

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica, Elettronica e delle
Telecomunicazioni

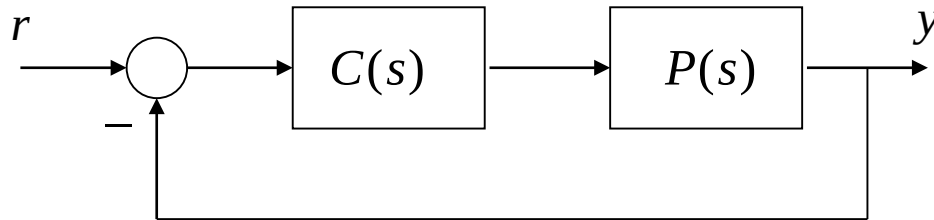
Lezione n. 16 di Fondamenti di Controlli Automatici
prof. Aurelio Piazzì

Il progetto di un sistema di controllo in retroazione – Parte II

Università degli Studi di Parma – a.a. 2019-2020

- Sistemi di controllo per la regolazione
- Regolatori PID
- Controllo dei sistemi con ritardo
- Controllo feedforward/feedback
- Conclusioni

Sistemi di controllo per la regolazione



Problema di regolazione (asintotica)

Sia dato un impianto con funzione di trasferimento $P(s)$ (strettamente propria). Determinare un controllore $C(s)$ per il quale si abbia nel sistema retroazionato (in figura) la stabilità asintotica interna e un errore a regime nullo in risposta ad un gradino del segnale di riferimento.

Assunzione: $P(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0}$ con $a(s)$ e $b(s)$ coprimi.

Proposizione

Il problema di regolazione (asintotica) ha soluzione se e solo se $P(0) \neq 0$ ovvero il guadagno statico dell'impianto è diverso da zero.

Dim.

Necessità: {il problema di regolazione ha soluzione} $\Rightarrow P(0) \neq 0$

Per assurdo sia $P(0) = 0$.

$T_{ry}(s) = \frac{C(s)P(s)}{1+C(s)P(s)}$ da cui $C(0)P(0) = 0$ in quanto valendo la stabilità asintotica interna $C(s)$ non ha poli nell'origine.

Quindi $T_{ry}(0) = 0$, ovvero il guadagno statico del sistema retroazionato è zero. Si applichi $r(t) = r_0 1(t)$, ($r_0 \neq 0$) $\Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = T_{ry}(0)r_0 = 0$
 $\Rightarrow e_\infty = r_0 - 0 \neq 0$. Questo contraddice l'ipotesi che il problema di regolazione abbia soluzione.

Sufficienza: $P(0) \neq 0 \Rightarrow$ {il problema di regolazione ha soluzione}

Caso 1 - L'origine del piano complesso è polo dell'impianto: $a_0 = 0, b_0 \neq 0$.

Progettiamo un controllore $C(s)$ di ordine $n - 1$ affinché i poli del sistema retroazionato siano assegnati arbitrariamente e in particolare siano tutti a parte reale negativa nonché diversi dalle radici di $a(s)$ e $b(s)$. Ne consegue che il sistema retroazionato è internamente asintoticamente stabile e di tipo maggiore o uguale ad 1. L'errore a regime in risposta ad un gradino del riferimento è dunque nullo. Il problema di regolazione è risolto.

Caso 2 – L'origine del piano complesso non è polo dell'impianto ($a_0 \neq 0$) e $P(0) \neq 0$ significa $b_0 \neq 0$. Il sistema retroazionato sia di tipo 1 con controllore di ordine l :

$$C(s) = \frac{z(s)}{x(s)} = \frac{z_l s^l + z_{l-1} s^{l-1} + \dots + z_1 s + z_0}{s^l + x_{l-1} s^{l-1} + \dots + x_1 s}$$

$$1 + \frac{z(s)}{x(s)} \cdot \frac{b(s)}{a(s)} = 0, \quad x(s)a(s) + z(s)b(s) = 0$$

$p_c(s) := x(s)a(s) + z(s)b(s)$ (polinomio caratteristico associato al controllore)

$p_d(s) := s^{n+l} + d_{n+l-1} s^{n+l-1} + \dots + d_0$ (polinomio caratteristico desiderato)

Imponiamo $p_c(s) \equiv p_d(s)$, da cui $n + l$ equazioni con $2l$ incognite.

$n + l = 2l$ da cui $l = n$.

$$p_c(s) = x(s)a(s) + z(s)b(s) = (s^n + x_{n-1}s^{n-1} + \dots + x_1s)(s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0) + (z_n s^n + z_{n-1}s^{n-1} + \dots + z_1s + z_0)(b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_1s + b_0) = s^{2n} + (x_{n-1} + b_{n-1}z_n + a_{n-1})s^{2n-1} + (a_{n-1}x_{n-1} + x_{n-2} + b_{n-2}z_n + b_{n-1}z_{n-1} + a_{n-2})s^{2n-2} + \dots + (a_0x_1 + b_0z_1 + b_1z_0)s + b_0z_0$$

$$\begin{cases} x_{n-1} + b_{n-1}z_n = d_{2n-1} - a_{n-1} \\ a_{n-1}x_{n-1} + x_{n-2} + b_{n-2}z_n + b_{n-1}z_{n-1} = d_{2n-2} - a_{n-2} \\ \dots \\ a_0x_1 + b_0z_1 + b_1z_0 = d_1 \\ b_0z_0 = d_0 \end{cases}$$

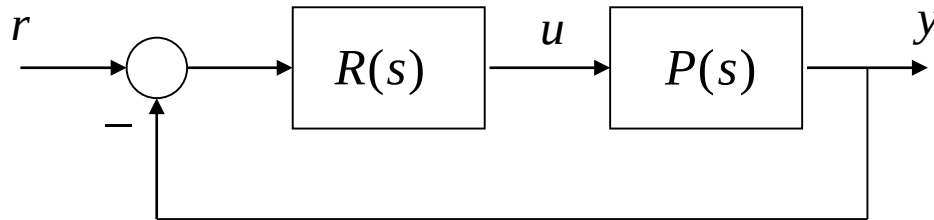
$$\begin{cases} x_{n-1} + b_{n-1}z_n = d_{2n-1} - a_{n-1} \\ a_{n-1}x_{n-1} + x_{n-2} + b_{n-2}z_n + b_{n-1}z_{n-1} = d_{2n-2} - a_{n-2} \\ \dots \\ a_0x_1 + b_0z_1 + b_1z_0 = d_1 \\ b_0z_0 = d_0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & & 0 & 0 & b_{n-1} & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ a_{n-1} & 1 & 0 & & 0 & b_{n-2} & b_{n-1} & 0 & & 0 & 0 \\ a_{n-2} & a_{n-1} & 1 & & & b_{n-3} & b_{n-2} & b_{n-1} & 0 & & 0 \\ & a_{n-2} & \ddots & \ddots & & & b_{n-3} & b_{n-2} & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ a_2 & & & a_{n-2} & a_{n-1} & 1 & b_1 & & \ddots & b_{n-2} & b_{n-1} & 0 \\ a_1 & a_2 & & & a_{n-2} & a_{n-1} & b_0 & b_1 & & \ddots & b_{n-2} & b_{n-1} & 0 \\ a_0 & a_1 & \ddots & & & a_{n-2} & 0 & b_0 & b_1 & & \ddots & b_{n-2} & b_{n-1} \\ 0 & a_0 & \ddots & \ddots & & & 0 & 0 & b_0 & \ddots & & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & 0 & & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & a_0 & a_1 & a_2 & & & & \ddots & \ddots & b_1 & \\ & & & \ddots & a_0 & a_1 & 0 & & & \ddots & b_0 & b_1 & \\ 0 & & & 0 & a_0 & & 0 & 0 & & & 0 & b_0 & \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & & 0 & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{n-1} \\ x_{n-2} \\ x_{n-3} \\ \vdots \\ x_1 \\ z_n \\ z_{n-1} \\ z_{n-2} \\ \vdots \\ z_2 \\ z_1 \\ z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{2n-1} - a_{n-1} \\ d_{2n-2} - a_{n-2} \\ d_{2n-3} - a_{n-3} \\ \vdots \\ d_{n+1} - a_1 \\ d_n - a_0 \\ d_{n-1} \\ d_{n-2} \\ \vdots \\ d_2 \\ d_1 \\ d_0 \end{bmatrix}$$

La sottomatrice colorata in rosa è non singolare ($a(s)$ e $b(s)$ sono coprimi fra loro). Quindi essendo $b_0 \neq 0$ anche la matrice complessiva è non singolare. Ne consegue che il problema di regolazione asintotica può essere risolto con assegnazione arbitraria dei poli del sistema retroazionato. ■

Nota: come scegliere i poli retroazionati? Spesso con metodi numerici di ottimizzazione considerando i possibili vincoli ed indici da minimizzare (o massimizzare)

I regolatori PID



$$R(s) = K_p \left(1 + T_d s + \frac{1}{T_i s} \right)$$

Nelle implementazioni $T_d s$ è sostituito con $\frac{T_d s}{1 + \tau s}$ ($\tau \ll T_d$)

$K_p \equiv$ costante (o sensibilità) proporzionale

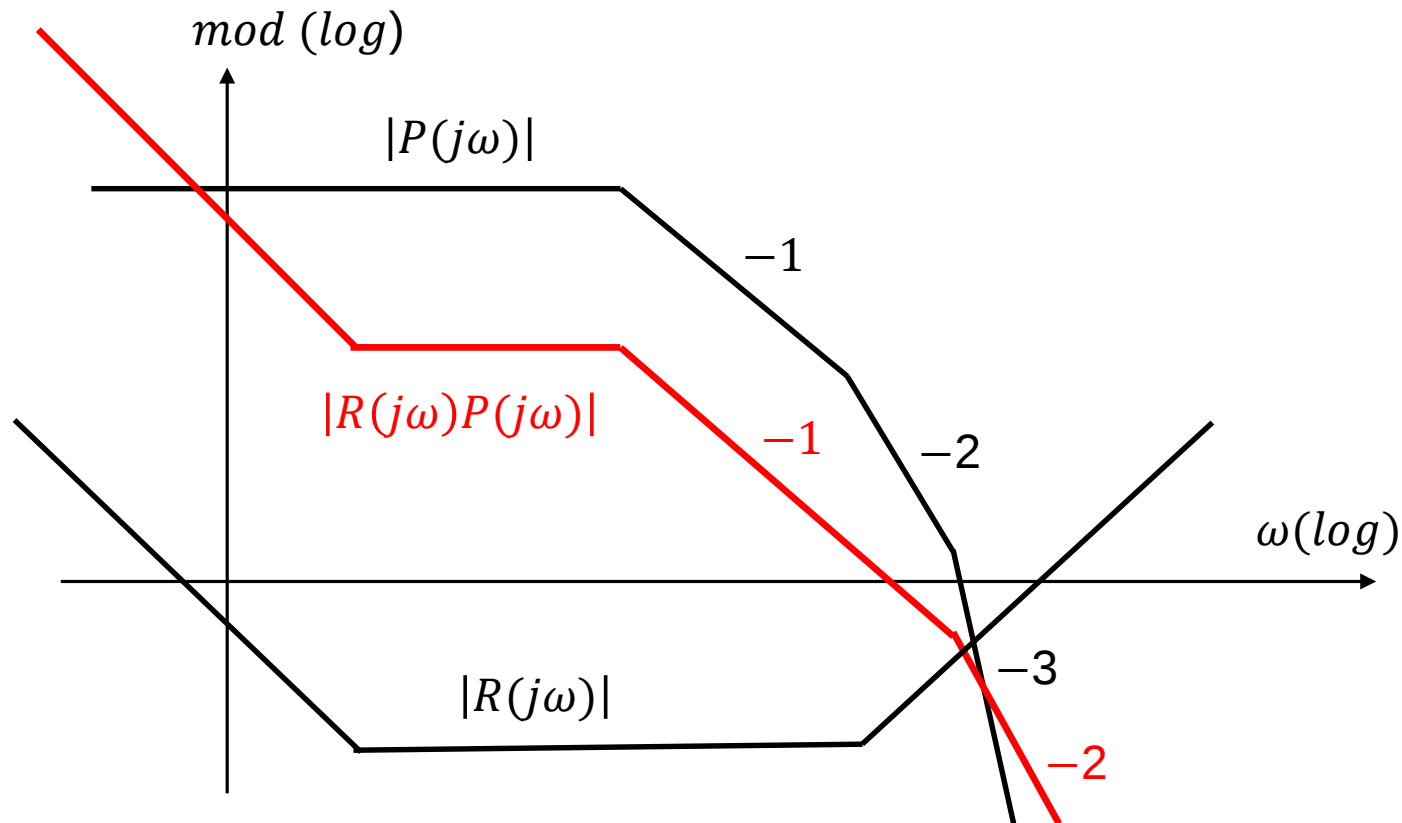
$T_d \equiv$ costante di tempo dell'azione derivativa

$T_i \equiv$ costante di tempo dell'azione integrale

$\frac{1}{K_p} \equiv$ banda proporzionale

Casi particolari: regolatore P, regolatore I, regolatore PI, regolatore PD

Progetto frequenziale del regolatore PID



$P(s)$ asintoticamente stabile e a fase minima
Regolatore PID con zeri reali

$$R(s) = K_p \left(1 + T_d s + \frac{1}{T_i s} \right) = \frac{K_p}{T_i} \cdot \frac{T_d T_i s^2 + T_i s + 1}{s} = \frac{K_p}{T_i} \cdot \frac{1 + 2\delta \frac{s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}}{s}$$

$$\omega_n = \frac{1}{\sqrt{T_d T_i}}, \quad \delta = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{T_i}{T_d}}$$

$$R(j\omega) = \frac{K_p}{T_i} \cdot \frac{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + 2\delta \frac{j\omega}{\omega_n}}{j\omega}$$

$$R(j\omega_n) = \frac{K_p}{T_i} \cdot \frac{2\delta}{\omega_n} = K_p$$

Sintesi di $R(s)$ con imposizione del margine di fase M_f

1) Si determina ω_0 soluzione di $\arg P(j\omega_0) = -\pi + M_f$

2) Si impone $\omega_n = \omega_0$ e $R(j\omega_n) = \frac{1}{|P(j\omega_0)|}$ da cui $K_p = \frac{1}{|P(j\omega_0)|}$;

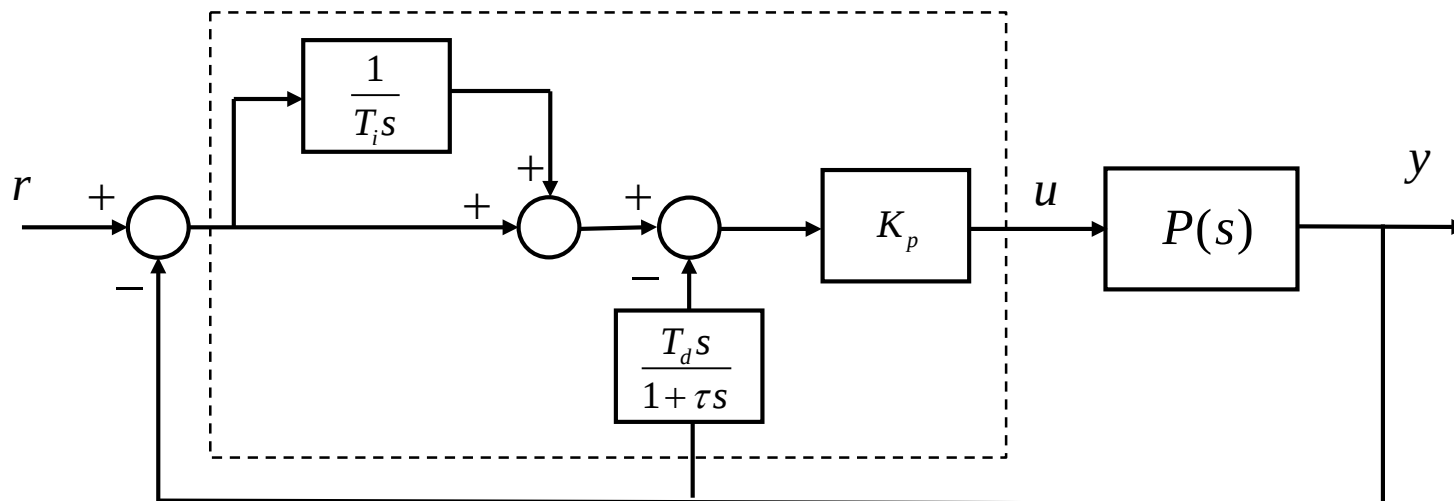
scelto il rapporto $k := \frac{T_i}{T_d}$ segue $\delta = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{k}$ e $T_i = \frac{2\delta}{\omega_n} = \frac{\sqrt{k}}{\omega_0}$;

da $T_d T_i = \frac{1}{\omega_n^2}$ segue $T_d = \frac{1}{T_i \omega_0^2} = \frac{1}{\sqrt{k} \omega_0}$

Implementazione dei regolatori PID

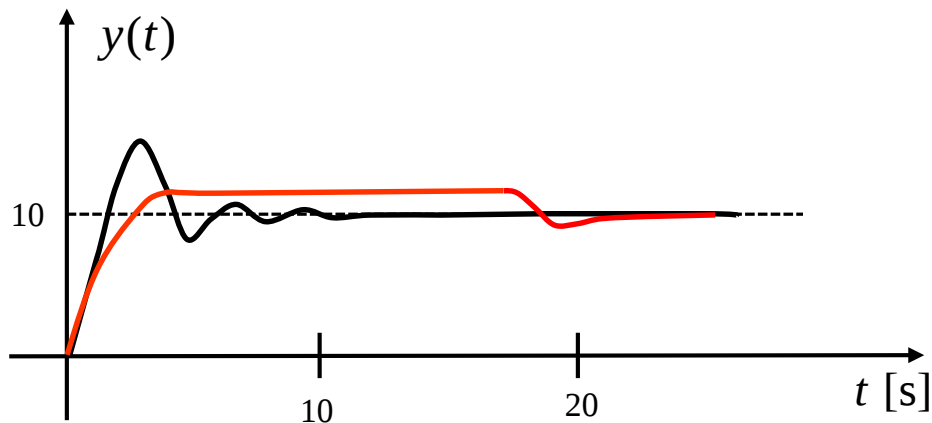
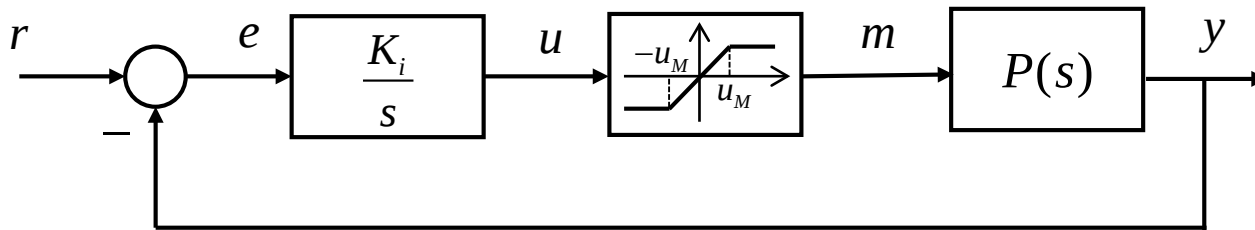
1. Limitazione dell'azione derivativa $\frac{T_d s}{1 + \tau s}$

- $\tau = \frac{T_d}{N}$, usualmente $N = 5 \div 20$
- Azione derivativa agente solo sull'uscita regolata secondo lo schema:



2. Desaturazione dell'azione integrale

- Il problema della «carica integrale» (*integral wind-up*) quando l'attuatore è saturante. Esempio del fenomeno con un regolatore I (integrale):

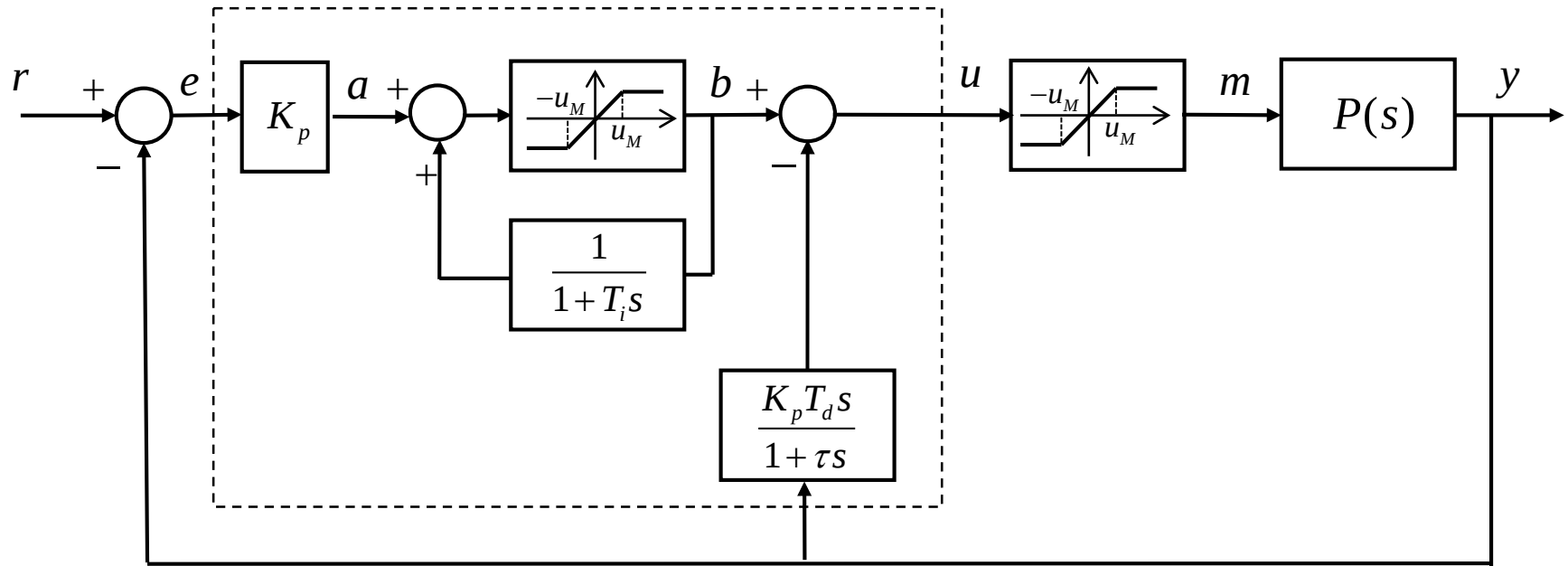


Dati:

$$m(t) = \begin{cases} -u_M, & u(t) < -u_M \\ u(t), & |u(t)| \leq u_M \\ u_M, & u(t) > u_M \end{cases}$$

$$P(s) = \frac{1}{s+1}, \quad K_i := \frac{K_p}{T_i} = 2, \\ u_M = 11, \quad r(t) = 10 \cdot 1(t)$$

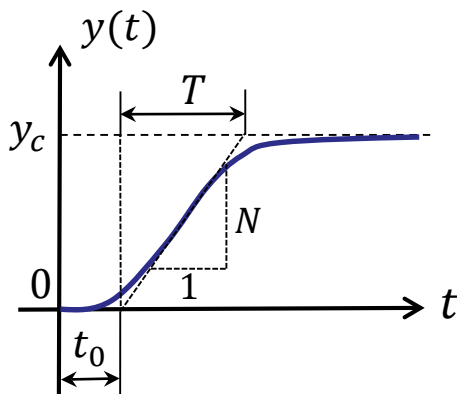
- Regolatore PID con desaturazione (*anti-wind-up*)



Metodi di taratura dei regolatori PID

Metodo di Ziegler-Nichols (1942) ad anello aperto:

Identificazione del processo da regolare mediante applicazione di un gradino all'ingresso $u(t) = u_c 1(t)$



t_0 tempo di ritardo

T costante di tempo

$R := t_0/T$ rapporto di ritardo

$K := y_c/u_c$ guadagno statico

$N := y_c/T$ velocità di risposta

$$P(s) = \frac{K e^{-t_0 s}}{1 + T s}$$

Parametri di Cohen-Coon (1953)

Regolatore P: $K_p = \frac{u_c}{N t_0} \left(1 + \frac{R}{3}\right)$; Regolatore I: $\frac{K_p}{T_i} = \frac{4 u_c}{N t_0^2} \frac{R^2}{1 + 5R}$;

Regolatore PI: $K_p = \frac{u_c}{N t_0} \left(\frac{9}{10} + \frac{R}{12}\right)$, $T_i = t_0 \frac{30 + 3R}{9 + 20R}$; Regolatore PD: $K_p = \frac{u_c}{N t_0} \left(\frac{5}{4} + \frac{R}{6}\right)$, $T_d = t_0 \frac{6 - 2R}{22 + 3R}$;

Regolatore PID: $K_p = \frac{u_c}{N t_0} \left(\frac{4}{3} + \frac{R}{4}\right)$, $T_i = t_0 \frac{32 + 6R}{13 + 8R}$, $T_d = t_0 \frac{4}{11 + 2R}$;

Metodo di Ziegler-Nichols (1942) ad anello chiuso:

Con un regolatore proporzionale si porta il sistema retroazionato nella condizione di stabilità limite (innesco di autooscillazioni sull'uscita dell'impianto)

K_0 guadagno critico (del regolatore P nella condizione di stabilità limite)

T_0 periodo dell'oscillazione

Regolatore P: $K_p = 0.5K_0$;

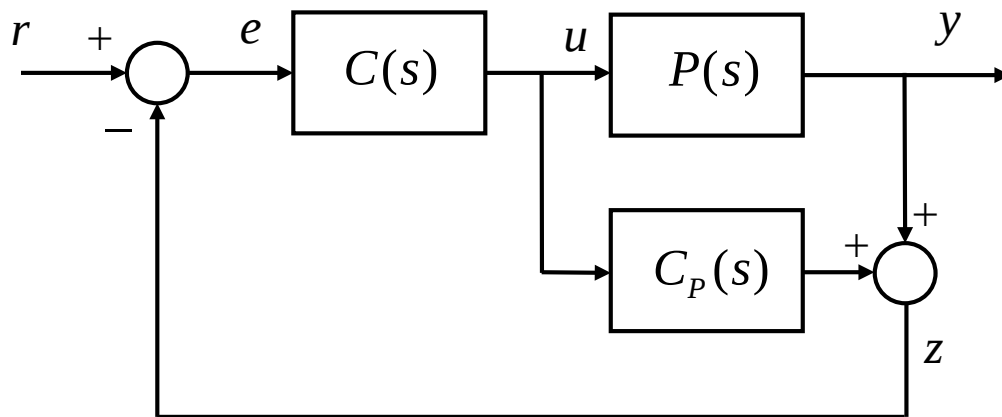
Regolatore PI: $K_p = 0.45K_0$, $T_i = 0.85T_0$; Regolatore PD: $K_p = 0.5K_0$, $T_d = 0.2T_0$;

Regolatore PID: $K_p = 0.6K_0$, $T_i = 0.5T_0$, $T_d = 0.12T_0$

- Tante regole di taratura pubblicate nella letteratura tecnica
- Algoritmi di auto-sintonia (*self-tuning*)

Controllo dei sistemi con ritardo

Lo schema classico di controllo in retroazione per i sistemi affetti da ritardo di tempo ($P(s) = G(s)e^{-t_0s}$) impone una forte limitazione nelle prestazioni. Lo **schema a predittore di Smith** (1958) supera questa limitazione.

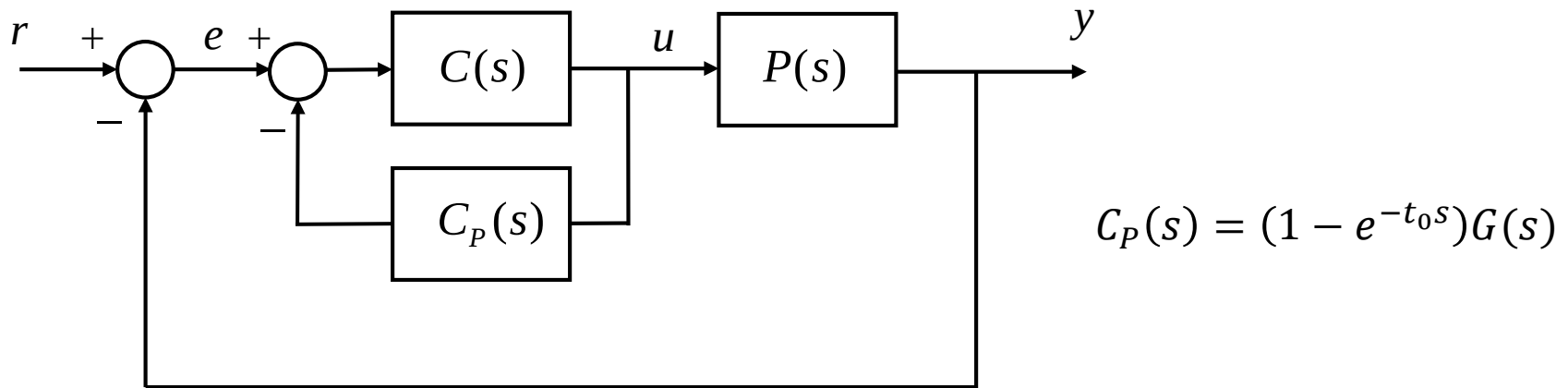


$$C_p(s) = (1 - e^{-t_0s})G(s)$$

$$T_{ry}(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} e^{-t_0s}$$

Lo schema utilizza per la retroazione il segnale z , una predizione del segnale controllato y [$z(t) = y(t + t_0)$]

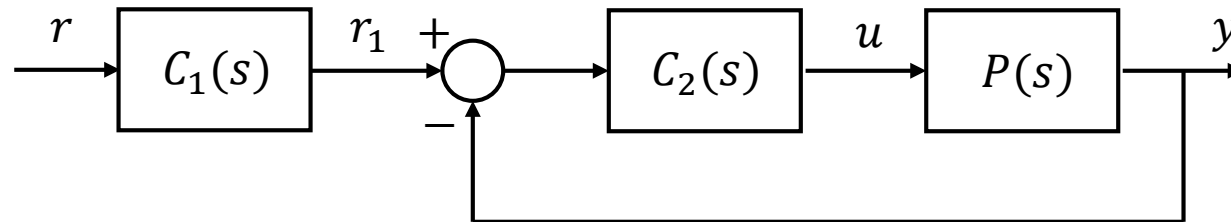
Lo schema a predittore di Smith può essere implementato con il seguente schema equivalente:



Lo schema a predittore di Smith prevede nel controllore una replica dell'impianto $G(s)e^{-t_0 s}$. L'implementazione analogica del ritardo finito ($e^{-t_0 s}$) è difficile (uso delle approssimanti di Padé) mentre l'implementazione digitale è facile.

Controllo feedforward/feedback (schemi di controllo a due gradi di libertà) [cenno]

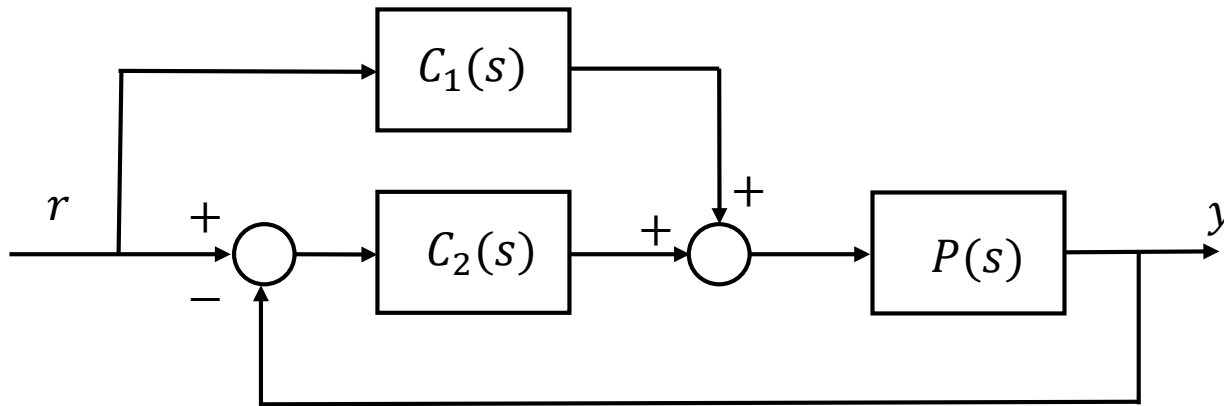
Prefiltraggio del segnale di riferimento



Sintesi del «filtro» $C_1(s)$:

- Filtraggio statico $C_1(s) = T_{r_1 y}(0)^{-1}$
- Filtraggio passa-basso
- Filtraggio passa-alto

Compensazione del segnale di riferimento



$$T_{ry}(s) = \frac{C_1(s)P(s)}{1+C_2(s)P(s)} + \frac{C_2(s)P(s)}{1+C_2(s)P(s)} ; \text{ se } C_1(s) = P(s)^{-1} \text{ segue } T_{ry}(s) = 1 !$$

$P(s)^{-1}$ è il «sistema inverso» di $P(s)$ e come tale non può essere realizzato (implementato) quando l'impianto controllato 1) è strettamente proprio (condizione verificata della quasi totalità degli impianti controllati) oppure 2) ha zeri con parte reale non negativa (sistemi a fase non minima).

L'impedimento 1 può essere superato mediante la costruzione di un **sistema inverso approssimato** mentre il superamento dell'impedimento 2 è più difficile da conseguire ma comunque possibile se si ricorre al metodo dell'**inversione dinamica stabile**.

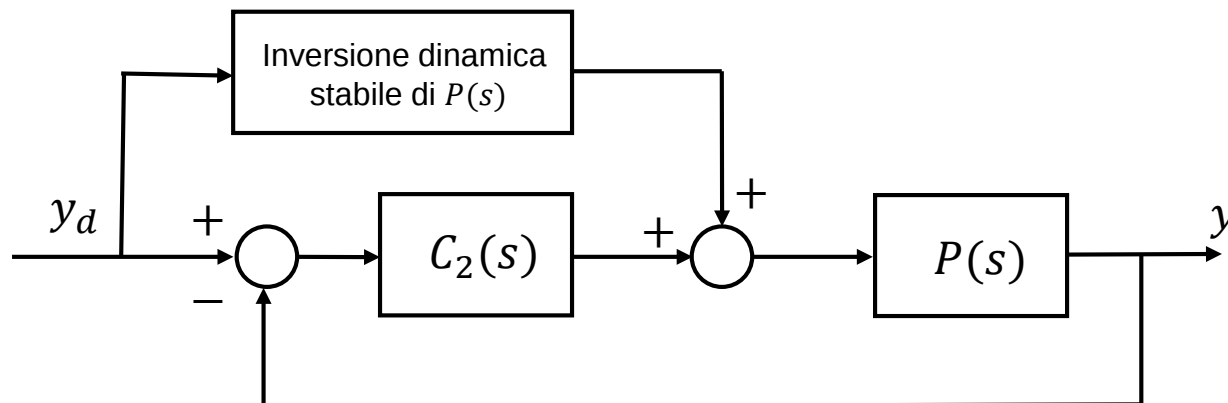
Esempio:

$P(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s+4)}$, $P(s)^{-1} = \frac{(s+2)(s+4)}{s+1} \cong \frac{(s+2)(s+4)}{(s+1)(1+\tau s)}$ con τ positivo e piccolo (sistema realizzabile che approssima il sistema inverso di $P(s)$).

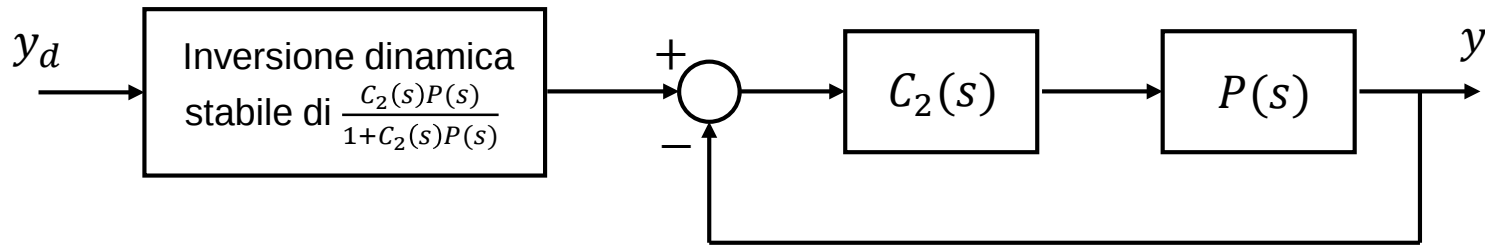
Se $P(s) = \frac{1-s}{(s+2)(s+4)}$, $P(s)^{-1} = \frac{(s+2)(s+4)}{1-s}$ è un sistema instabile!

Metodo dell'inversione dinamica stabile (1996)

Il segnale di riferimento venga definito come segnale desiderato $y_d(t)$ sull'uscita dell'impianto controllato e si ipotizzi che sia limitato su $\mathbb{R}$. Si determina mediante il metodo dell'inversione dinamica stabile un segnale $u_d(t)$ limitato su $\mathbb{R}$ tale che $(u_d, y_d) \in \mathcal{B}$ (dove $\mathcal{B}$ è il behavior di $P(s)$).



Il metodo dell'inversione dinamica stabile può anche essere utilizzato per generalizzare lo schema di controllo col prefiltraggio del segnale di riferimento (2000).



Note sull'inversione dinamica stabile:

- Può essere applicata ad impianti controllati a fase non minima (si richiede solo che $P(s)$ non abbia zeri sull'asse immaginario).
- Richiede il preventivo progetto dell'uscita desiderata (per esempio il grado di continuità di $y_d(t)$ deve essere uguale o maggiore al grado relativo di $P(s)$ meno uno).
- Il progetto del controllore in retroazione $C_2(s)$ è orientato a perseguire un'adeguata robustezza delle prestazioni controllistiche.
- Deve essere implementato per via digitale.

Conclusioni

Elenchiamo alcune delle tecniche utili nella sintesi di un controllore in retroazione a struttura prefissata $C(s; \mathbf{p})$ dove $\mathbf{p} = [p_1 \ p_2 \ \cdots \ p_k]^T$ indica il vettore dei parametri di progetto ($\mathbf{p} \in \mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}$ e usualmente $\mathcal{P} = [p_1^-, p_1^+] \times \cdots \times [p_k^-, p_k^+]$).

- Criterio di Routh o metodi con uso della tabella di Routh (imposizione di un prefissato grado di stabilità G_S , imposizione del margine di ampiezza M_A , ecc.).
- Diagrammi di Nyquist e formule di inversione (progetti in frequenza con imposizione di margini di stabilità, ecc.).
- Diagrammi di Bode (progetti in frequenza per sistemi a fase minima, progetti con specifiche frequenziali su $T_{ry}(j\omega)$ o $T_{dy}(j\omega)$, ecc.).
- Metodi di cancellazione polo-zero (anche utili per ridurre il numero k dei parametri di progetto).
- Metodo del polinomio caratteristico con uso del principio di identità dei polinomi (equazione diofantea, imposizione dei poli dominanti, ecc.).

- Metodo del luogo delle radici (sintesi con grado di stabilità massimo, specifiche sui poli dominanti, ecc.). Quale metodo qualitativo è utile nell'individuare la struttura appropriate per il controllore.

Nel progetto dei controllori e più in generale dei sistemi di controllo una buona pratica (*best practice*) è l'uso di **ottimizzazioni** (dei parametri di progetto) e di **simulazioni** al calcolatore per la verifica delle evoluzioni nelle varie situazioni operative.