

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica, Elettronica e delle
Telecomunicazioni

Lezione n. 15 di Fondamenti di Controlli Automatici
prof. Aurelio Piazzì

Il progetto di un sistema di controllo in retroazione – Parte II

Università degli Studi di Parma – a.a. 2014-2015

- Sintesi in frequenza con le formule di inversione
- La rete a ritardo e anticipo e la rete a T
- La sintesi con l'equazione Diofantea
- Conclusioni

Sintesi in frequenza con le formule di inversione

La sintesi in frequenza delle reti ritardatrice e anticipatrice con imposizione di margini di stabilità prestabiliti può essere svolta utilizzando le funzioni inverse delle stesse reti.

Interpretiamo la risposta armonica della rete anticipatrice

$$\frac{1 + j\tau\omega}{1 + j\alpha\tau\omega}$$

quale funzione $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(\alpha, \tau\omega) \rightarrow (M, \varphi)$ dove $\mathcal{D} := (0, 1) \times (0, +\infty)$ e

$$\text{☐} \quad M = \frac{\sqrt{1 + (\tau\omega)^2}}{\sqrt{1 + (\alpha\tau\omega)^2}}, \quad \varphi = \arctan(\tau\omega) - \arctan(\alpha\tau\omega)$$

La definizione implica che $Me^{j\varphi} = \frac{1 + j\tau\omega}{1 + j\alpha\tau\omega}$. ☐

$$f(\alpha, \tau\omega) = (M, \varphi), \quad M = \left| \frac{1 + j\tau\omega}{1 + j\alpha\tau\omega} \right|, \quad \varphi = \arctan(\tau\omega) - \arctan(\alpha\tau\omega)$$

Si vuole provare che la funzione $f : \mathcal{D} \rightarrow f(\mathcal{D})$ è invertibile (o biiettiva) e determinare f^{-1} e $f(\mathcal{D})$.

$$\mathcal{D} = (0, 1) \times (0, +\infty) \Rightarrow f(\mathcal{D}) \subseteq (1, +\infty) \times \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{ovvero} \quad M > 1, \quad 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$$

Lemma

sostanzialmente

Siano M, φ, α, x valori reali con $M > 1$ e $\sin \varphi \neq 0$.

Allora le seguenti relazioni algebriche sono equivalenti:

$$\begin{aligned} 1. \quad & Me^{j\varphi} = \frac{1 + jx}{1 + j\alpha x} \\ 2. \quad & \begin{cases} \alpha = \frac{M \cos \varphi - 1}{M(M - \cos \varphi)} \\ x = \frac{M - \cos \varphi}{\sin \varphi} \end{cases} \end{aligned}$$

Dim.

$$M(\cos \varphi + j \sin \varphi) = \frac{1 + jx}{1 + j\alpha x}$$

$$M(\cos \varphi + j \sin \varphi)(1 + j\alpha x) = 1 + jx$$

$$M(\cos \varphi + j\alpha x \cos \varphi + j \sin \varphi - \alpha x \sin \varphi) = 1 + jx$$

$$M(\cos \varphi - \alpha x \sin \varphi) + jM(\alpha x \cos \varphi + \sin \varphi) = 1 + jx$$

$$\begin{cases} M \cos \varphi - M \alpha x \sin \varphi = 1 \\ M \alpha x \cos \varphi + M \sin \varphi = x \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha x = \frac{M \cos \varphi - 1}{M \sin \varphi} \\ x = M \sin \varphi + \frac{M \cos \varphi - 1}{\sin \varphi} \cos \varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha x = \frac{M \cos \varphi - 1}{M \sin \varphi} \\ x = \frac{M - \cos \varphi}{\sin \varphi} \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = \frac{M \cos \varphi - 1}{M \cancel{\sin \varphi}} \cdot \frac{\cancel{\sin \varphi}}{M - \cos \varphi} \\ x = \frac{M - \cos \varphi}{\sin \varphi} \end{cases}$$

□

Proposizione (formule di inversione)

La funzione $f : \mathcal{D} \rightarrow f(\mathcal{D})$ è biiettiva (o invertibile) e la sua funzione inversa $f^{-1} : f(\mathcal{D}) \rightarrow \mathcal{D}$, $(M, \varphi) \rightarrow (\alpha, \tau\omega)$ è definita da

$$\alpha = \frac{M \cos \varphi - 1}{M (M - \cos \varphi)}, \quad \tau\omega = \frac{M - \cos \varphi}{\sin \varphi}$$

Dim.:

1. $f : \mathcal{D} \rightarrow f(\mathcal{D})$ è suriettiva per la definizione data di codominio.
2. $f : \mathcal{D} \rightarrow f(\mathcal{D})$ è iniettiva. Sia $(M, \varphi) \in f(\mathcal{D})$, quindi $M > 1$, $\varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

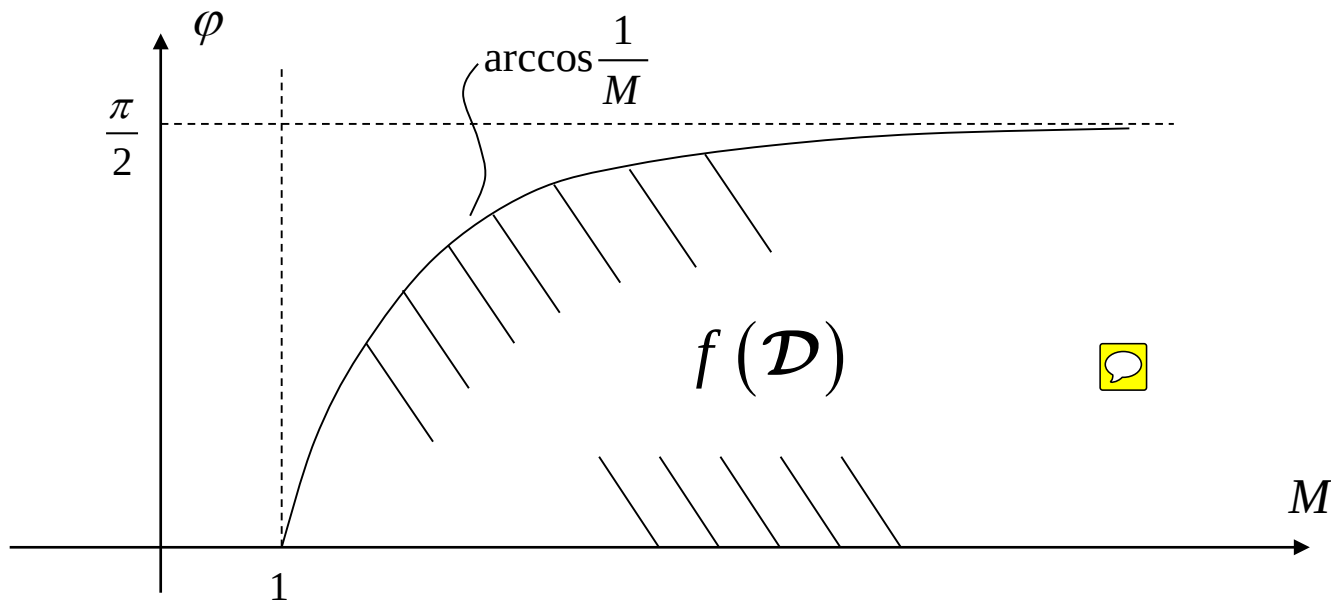
ed esistono $\alpha \in (0, 1)$, $\tau\omega > 0$ tali che $Me^{j\varphi} = \frac{1 + j\tau\omega}{1 + j\alpha\tau\omega}$.

Per il lemma precedente valgono $\alpha = \frac{M \cos \varphi - 1}{M (M - \cos \varphi)}$, $\tau\omega = \frac{M - \cos \varphi}{\sin \varphi}$ e

quindi questi valori sono gli unici per i quali $f(\alpha, \tau\omega) = (M, \varphi)$. $\square$

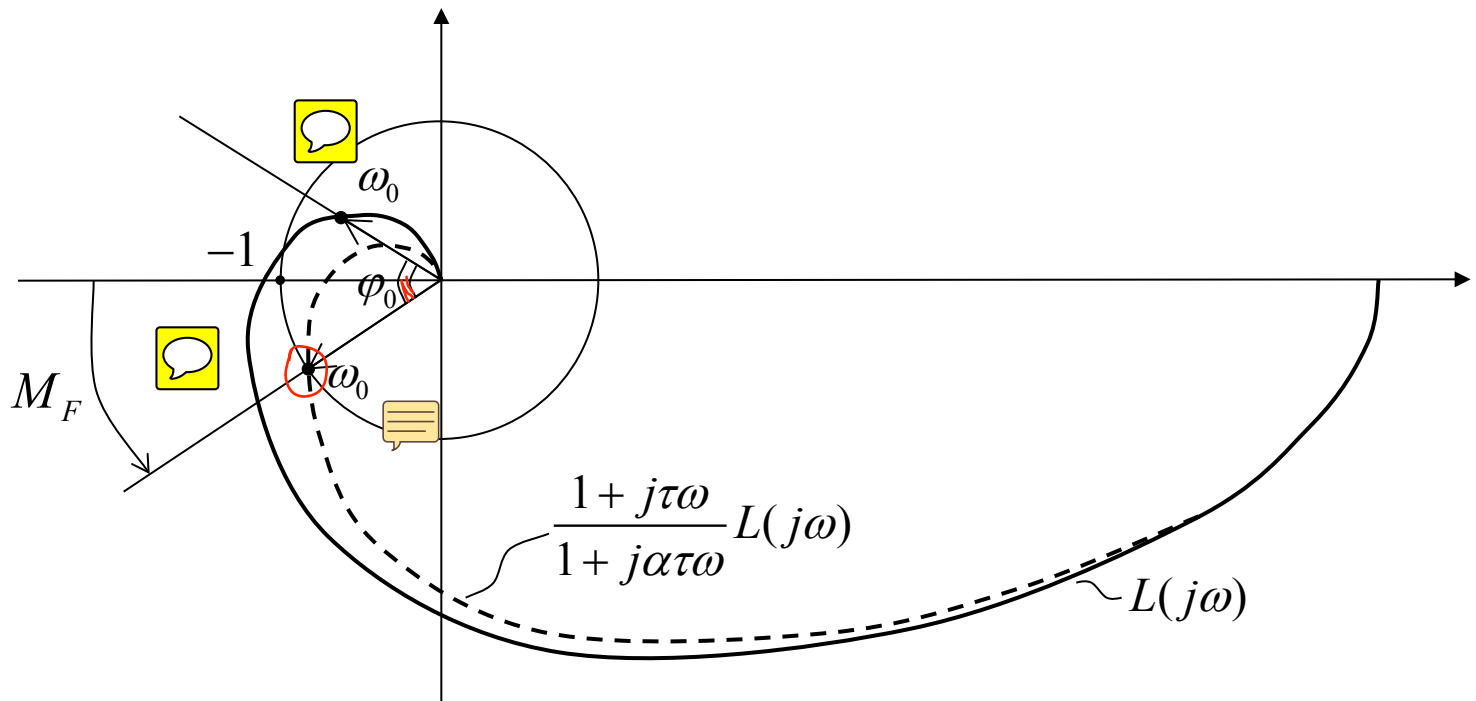
Proposizione

$$f(\mathcal{D}) = \left\{ (M, \varphi) \in (1, +\infty) \times \left(0, \frac{\pi}{2}\right) : \varphi < \arccos \frac{1}{M} \right\}$$



Sintesi della rete anticipatrice con imposizione del margine di fase M_F

$L(s)$ g.d.a. non compensato, $\frac{1+\tau s}{1+\alpha\tau s} L(s)$ g.d.a. compensato



Metodo di sintesi della rete anticipatrice:

1) Scegliere ω_0 affinché con $\varphi_0 := M_F - \arg L(j\omega_0) - \pi$

$$\text{valga } \left(\frac{1}{|L(j\omega_0)|}, \varphi_0 \right) \in \mathcal{C} \quad \text{quindi} \quad \cos \varphi_0 > |L(j\omega_0)|$$

???

2) Definiti $M := \frac{1}{|L(j\omega_0)|}$ e $\varphi := \varphi_0$

$$\text{segue } \tau = \frac{M - \cos \varphi}{\omega_0 \sin \varphi} \quad \text{e} \quad \alpha = \frac{M \cos \varphi - 1}{M(M - \cos \varphi)}$$



Infatti: le formule di inversione garantiscono che

$$\frac{1 + j\tau\omega_0}{1 + j\alpha\tau\omega_0} = Me^{j\varphi} \quad \text{quindi}$$

$$\frac{1 + j\tau\omega_0}{1 + j\alpha\tau\omega_0} L(j\omega_0) = \frac{1}{|L(j\omega_0)|} e^{j\varphi_0} \cdot |L(j\omega_0)| e^{j\arg L(j\omega_0)} = e^{j(\varphi_0 + \arg L(j\omega_0))} = e^{j(M_F - \pi)}$$

ω_0 è divenuta la pulsazione critica del g.d.a. compensato corrispondente ad un margine di fase pari a M_F .

Massimizzare il margine di fase nella sintesi della rete anticipatrice:

Fissata una pulsazione ω_0 , l'estremo superiore dell'insieme degli anticipi φ_0 ammissibili è dato da $\arccos|L(j\omega_0)|$ (questo valore di φ_0 corrisponde ad $\alpha = 0$, ovvero ad una rete proporzionale-derivativa). Con questo valore il margine di fase corrispondente nel g.d.a. compensato è

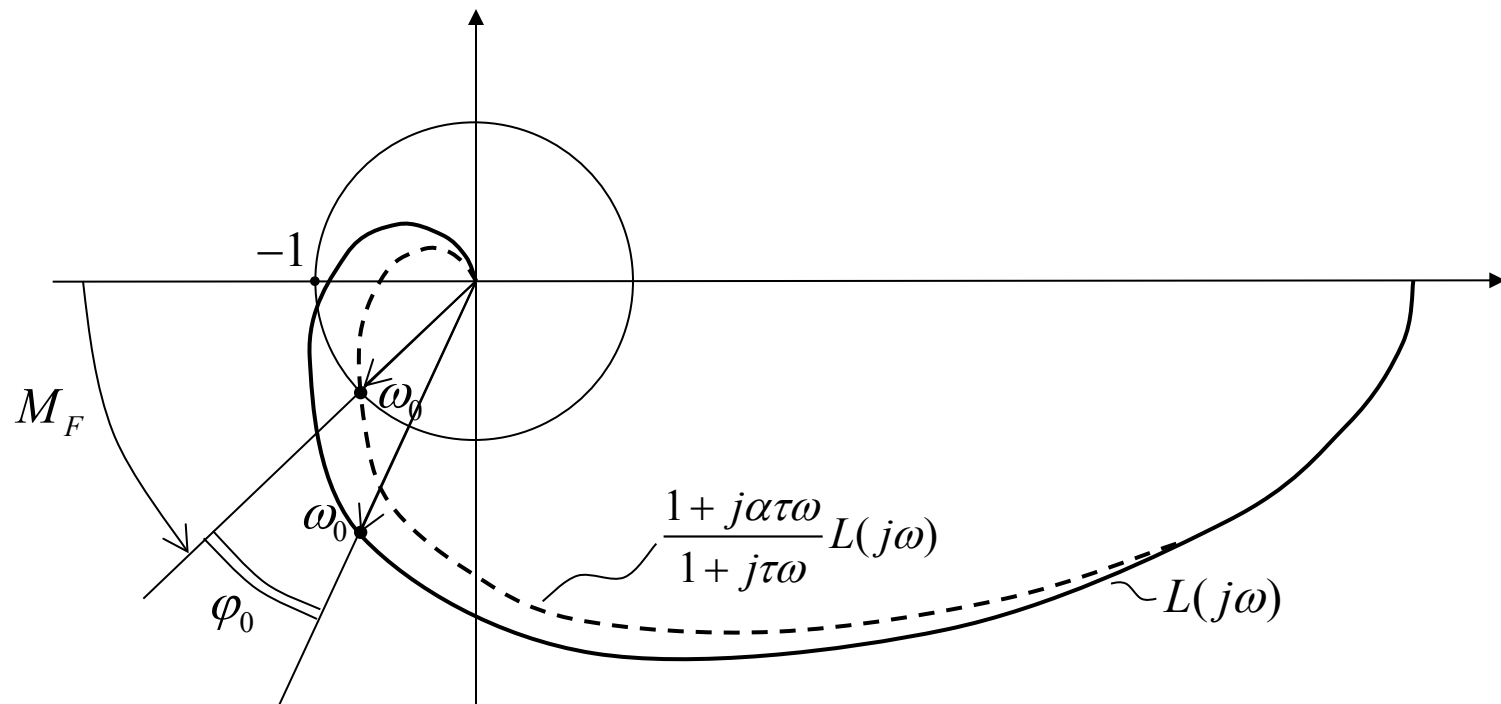
$$M_F(\omega_0) = \pi + \arg L(j\omega_0) + \arccos|L(j\omega_0)|$$

Conseguentemente l'estremo superiore dei margini di fase ottenibili con una rete anticipatrice è

$$\max_{\omega_0 > \omega_C} \left\{ \pi + \arg L(j\omega_0) + \arccos|L(j\omega_0)| \right\}$$

con ω_C pulsazione critica di $L(j\omega)$.

Sintesi della rete ritardatrice con imposizione del margine di fase M_F



Metodo di sintesi della rete ritardatrice:

- 1) Scegliere ω_0 affinché con $\varphi_0 := \arg L(j\omega_0) + \pi - M_F$
valga $(|L(j\omega_0)|, \varphi_0) \in \mathcal{C}$ quindi $\cos \varphi_0 > \frac{1}{|L(j\omega_0)|}$
- 2) Definiti $M := |L(j\omega_0)|$ e $\varphi := \varphi_0$
segue $\tau = \frac{M - \cos \varphi}{\omega_0 \sin \varphi}$ e $\alpha = \frac{M \cos \varphi - 1}{M(M - \cos \varphi)}$

Infatti: le formule di inversione garantiscono che

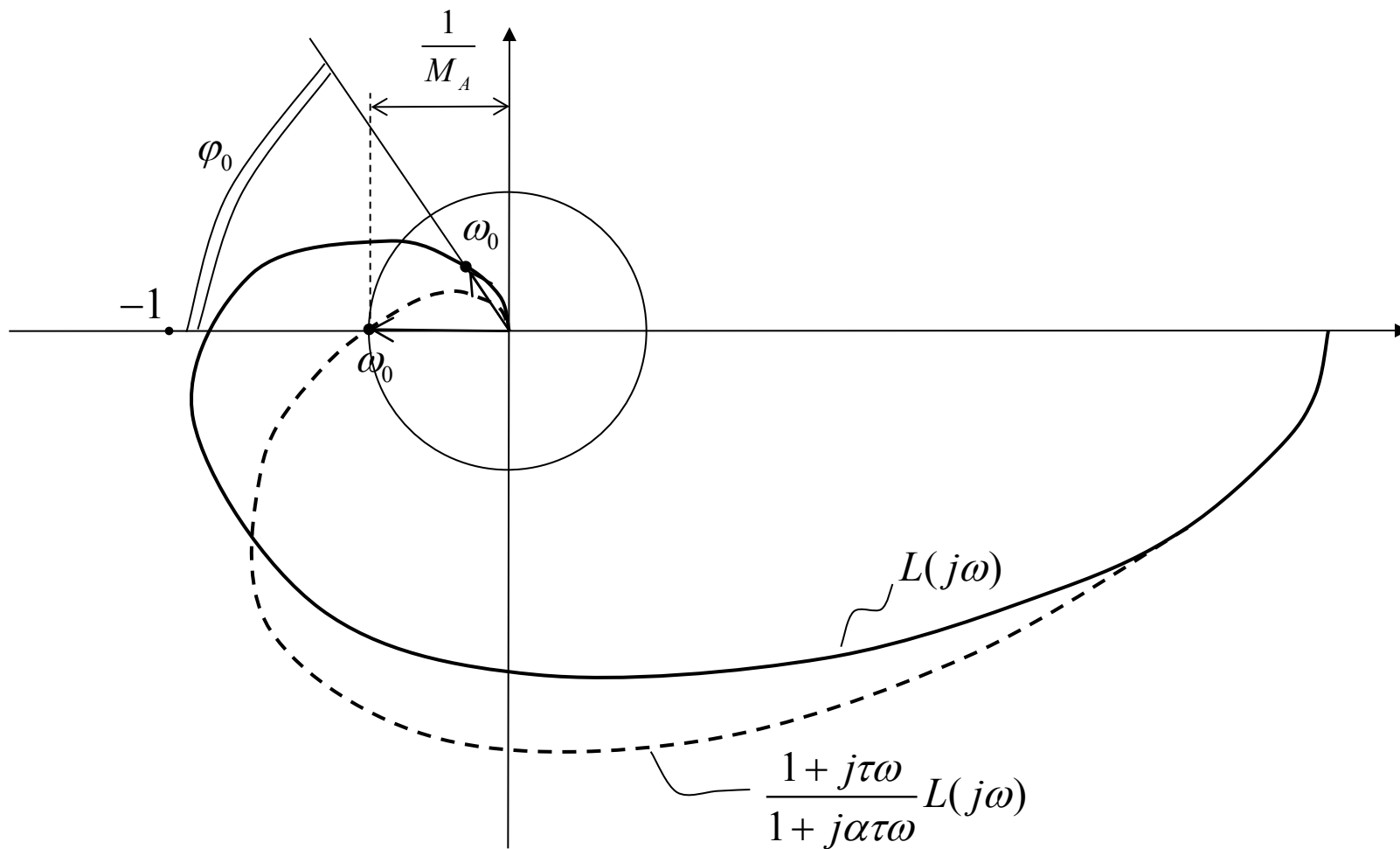
$$\frac{1 + j\tau\omega_0}{1 + j\alpha\tau\omega_0} = Me^{j\varphi} \quad \text{quindi}$$

$$\frac{1 + j\alpha\tau\omega_0}{1 + j\tau\omega_0} L(j\omega_0) = \frac{1}{|L(j\omega_0)|} e^{-j\varphi_0} \cdot |L(j\omega_0)| e^{j\arg L(j\omega_0)} = e^{j(\arg L(j\omega_0) - \varphi_0)} = e^{j(M_F - \pi)}$$

ω_0 è divenuta la pulsazione critica del g.d.a. compensato corrispondente ad un margine di fase pari a M_F .

L'uso delle formule di inversione permette in generale di spostare nel piano complesso, per una data frequenza, un punto del diagramma di Nyquist in uno limitrofo del diagramma di Nyquist compensato. Lo scopo, al di là dell'imposizione di margini di stabilità, è quello di migliorare la risposta armonica del guadagno di anello in accordo a specifiche di progetto.

Sintesi della rete anticipatrice con imposizione del margine di ampiezza M_A



Procedura di sintesi (rete anticipatrice):

1) Scegliere ω_0 affinché con $\varphi_0 := -\arg L(j\omega_0) - \pi$

$$\text{valga } \left(\frac{1}{M_A |L(j\omega_0)|}, \varphi_0 \right) \in \mathcal{C} \quad \text{quindi} \quad \cos \varphi_0 > M_A |L(j\omega_0)|$$

2) Definiti $M := \frac{1}{M_A |L(j\omega_0)|}$ e $\varphi := \varphi_0$

$$\text{segue } \tau = \frac{M - \cos \varphi}{\omega_0 \sin \varphi} \quad \text{e} \quad \alpha = \frac{M \cos \varphi - 1}{M (M - \cos \varphi)}$$

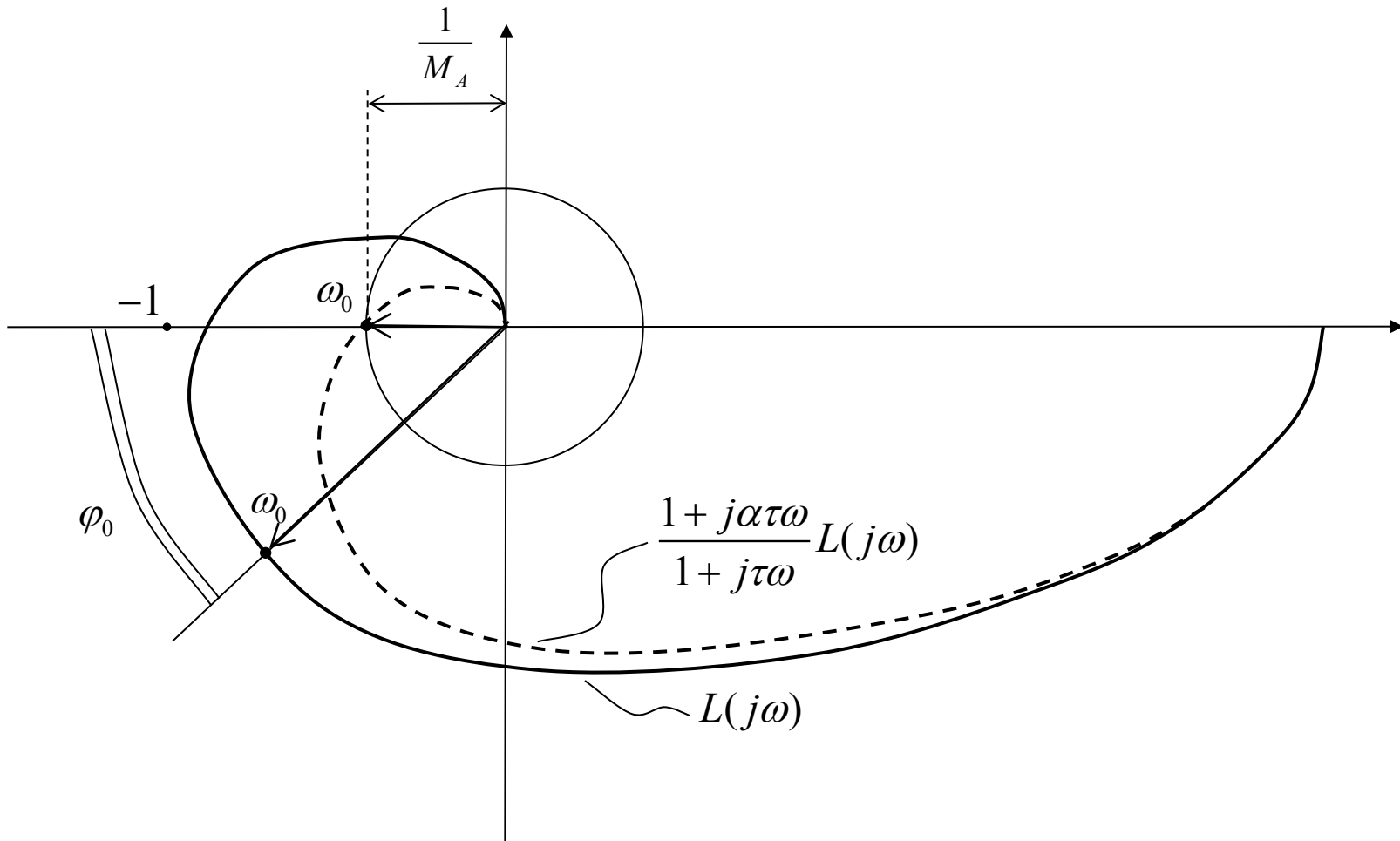
Infatti: le formule di inversione garantiscono che

$$\frac{1 + j\tau\omega_0}{1 + j\alpha\tau\omega_0} = Me^{j\varphi} \quad \text{quindi}$$

$$\frac{1 + j\tau\omega_0}{1 + j\alpha\tau\omega_0} L(j\omega_0) = \frac{1}{M_A |L(j\omega_0)|} e^{j\varphi_0} \cdot |L(j\omega_0)| e^{j\arg L(j\omega_0)} = \frac{1}{M_A} e^{j(\varphi_0 + \arg L(j\omega_0))} = \frac{1}{M_A} e^{-j\pi} = -\frac{1}{M_A}$$

ω_0 è divenuta la pulsazione di fase π del g.d.a. compensato corrispondente ad un margine di ampiezza pari a M_A .

Sintesi della rete ritardatrice con imposizione del margine di ampiezza M_A



Procedura di sintesi (rete ritardatrice):

1) Scegliere ω_0 affinché con $\varphi_0 := \arg L(j\omega_0) + \pi$

$$\text{valga } (M_A |L(j\omega_0)|, \varphi_0) \in \mathcal{C} \quad \text{quindi} \quad \cos \varphi_0 > \frac{1}{M_A |L(j\omega_0)|}$$

2) Definiti $M := M_A |L(j\omega_0)|$ e $\varphi := \varphi_0$

$$\text{segue } \tau = \frac{M - \cos \varphi}{\omega_0 \sin \varphi} \quad \text{e} \quad \alpha = \frac{M \cos \varphi - 1}{M (M - \cos \varphi)}$$

Infatti: le formule di inversione garantiscono che

$$\frac{1 + j\tau\omega_0}{1 + j\alpha\tau\omega_0} = Me^{j\varphi} \quad \text{quindi}$$

$$\frac{1 + j\alpha\tau\omega_0}{1 + j\tau\omega_0} L(j\omega_0) = \frac{1}{M_A |L(j\omega_0)|} e^{-j\varphi_0} \cdot |L(j\omega_0)| e^{j\arg L(j\omega_0)} = \frac{1}{M_A} e^{j(\arg L(j\omega_0) - \varphi_0)} = \frac{1}{M_A} e^{-j\pi} = -\frac{1}{M_A}$$

ω_0 è divenuta la pulsazione di fase π del g.d.a. compensato corrispondente ad un margine di ampiezza pari a M_A .

La rete a ritardo e anticipo e la rete a T

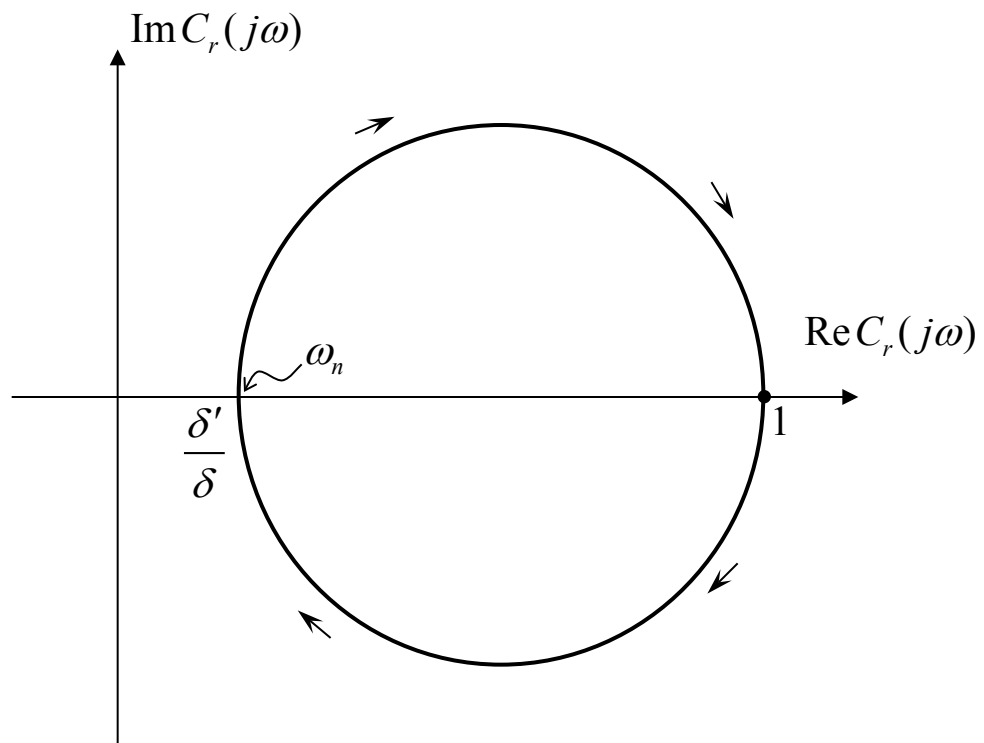
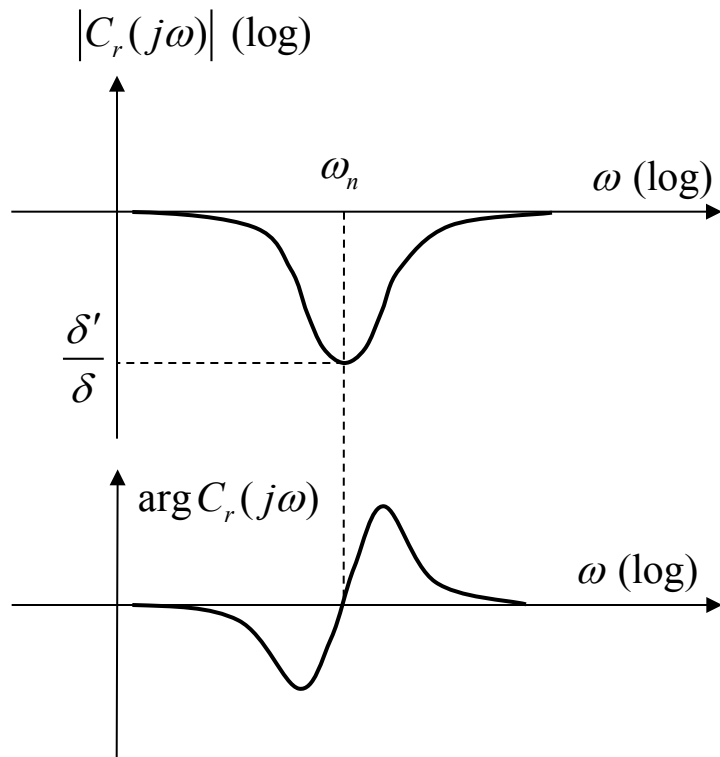
$$C_r(s) = \frac{1 + 2\delta' \frac{s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}}{1 + 2\delta \frac{s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}}; \quad C_r(j\omega) = \frac{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) + 2\delta' \frac{j\omega}{\omega_n}}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) + 2\delta \frac{j\omega}{\omega_n}}$$

Rete a ritardo e anticipo: $\omega_n > 0, \delta > \delta' \geq 1$

Rete a T: $\omega_n > 0, \delta > 1, \delta > \delta' > 0$

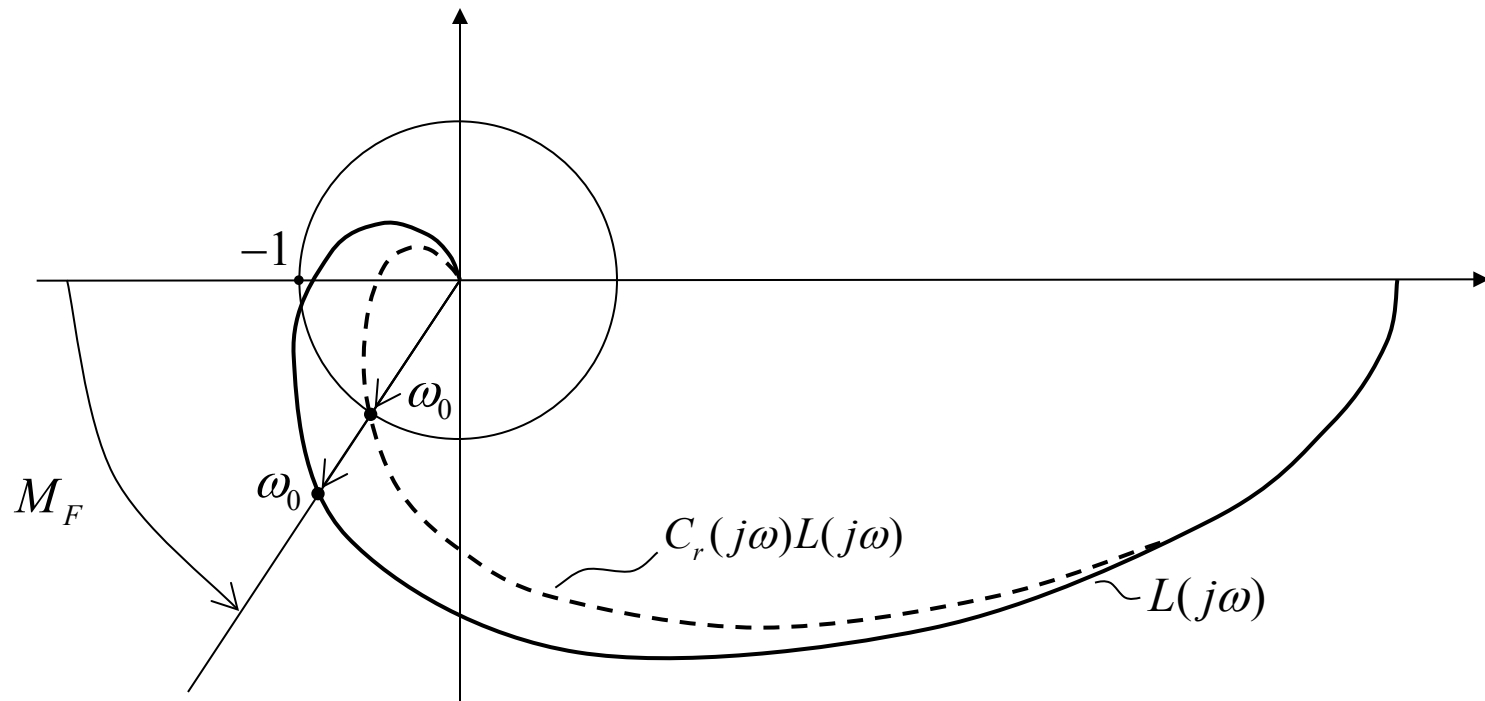
per entrambe le reti: $C_r(j\omega_n) = \frac{\delta'}{\delta} < 1$ (attenuazione di centro banda)

Diagrammi di Bode e di Nyquist



Progetto delle reti con imposizione del margine di fase M_F

$L(s)$ g.d.a. non compensato, $C_r(s)L(s)$ g.d.a. compensato



Procedura di sintesi: (rete a ritardo e anticipo e rete a T)

1) Determinare ω_0 soluzione dell'eq.:

$$\arg L(j\omega_0) = -\pi + M_F$$

2) Imporre

$$\omega_n = \omega_0, \quad \frac{\delta'}{\delta} = \frac{1}{|L(j\omega_0)|}$$

Infatti:

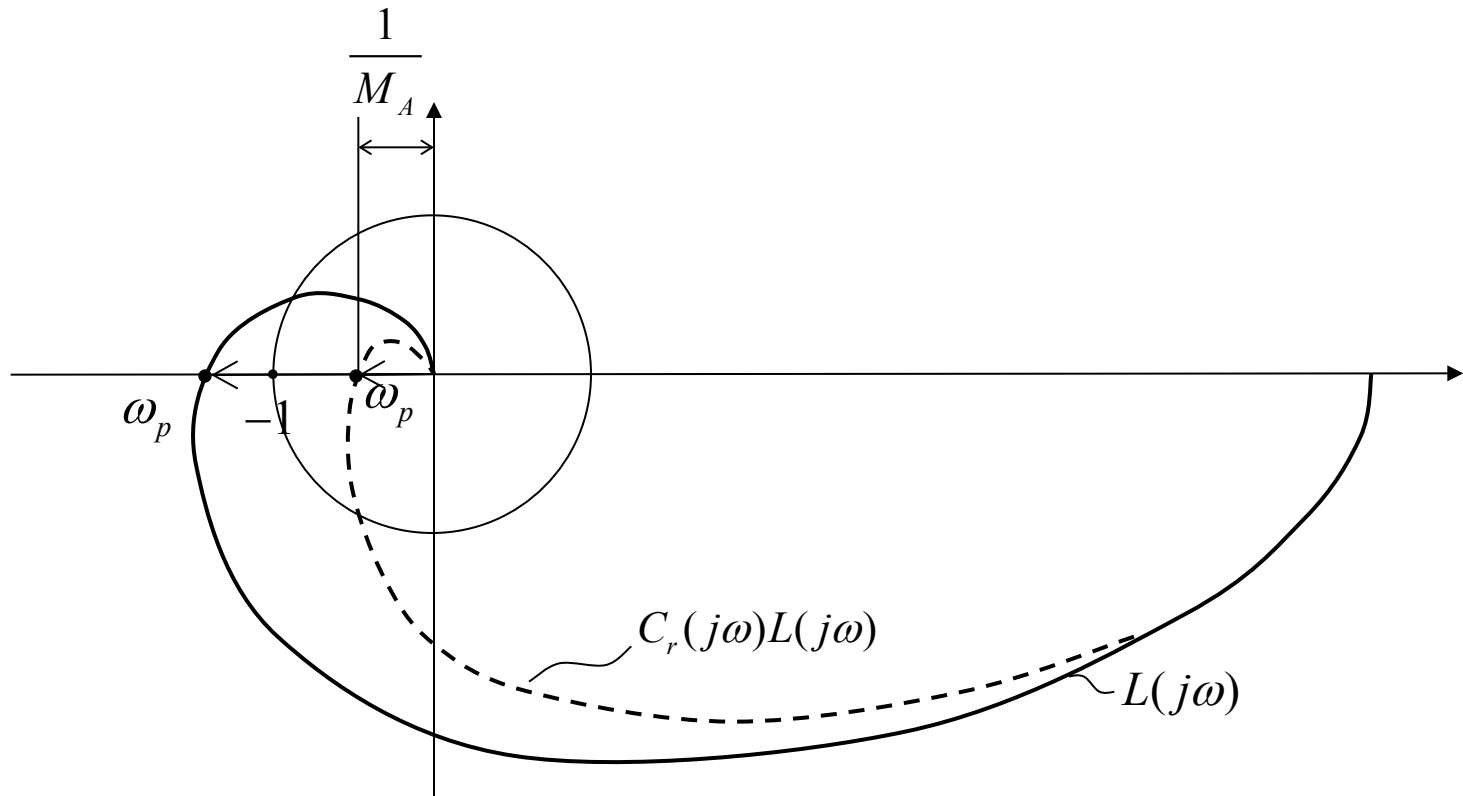
$$C_r(j\omega_0)L(j\omega_0) = \frac{\delta'}{\delta} \cdot L(j\omega_0) = \frac{1}{|L(j\omega_0)|} \cdot |L(j\omega_0)| e^{j \arg L(j\omega_0)} = e^{j(-\pi + M_F)}$$

ω_0 ($= \omega_n$) è divenuta la pulsazione critica del g.d.a. compensato corrispondente ad un margine di fase pari a M_F .

Rimane fra i parametri di progetto un grado di libertà che può essere utilizzato per soddisfare o concorrere a soddisfare un'altra specifica di progetto.

Progetto delle reti con imposizione del margine di ampiezza M_A

$L(s)$ g.d.a. non compensato, $C_r(s)L(s)$ g.d.a. compensato



Procedura di sintesi: (rete a ritardo e anticipo e rete a T)

1) Determinare ω_p :

$$\arg L(j\omega_p) = -\pi$$

2) Imporre

$$\omega_n = \omega_p, \quad \frac{\delta'}{\delta} = \frac{1}{|L(j\omega_p)| M_A}$$

Infatti:

$$C_r(j\omega_p)L(j\omega_p) = \frac{\delta'}{\delta} \cdot L(j\omega_p) = \frac{1}{|L(j\omega_p)| M_A} \cdot |L(j\omega_p)| e^{j \arg L(j\omega_p)} = \frac{1}{M_A} e^{-j\pi} = -\frac{1}{M_A}$$

ω_p è pulsazione di fase π anche nel g.d.a. compensato.

Rimane fra i parametri di progetto ancora un grado di libertà

- Parametrizzazione alternativa per la rete a ritardo e anticipo

$$C_r(s) = \frac{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)}{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s) + \tau_{12} s}, \quad \tau_1, \tau_2, \tau_{12} \in \mathbb{R}_+$$

È la scrittura tradizionale corrispondente alla rete elettrica
Relazioni con la parametrizzazione precedente:

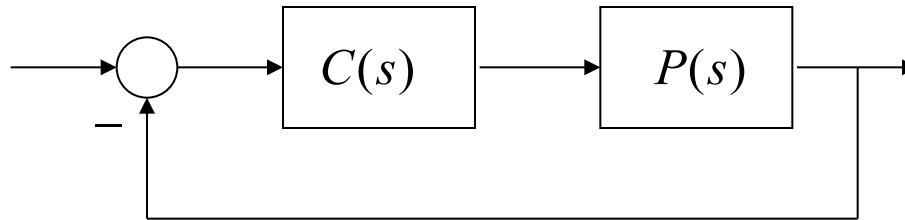
$$\omega_n = \frac{1}{\sqrt{\tau_1 \tau_2}} \quad \delta' = \frac{\tau_1 + \tau_2}{2\sqrt{\tau_1 \tau_2}} \geq 1 \quad \delta = \frac{\tau_1 + \tau_2 + \tau_{12}}{2\sqrt{\tau_1 \tau_2}} > \delta'$$

L'attenuazione di centro banda è esprimibile come: $C_r(j\omega_n) = \frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_1 + \tau_2 + \tau_{12}}$

Usualmente nel progetto della rete a ritardo e anticipo si impone il rapporto τ_1 / τ_2 (per esempio = 10).

La sintesi con l'equazione diofantea

- È un metodo che permette l'allocazione arbitraria dei poli retroazionati.
- Utilizza una particolare soluzione dell'equazione di Diòfanto o equazione diofantea.
- L'equazione diofantea è riconducibile alla risoluzione di un sistema di equazioni algebriche lineari.
- Questo metodo può essere variamente utilizzato ed adattato anche per il conseguimento di prestazioni asintotiche.



Sia assegnata $P(s)$ f.d.t. razionale strettamente propria:

$$P(s) := \frac{b(s)}{a(s)} := \frac{b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0}$$

Assumiamo $a(s)$ e $b(s)$ coprimi fra loro.

Problema: Progettare un controllore proprio $C(s)$ affinché i poli retroazionati del sistema di controllo siano assegnabili arbitrariamente.

Sia $C(s) = \frac{y(s)}{x(s)}$ un controllore di ordine l .

Assegnare arbitrariamente i poli retroazionati significa scegliere un insieme simmetrico $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n+l}\} \subset \mathbb{C}$ per il quale le radici dell'eq. caratteristica $1 + C(s)P(s) = 0$ coincidano con Λ .

$$1 + \frac{y(s)}{x(s)} \cdot \frac{b(s)}{a(s)} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a(s)x(s) + b(s)y(s) = 0$$

$a(s)x(s) + b(s)y(s) \equiv$ polinomio carat. del sistema retroazionato

$d(s) := \prod_{i=1}^{n+l} (s - \lambda_i) \equiv$ polinomio carat. desiderato per il sistema retroa.

Quindi:

$$a(s)x(s) + b(s)y(s) = d(s) \quad (\text{equazione diofantea})$$

Definizione: Dati i polinomi $a(s)$, $b(s)$ e $d(s)$, soluzione dell'eq. diofantea sono i polinomi $x(s)$ e $y(s)$ soddisfacenti

$$a(s)x(s) + b(s)y(s) = d(s)$$

Teorema: L'equazione diofantea ammette soluzione se e solo se il massimo comun divisore di $a(s)$ e $b(s)$ è divisore di $d(s)$.

Proprietà (Parametrizzazione delle soluzioni dell'eq. diofantea)

Sia $m(s)$ il m.c.d. di $a(s)$ e $b(s)$ per il quale valgono le fattorizzazioni $a(s) = m(s)a_1(s)$ e $b(s) = m(s)b_1(s)$. Se l'eq. diofantea ammette una soluzione $\{x_0(s), y_0(s)\}$ allora l'insieme di tutte le soluzioni è dato da

$$\begin{cases} x(s) = x_0(s) + b_1(s)p(s) \\ y(s) = y_0(s) - a_1(s)p(s) \end{cases}$$

dove $p(s)$ è un polinomio arbitrario.

Proprietà: Assumiamo $a(s)$ e $b(s)$ coprimi fra loro. Allora indicato con $\{x(s), y(s)\}$ una soluzione dell'eq. diofantea valgono le seguenti equivalenze:

$$\{a(s) \text{ e } d(s) \text{ coprimi}\} \Leftrightarrow \{a(s) \text{ e } y(s) \text{ coprimi}\}$$

$$\{b(s) \text{ e } d(s) \text{ coprimi}\} \Leftrightarrow \{b(s) \text{ e } x(s) \text{ coprimi}\}$$

Conseguenze:

Se $d(s)$, polinomio caratteristico desiderato, è coprimo sia con $a(s)$ che con $b(s)$ (è la situazione usuale nell'ambito delle sintesi dei controllori) segue che una soluzione dell'eq. diofantea non determina cancellazioni polo-zero fra $C(s)$ e $P(s)$.

Infatti:
$$C(s)P(s) = \frac{y(s)}{x(s)} \cdot \frac{b(s)}{a(s)}$$

Considerata l'assunzione fatta ($a(s)$ e $b(s)$ coprimi fra loro) per ogni scelta di $d(s)$ esistono soluzioni dell'eq. diofantea. Non tutte però sono accettabili in quanto è necessario garantire:

$$\deg y(s) \leq \deg x(s)$$

Ricerchiamo quindi una soluzione che incorpori implicitamente questa condizione:

$$\frac{y(s)}{x(s)} := \frac{y_l s^l + y_{l-1} s^{l-1} + \dots + y_1 s + y_0}{s^l + x_{l-1} s^{l-1} + \dots + x_1 s + x_0}, \quad y_i \in \mathbb{R} \quad i = 0, 1, \dots, l; \quad x_i \in \mathbb{R} \quad i = 0, 1, \dots, l-1;$$

(È una scelta corrispondente ad un controllore proprio di ordine l)

Sia inoltre:

$$d(s) = s^{n+l} + d_{n+l-1} s^{n+l-1} + \dots + d_1 s + d_0, \quad d_i \in \mathbb{R} \quad i = 0, 1, \dots, n+l-1$$

Interpretiamo l'eq. diofantea

$$\begin{aligned} (s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots)(s^l + x_{l-1}s^{l-1} + \dots) + (b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \dots)(y_ls^l + y_{l-1}s^{l-1} + \dots) = \\ = s^{n+l} + d_{n+l-1}s^{n+l-1} + \dots \end{aligned}$$

con il principio di identità dei polinomi.

Otteniamo quindi $n + l$ equazioni lineari nelle $2l + 1$ incognite reali (le x_i ed y_i).

E' ragionevole imporre che

n. di equazioni lineari = n. di incognite

ovvero

$$n + l = 2l + 1 \Rightarrow l = n - 1$$

$$\begin{aligned}
& \left(s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0 \right) \left(s^{n-1} + x_{n-2}s^{n-2} + \cdots + x_1s + x_0 \right) + \\
& \left(b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \cdots + b_1s + b_0 \right) \left(y_{n-1}s^{n-1} + y_{n-2}s^{n-2} + \cdots + y_1s + y_0 \right) = \\
& = s^{2n-1} + d_{2n-1}s^{2n-1} + \cdots + d_1s + d_0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& s^{2n-1} + \left(x_{n-2} + b_{n-1}y_{n-1} + a_{n-1} \right) s^{2n-2} + \left(a_{n-1}x_{n-2} + x_{n-3} + b_{n-2}y_{n-1} + b_{n-1}y_{n-2} + a_{n-2} \right) s^{2n-3} + \\
& + \left(a_{n-2}x_{n-2} + a_{n-1}x_{n-3} + x_{n-4} + b_{n-3}y_{n-1} + b_{n-2}y_{n-2} + b_{n-1}y_{n-3} + a_{n-3} \right) s^{2n-4} + \cdots \\
& \dots \quad \dots \quad \dots \\
& + \left(a_0x_1 + a_1x_0 + b_0y_1 + b_1y_0 \right) s + \left(a_0x_0 + b_0y_0 \right) = \\
& = s^{2n-1} + d_{2n-2}s^{2n-2} + \cdots + d_1s + d_0
\end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{n-2} + b_{n-1}y_{n-1} = d_{2n-2} - a_{n-1} \\ a_{n-1}x_{n-2} + x_{n-3} + b_{n-2}y_{n-1} + b_{n-1}y_{n-2} = d_{2n-3} - a_{n-2} \\ a_{n-2}x_{n-2} + a_{n-1}x_{n-3} + x_{n-4} + b_{n-3}y_{n-1} + b_{n-2}y_{n-2} + b_{n-1}y_{n-3} = d_{2n-4} - a_{n-3} \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_0x_1 + a_1x_0 + b_0y_1 + b_1y_0 = d_1 \\ a_0x_0 + b_0y_0 = d_0 \end{array} \right.$$

Trascriviamo in forma matriciale il sistema di $2n - 1$ equazioni lineari nelle $2n - 1$ incognite ($n - 1$ incognite $x_0, x_1, \dots, x_{n-2}$; n incognite $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$).

$$\begin{bmatrix}
 1 & 0 & & \ddots & 0 & 0 & b_{n-1} & 0 & 0 & & \ddots & 0 & 0 \\
 a_{n-1} & 1 & 0 & & \ddots & 0 & b_{n-2} & b_{n-1} & 0 & & \ddots & \ddots & 0 \\
 a_{n-2} & a_{n-1} & 1 & & \ddots & & b_{n-3} & b_{n-2} & b_{n-1} & 0 & & \ddots & \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & & \ddots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 a_2 & \ddots & & a_{n-2} & a_{n-1} & 1 & b_1 & \ddots & & b_{n-3} & b_{n-2} & b_{n-1} & 0 \\
 \hline
 a_1 & a_2 & & & a_{n-2} & a_{n-1} & b_0 & b_1 & & & b_{n-3} & b_{n-2} & b_{n-1} \\
 a_0 & a_1 & a_2 & & & a_{n-2} & 0 & b_0 & b_1 & & & b_{n-3} & b_{n-2} \\
 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \ddots & & 0 & 0 & b_0 & b_1 & \ddots & & b_{n-3} \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & \ddots & a_0 & a_1 & a_2 & \ddots & & \ddots & 0 & b_0 & b_1 & \ddots \\
 0 & \ddots & & 0 & a_0 & a_1 & 0 & \ddots & & \ddots & 0 & b_0 & b_1 \\
 0 & 0 & \ddots & & 0 & a_0 & 0 & 0 & \ddots & & \ddots & 0 & b_0
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 x_{n-2} \\
 x_{n-3} \\
 x_{n-4} \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 x_0 \\
 \hline
 y_{n-1} \\
 y_{n-2} \\
 y_{n-3} \\
 \vdots \\
 \\
 y_1 \\
 y_0
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 d_{2n-2} - a_{n-1} \\
 d_{2n-3} - a_{n-2} \\
 d_{2n-4} - a_{n-3} \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 d_n - a_1 \\
 \hline
 d_{n-1} - a_0 \\
 d_{n-2} \\
 d_{n-3} \\
 \vdots \\
 \\
 d_1 \\
 d_0
 \end{bmatrix}$$

- Il problema di assegnabilità arbitraria è risolvibile con un controllore proprio $C(s)$ di ordine $n - 1$ se e solo se la matrice dei coefficienti del sistema di equazioni è non singolare.
Tale matrice è non singolare?

Digressione: Risultanti e coprimalità

Dati i polinomi

$$a(s) := a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0, \quad a_n \neq 0$$

$$b(s) := b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0, \quad m \leq n, \quad b(s) \text{ non identicamente nullo}$$

costruiamo la matrice di Sylvester $\mathbf{S}(a, b)$ di ordine $(m + n) \times (m + n)$

in accordo alla seguente definizione:

$$\mathbf{S}(a,b) := \left[\begin{array}{ccccccccc}
 a_n & a_{n-1} & \cdots & & a_1 & a_0 & 0 & 0 \\
 0 & a_n & a_{n-1} & & & a_1 & a_0 & \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & & & \ddots & \ddots & 0 \\
 0 & & 0 & a_n & a_{n-1} & \cdots & & a_1 & a_0 \\
 \hline
 0 & & & 0 & b_m & b_{m-1} & & & b_0 \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \ddots & \\
 & 0 & b_m & b_{m-1} & & & b_0 & & \\
 0 & b_m & b_{m-1} & \ddots & & b_0 & 0 & \ddots & \\
 b_m & b_{m-1} & \ddots & & b_0 & 0 & \ddots & & 0
 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} m \text{ righe} \\ n \text{ righe} \end{array} \right.$$

Def. (Risultante di $a(s)$ e $b(s)$)

$$R(a,b) := \det \mathbf{S}(a,b)$$

Proprietà

I polinomi $a(s)$ e $b(s)$ sono coprimi fra loro se e solo se il loro risultante è diverso da zero, ovvero $R(a,b) \neq 0$.

- Costruzione della matrice di Sylvester relativa ai polinomi $a(s)$ e $b(s)$ di $P(s)$ (f.d.t. del sistema controllato):

$$a(s) := s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0, \quad (a_n = 1)$$

$$b(s) := b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \cdots + b_1s + b_0, \quad (m = n - 1)$$

Tale matrice, avendo assunto $a(s)$ e $b(s)$ coprimi, è quindi non singolare.

$$\mathbf{S} = \left[\begin{array}{ccccccc|cccc}
1 & a_{n-1} & \cdots & & a_1 & a_0 & 0 & & & \\
0 & 1 & a_{n-1} & & & a_1 & a_0 & & & \\
& \ddots & \ddots & \ddots & & & \ddots & \ddots & & 0 \\
0 & & 0 & 1 & a_{n-1} & \cdots & & a_1 & a_0 & \\
\hline
0 & & & 0 & b_{n-1} & b_{n-2} & & & & b_0 \\
& & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \ddots & \\
& 0 & b_{n-1} & b_{n-2} & & & & b_0 & & \\
0 & b_{n-1} & b_{n-2} & \ddots & & b_0 & 0 & \ddots & & \\
b_{n-1} & b_{n-2} & \ddots & & b_0 & 0 & \ddots & & 0 &
\end{array} \right]$$

$$\mathbf{S}^T = \left[\begin{array}{ccc|cccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & & 0 & b_{n-1} \\
a_{n-1} & 1 & & & & b_{n-1} & b_{n-2} \\
& a_{n-1} & \ddots & 0 & & \ddots & \\
& & \ddots & 1 & 0 & \ddots & b_{n-2} \\
a_1 & & & a_{n-1} & b_{n-1} & \ddots & b_0 \\
a_0 & a_1 & & & b_{n-2} & & b_0 & 0 \\
0 & a_0 & \ddots & & & & 0 & \\
& & \ddots & a_1 & & \ddots & & \\
0 & 0 & 0 & a_0 & b_0 & 0 & 0 &
\end{array} \right]$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{n-1 \text{ colonne}}$
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{n \text{ colonne}}$

$$\det \mathbf{S}^T = \det \mathbf{S} \neq 0$$

La matrice $\mathbf{S}^T$ coincide a meno di una permutazione di colonne con la matrice dei coefficienti del sistema di equazioni nelle incognite $\{x_0, x_1, \dots, x_{n-2}; y_0, y_1, \dots, y_{n-1}\}$

- Abbiamo dunque dato dimostrazione costruttiva al seguente enunciato.

Teorema (assegnabilità dei poli)

Assunto $a(s)$ e $b(s)$ coprimi fra loro, i poli del sistema in retroazione unitaria sono assegnabili arbitrariamente con un controllore proprio di ordine $n - 1$.

- Il metodo di sintesi con l'eq. diofantea può essere adattato per incorporare specifiche di regolazione asintotica (principio del modello interno).
- Questo metodo può essere interpretato come una delle tecniche del progetto con il polinomio caratteristico (principio di identità dei polinomi).
- Questo risultato pur nella sua importanza e generalità non è una panacea per la sintesi di controllori in quanto non tutte le specifiche sono riconducibili ad imposizioni sui poli retroazionati o a prestazioni asintotiche.

Conclusioni

Elenchiamo alcune delle tecniche utili nella sintesi di un controllore a struttura prefissata $C(s;\mathbf{p})$ dove $\mathbf{p} = [p_1 \ p_2 \ \dots \ p_k]^T$ indica il vettore dei parametri di progetto.

$\mathbf{p} \in \mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^k$, tipicamente $\mathcal{P} = [p_1^-, p_1^+] \times \dots \times [p_k^-, p_k^+]$

- Criterio di Routh o metodi con uso della tabella di Routh (imposizione di un prefissato grado di stabilità G_S , imposizione del margine di ampiezza M_A , ecc.).
- Diagrammi di Nyquist e formule di inversione (controllo di sistemi con ritardi finiti, specifica sul margine di fase M_F , ecc.).

- Diagrammi di Bode (specifiche frequenziali su $T_{ry}(j\omega)$ o $T_{dy}(j\omega)$, ecc.).
- Cancellazione polo-zero (anche utile per ridurre il numero k dei parametri di progetto).
- Polinomio caratteristico con principio di identità dei polinomi (equazione diofantea, imposizione dei poli dominanti, ecc.).
- Metodo del luogo delle radici (sintesi con grado di stabilità G_s massimo, specifiche sui poli dominanti, ecc.). Quale metodo qualitativo è utile nell'individuare la struttura appropriata per il controllore.
- ...