}{a(s)(s - \beta)}$$

Dim. (cont.)

$$\frac{\textcolor{red}{C}}{1 + \textcolor{red}{CP}} = \frac{\frac{y(s)(s - \beta)}{\cancel{x(s)}(s - \alpha)}}{\frac{x(s)a(s) + y(s)b(s)}{\cancel{x(s)}a(s)}} = \frac{y(s)(s - \beta)a(s)}{(s - \alpha)(x(s)a(s) + y(s)b(s))}$$

$$1 + L(s) = 0 \Leftrightarrow x(s)a(s) + y(s)b(s) = 0$$

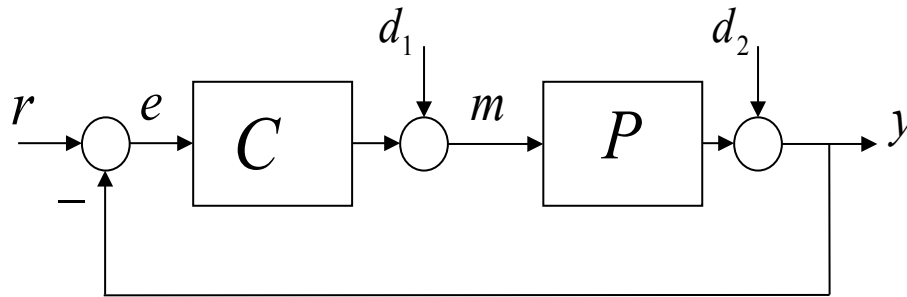
necessità :

$$\left\{ \frac{1}{1 + CP}, \frac{CP}{1 + CP}, \frac{P}{1 + CP}, \frac{C}{1 + CP} \text{ asint. stabili} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{1.} \ 1 + L(s) = 0 \text{ ha radici } s \text{ con } \operatorname{Re}(s) < 0 \\ \mathbf{2.} \text{ le cancellazioni avvengono in } \mathbb{C}_- \end{array} \right\}$$

sufficienza :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{1.} \ 1 + L(s) = 0 \text{ ha radici } s \text{ con } \operatorname{Re}(s) < 0 \\ \mathbf{2.} \text{ le cancellazioni avvengono in } \mathbb{C}_- \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \frac{1}{1 + CP}, \frac{CP}{1 + CP}, \frac{P}{1 + CP}, \frac{C}{1 + CP} \text{ asint. stabili} \right\}$$

□



$$T_{re}(s) = \frac{1}{1 + L(s)} \quad \text{funzione di sensitività (spesso indicata con } S)$$

$$T := 1 - S \quad \text{funzione di sensitività complementare} \Rightarrow T(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)}$$

Si noti che $T_{ry}(s) = T(s)$

Spesso nei progetti con prevalenti specifiche in frequenza vengono imposti disgiuntamente vincoli su S e T ovvero su $S(j\omega)$ e $T(j\omega)$.

Quando questo accade un problema di compatibilità emerge in quanto deve valere

$$S(j\omega) + T(j\omega) = 1 \quad \forall \omega$$

La sintesi con controllori di struttura prefissata

Nella letteratura tecnica c'è una moltitudine di approcci e metodi per la sintesi di controllori. La natura introduttiva di questo corso suggerisce di seguire l'approccio con controllori di struttura prefissata o di ordine prefissato. I metodi di sintesi proposti sono di necessità vari (e spesso *ad hoc*) in quanto dipendono dalla struttura di controllore scelta e dalle specifiche assegnate.

Vantaggi: flessibilità (e semplicità).

Svantaggi: iterazioni delle procedure di sintesi.

Controllori di ordine prefissato

Controllore di ordine zero:

$$\mathcal{C}_0 := \{C \in \mathcal{R}_p : C(s) = K, K \in \mathbb{R}\}; \quad \mathcal{R}_p := \{\text{insieme delle f. razionali proprie}\}$$

Controllore di ordine uno:

$$\mathcal{C}_1 := \left\{ C \in \mathcal{R}_p : C(s) = \frac{b_1 s + b_0}{s + a_0}, a_0, b_0, b_1 \in \mathbb{R} \right\}$$

Controllore di ordine due:

$$\mathcal{C}_2 := \left\{ C \in \mathcal{R}_p : C(s) = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0}, a_0, a_1, b_0, b_1, b_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

... ..

Controllore di ordine n :

$$\mathcal{C}_n := \left\{ C \in \mathcal{R}_p : C(s) = \frac{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}, a_0, \dots, a_{n-1}, b_0, \dots, b_n \in \mathbb{R} \right\}$$

Controllori di struttura prefissata

I controllori di struttura prefissata sono definiti mediante particolari parametrizzazioni della funzione di trasferimento del controllore.

Esempi:

$$\mathcal{C}_A := \left\{ C \in \mathcal{R}_p : C(s) = \gamma \frac{s + \beta}{s + \alpha}, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{Si osservi } \mathcal{C}_A \neq \mathcal{C}_1 \text{ e } \mathcal{C}_A \subset \mathcal{C}_1$$

$$\mathcal{C}_B := \left\{ C \in \mathcal{R}_p : C(s) = \gamma \frac{s + \beta}{s + \alpha}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+, \gamma \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{Si osservi } \mathcal{C}_B \neq \mathcal{C}_A \text{ e } \mathcal{C}_B \subset \mathcal{C}_A$$

$$\mathcal{C}_C := \left\{ C \in \mathcal{R}_p : C(s) = \gamma \frac{s + \beta}{s + \alpha}, \alpha \in [10, 100], \beta \in (0, 10], \gamma \in \mathbb{R}_+ \right\} \Rightarrow \mathcal{C}_C \subset \mathcal{C}_B$$

$$\mathcal{C}_D := \left\{ C \in \mathcal{R}_p : C(s) = \gamma \frac{1}{s + \alpha}, \alpha \in [10, 100], \gamma \in \mathbb{R}_+ \right\} \Rightarrow \mathcal{C}_D \neq \mathcal{C}_C \text{ e } \mathcal{C}_D \cap \mathcal{C}_C = \emptyset$$

... eccetera

Fra i controllori a struttura fissa (o prefissata) si individuano due classi tradizionali:

1. **le reti correttrici;**
2. **i regolatori standard.** PID

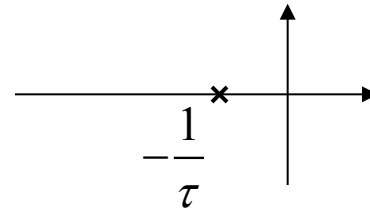
Le reti correttrici sono i più semplici controllori utilizzati nel progetto dei sistemi di controllo. Nell'approccio tradizionale questi vengono progettati per “correggere” il comportamento dinamico dell'anello di retroazione.

I regolatori standard caratterizzati dalla **combinazione delle azioni proporzionale, derivativa e integrale**  vengono implementati su dispositivi (standard) adattabili a classe estese di applicazioni e per i quali è possibile il tuning diretto dei parametri di progetto anche in condizioni operative. Rivestono una grande importanza nell'automazione industriale con svariatissime applicazioni da quelle meccatroniche al controllo di processo.

Le principali reti correttrici

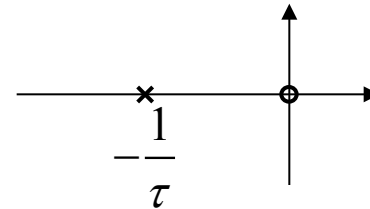
Rete integratrice:

$$C_r(s) = \frac{1}{1 + \tau s}, \quad \tau > 0$$



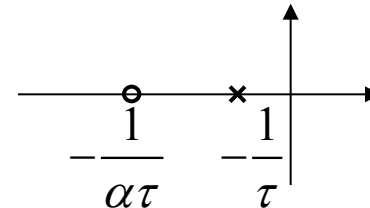
Rete derivatrice:

$$C_r(s) = \frac{\tau s}{1 + \tau s}, \quad \tau > 0$$



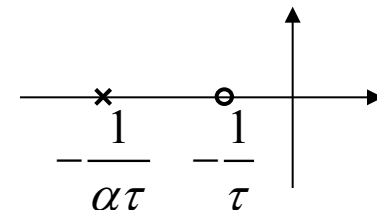
Rete ritardatrice: 

$$C_r(s) = \frac{1 + \alpha \tau s}{1 + \tau s}, \quad \tau > 0, \quad \alpha \in (0, 1)$$



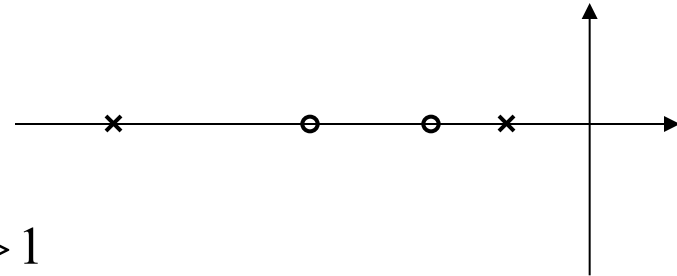
Rete anticipatrice:

$$C_r(s) = \frac{1 + \tau s}{1 + \alpha \tau s}, \quad \tau > 0, \quad \alpha \in (0, 1)$$



Rete a ritardo e anticipo:

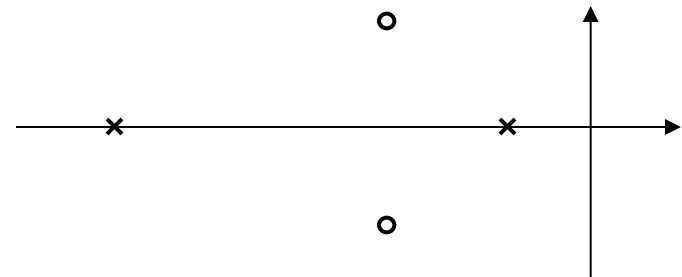
$$C_r(s) = \frac{1 + 2\delta' \frac{s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}}{1 + 2\delta \frac{s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}}, \quad \omega_n > 0, \delta > \delta' > 1$$



Rete a T ponticellato:

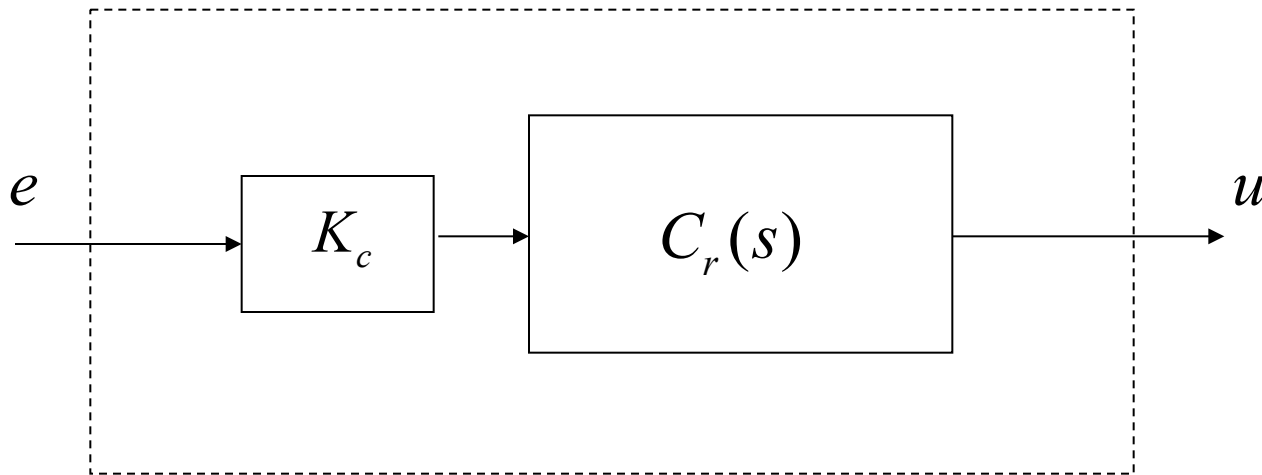
$$C_r(s) = \frac{1 + 2\delta' \frac{s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}}{1 + 2\delta \frac{s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}}, \quad \omega_n > 0, \delta > 1, \delta' > 0$$

generalmente $\delta' \in (0,1)$



Struttura del controllore con rete correttiva

$$C(s) = K_c C_r(s), \quad K_c \in \mathbb{R}$$



I regolatori standard

Regolatore **proporzionale** (P):

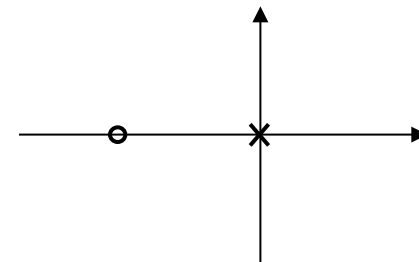
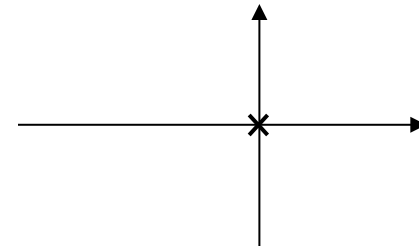
$$R(s) = K_p$$

Regolatore **integrale** (I):

$$R(s) = \frac{K_p}{T_i s}$$

Regolatore **proporzionale - integrale** (PI):

$$R(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right) = K_p \cdot \frac{1 + T_i s}{T_i s}$$



Regolatore **proporzionale - derivativo** (PD):

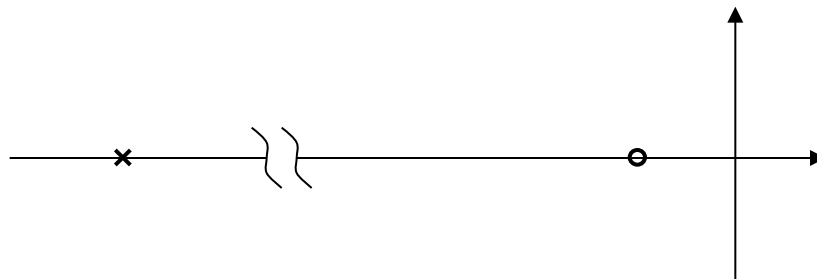
$$R(s) = K_p (1 + T_d s)$$

in realtà

$$R(s) = K_p \left(1 + \frac{T_d s}{1 + \tau s} \right) \quad \text{dove } \tau \ll T_d$$

$$R(s) = K_p \cdot \frac{1 + \tau s + T_d s}{1 + \tau s} \cong K_p \cdot \frac{1 + T_d s}{1 + \tau s}$$

è sostanzialmente una rete anticipatrice ...



Regolatore **proporzionale - integrale - derivativo** (PID):

$$R(s) = K_p \left(1 + T_d s + \frac{1}{T_i s} \right)$$

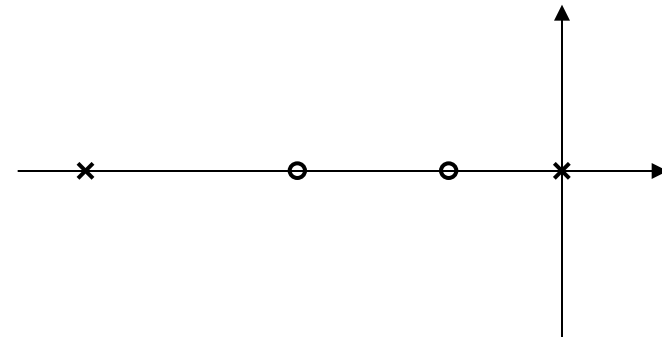
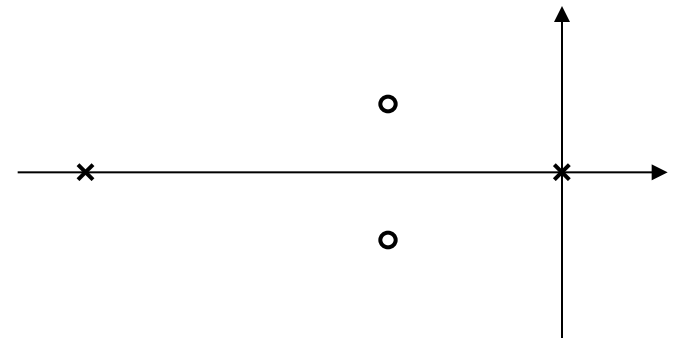
in realtà

$$R(s) = K_p \left(1 + \frac{T_d s}{1 + \tau s} + \frac{1}{T_i s} \right) \quad \text{dove } \tau \ll T_d, T_i$$

$$R(s) = K_p \cdot \frac{(\tau + T_d) T_i s^2 + (\tau + T_i) s + 1}{T_i s (1 + \tau s)}$$

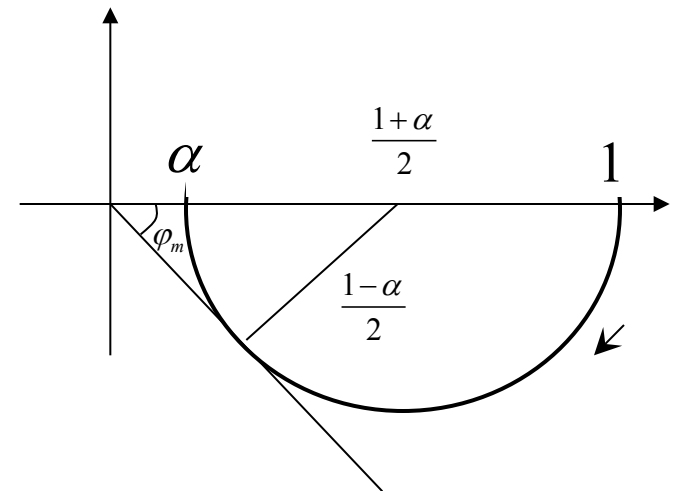
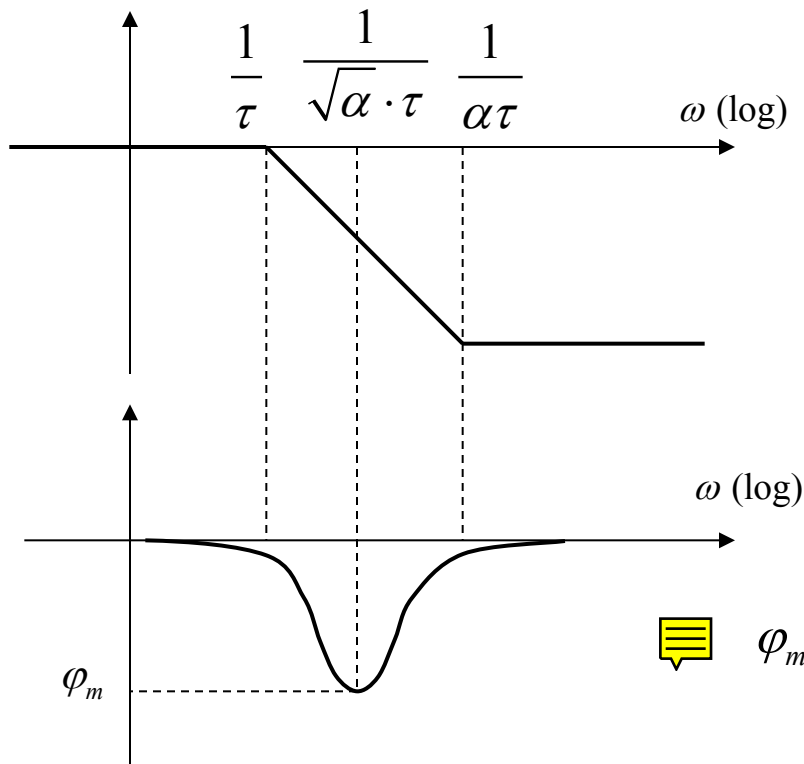
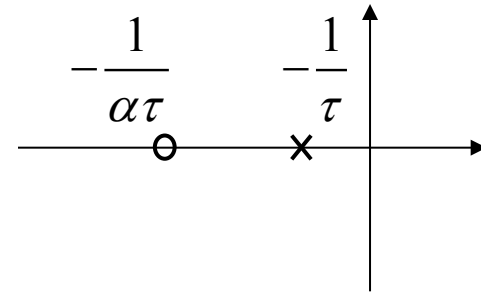
$$\cong K_p \cdot \frac{T_d T_i s^2 + T_i s + 1}{T_i s (1 + \tau s)}$$

Possiamo assegnare arbitrariamente
zeri e costante di trasferimento di $R(s)$



La rete ritardatrice

$$C_r(s) = \frac{1 + \alpha\tau s}{1 + \tau s}; \quad C_r(j\omega) = \frac{1 + \alpha\tau j\omega}{1 + \tau j\omega}$$

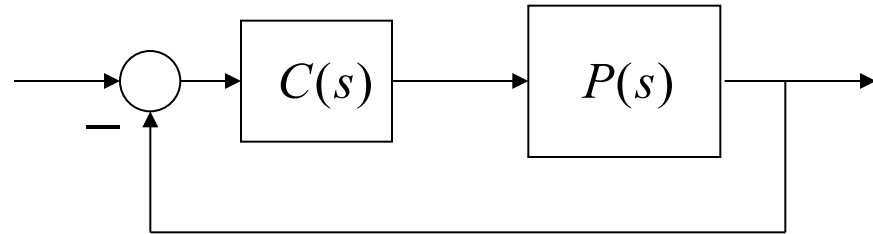


$\varphi_m = -\arcsin \frac{1-\alpha}{1+\alpha}$

$\varphi_m = \arg C_r(j\omega_m) \quad \text{dove} \quad \omega_m := \frac{1}{\sqrt{\alpha \cdot \tau}}$

Azione compensatrice della rete ritardatrice

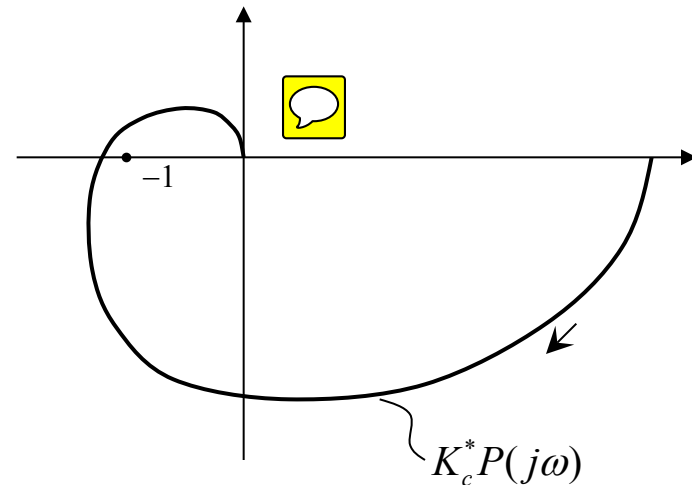
Sia $P(s)$ asint. stabile e a fase minima.



1° fase: Scegliamo un controllore proporzionale $C(s) = K_c > 0$



Progettiamo $K_c > 0$ al fine di assicurare una specifica di precisione. Sia $C(s) = K_c^*$ ed il guadagno di anello abbia il diagramma polare di figura: il sistema retroazionato risulta instabile.

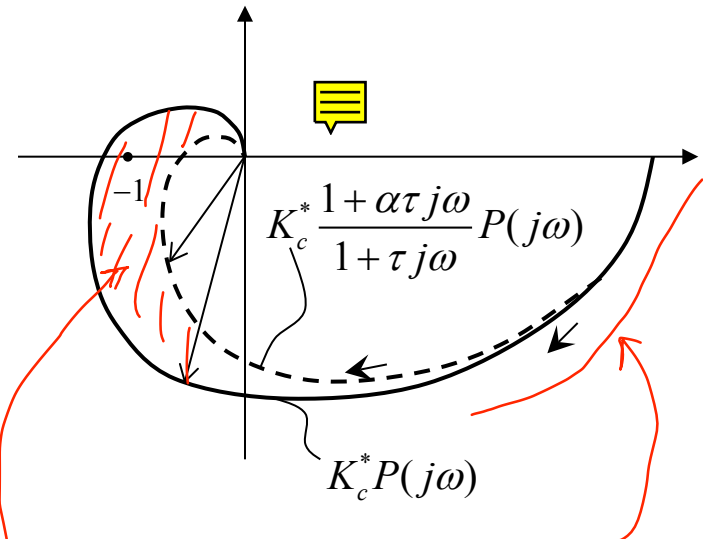


2° fase: Scegliamo $C(s) = K_c^* C_r(s) = K_c^* \frac{1 + \alpha \tau s}{1 + \tau s}$

Progettiamo α e τ per assicurare la stabilità asintotica con un buon margine di ampiezza e/o di fase.

Metodi di progetto della rete rit.:

1. grafici (obsoleti);
2. per tentativi o metodi *ad hoc*;
3. con le formule di inversione.

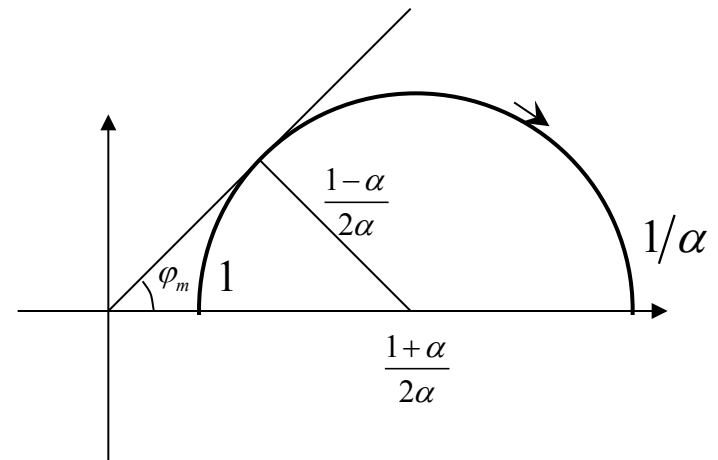
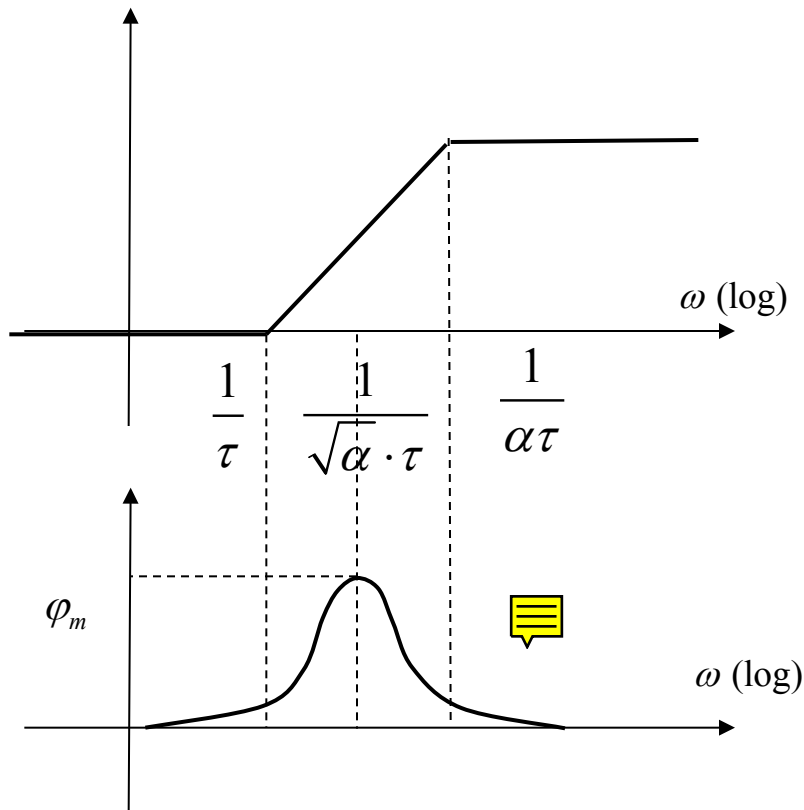
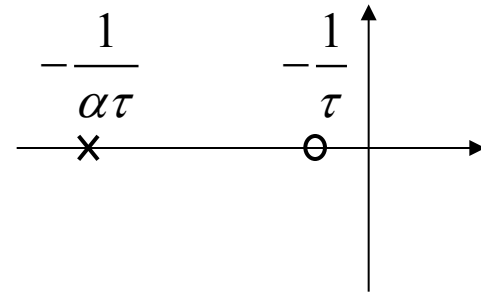


Vantaggi: il guadagno di anello si mantiene elevato alle basse frequenze (buone prestazioni statiche).

Svantaggi: riduzione della banda passante del g.d.a. $\Rightarrow$ riduzione della banda passante di $T_{ry}(j\omega)$ (scarse prestazioni dinamiche).

La rete anticipatrice

$$C_r(s) = \frac{1 + \tau s}{1 + \alpha \tau s}; \quad C_r(j\omega) = \frac{1 + \tau j\omega}{1 + \alpha \tau j\omega}$$

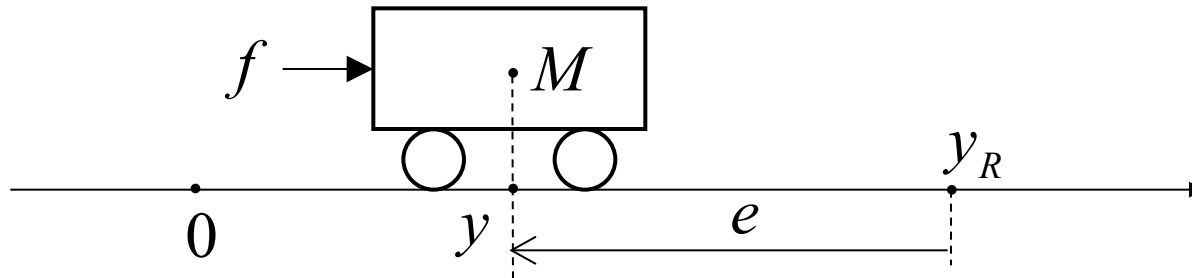


$$\varphi_m = \arcsin \frac{1-\alpha}{1+\alpha}$$

$$\varphi_m = \arg C_r(j\omega_m) \quad \text{dove} \quad \omega_m := \frac{1}{\sqrt{\alpha} \cdot \tau}$$

Azione compensatrice della rete anticipatrice

Esempio: spostamento di un carrello su rotaia.



1° strategia: applicazione di una forza proporzionale all'errore di posizione $e = y_R - y$: $f = K_c e$.

Esito: in assenza di attriti il carrello **oscilla indefinitamente.**

Perché?

$$C(s) = K_c$$

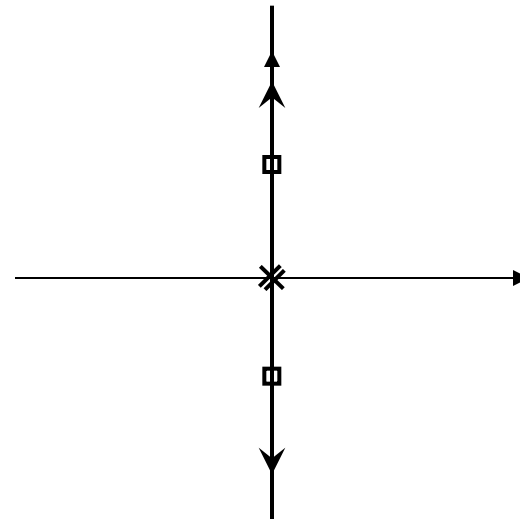
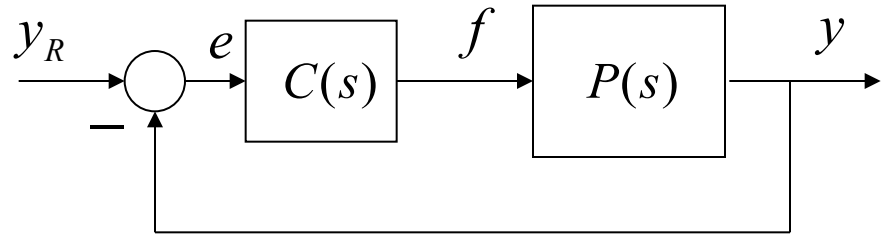
Determinazione di $P(s)$:

$$M \frac{dy}{dt^2} = f \quad \Rightarrow \quad P(s) = \frac{1}{Ms^2}$$

Eq. caratteristica:

$$1 + K_c \cdot \overbrace{\frac{1}{Ms^2}}^{L(s)} = 0$$

$$\text{quindi } 1 + K_1 \frac{1}{s^2} = 0 \quad \text{con } K_1 := \frac{K_c}{M}$$



Come modificare la strategia di controllo per stabilizzare il carrello sulla posizione desiderata y_R ?

2° strategia: Si modifica la strategia precedente sommando un termine proporzionale alla derivata dell'errore:

$$f = K_c e + K'_c \frac{de}{dt}$$

Lo scopo è quello di anticipare il cambio di segno della forza f prima che l'errore e sia azzerato ... ottenendo un effetto di smorzamento ...

Analisi della nuova strategia:

$$f = K_c \left(e + \tau \frac{de}{dt} \right); \quad \tau := \frac{K_c'}{K_c}$$

passando alle trasformate

$$F(s) = K_c (1 + \tau s) E(s)$$

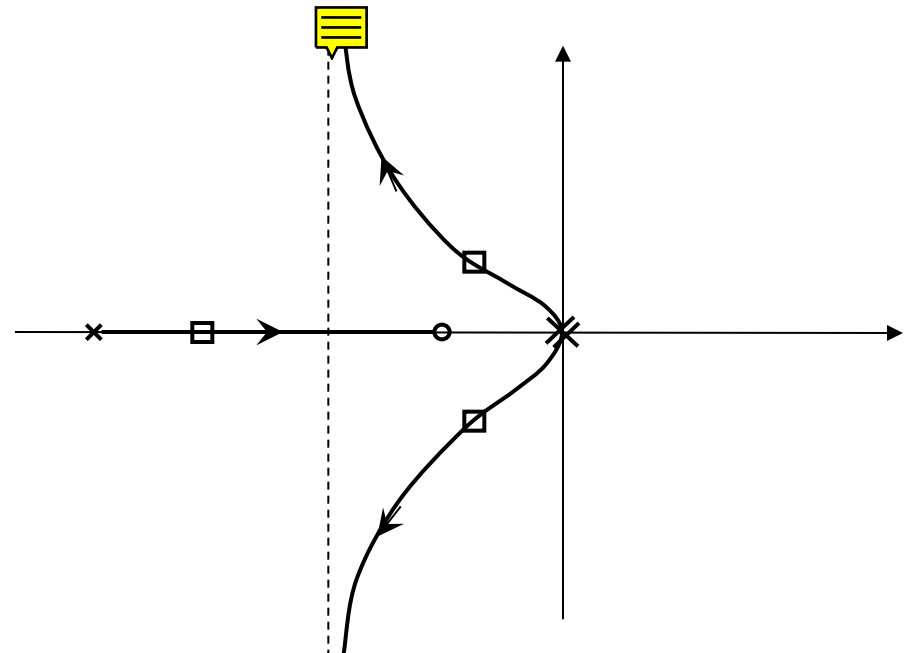
meglio $F(s) = K_c \left(1 + \frac{\tau s}{1 + \alpha \tau s} \right) E(s)$ con $\alpha \in (0,1)$

$$F(s) = K_c \frac{1 + \alpha \tau s + \tau s}{1 + \alpha \tau s} E(s)$$

$$F(s) \cong K_c \frac{1 + \tau s}{1 + \alpha \tau s} E(s) \quad \text{se } \alpha \ll 1$$

$$\Rightarrow C(s) = K_c C_r(s), \quad C_r(s) = \frac{1 + \tau s}{1 + \alpha \tau s}$$

$C_r(s)$ è la rete anticipatrice



Vantaggi della rete anticipatrice:

1. Mantenimento delle prestazioni statiche (come la rete ritardatrice).
2. Stabilizzazione con allargamento della banda passante del guadagno di anello e quindi allargamento della banda passante di $T_{ry}(j\omega)$: aumento del grado di stabilità G_S , diminuzione del tempo di assestamento T_a , migliori capacità di inseguimento di segnale.

Svantaggi della rete anticipatrice: possibile introduzione di rumore (il parametro α non può essere scelto troppo piccolo ...)

Metodi di progetto della rete rit.:

1. grafici (obsoleti);
2. per tentativi o metodi *ad hoc*;
3. con le formule di inversione.
4. con cancellazione polo-zero.

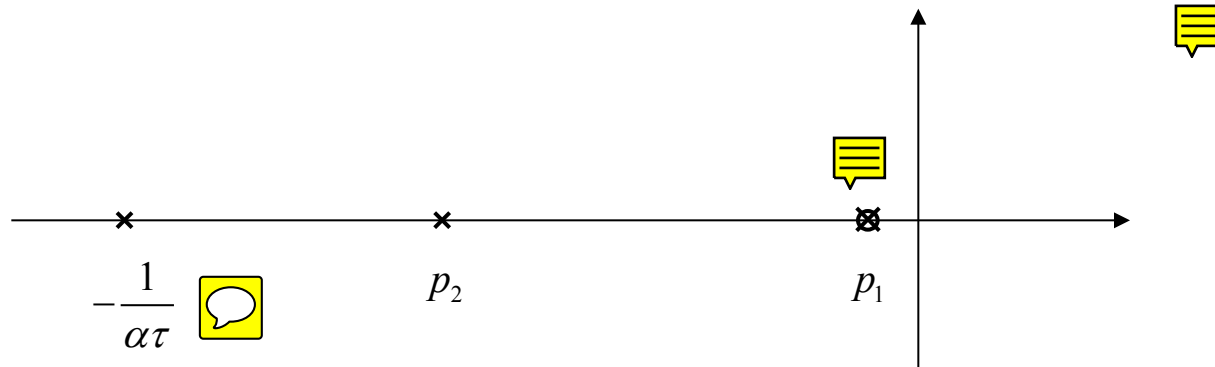
Sintesi della rete anticipatrice per cancellazione polo-zero

Si sceglie quale zero della rete il polo reale negativo di $P(s)$ più vicino all'asse immaginario determinando così nella funzione di trasferimento di catena diretta una cancellazione polo-zero (ammissibile).

Esempio:

$$P(s) = \frac{1}{(s - p_1)(s - p_2)}, \quad p_1, p_2 \in \mathbb{R}_- \quad \text{con } p_2 < p_1$$

$$C_r(s) = \frac{1 + \tau s}{1 + \alpha \tau s} \quad \text{si impone } -\frac{1}{\tau} = p_1 \Rightarrow \tau = -\frac{1}{p_1} \Rightarrow C_r(s)P(s) = \frac{\tau}{(1 + \alpha \tau s)(s - p_2)}$$



Punti salienti della lezione:

- La stabilità asintotica interna
- Controllori di ordine prefissato/di struttura prefissata
- Le reti correttrici
- I regolatori standard (regolatori PID)
- L'azione corretttrice della rete ritardatrice sul diagramma di Nyquist
- L'azione corretttrice della rete anticipatrice sul luogo delle radici
- Sintesi della rete anticipatrice per cancellazione polo-zero