

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica, Elettronica e delle
Telecomunicazioni

Lezione n. 17 di Fondamenti di Controlli Automatici
prof. Aurelio Piazzì

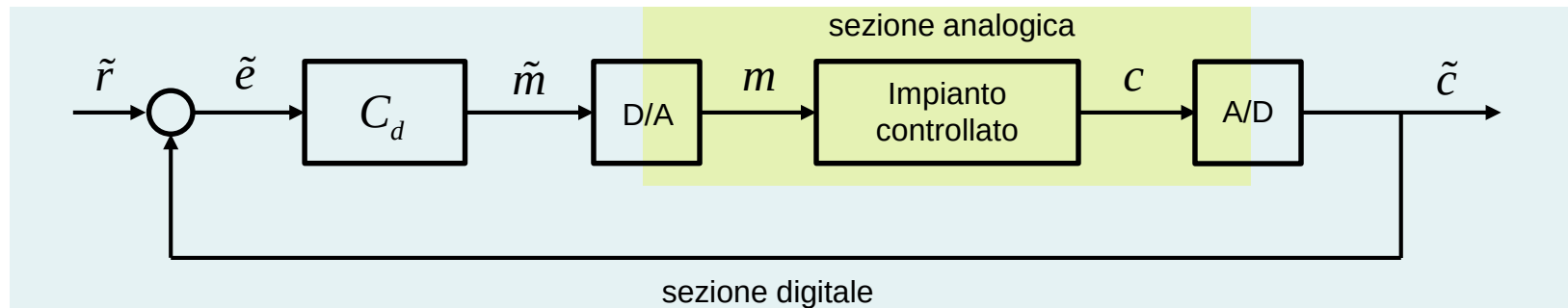
Introduzione al controllo digitale

Università degli Studi di Parma – a.a. 2019-2020

- I sistemi di controllo digitale
- Campionamento dei segnali a tempo continuo e teorema di Shannon
- La trasformata Zeta di un segnale a tempo discreto

I sistemi di controllo digitale comprendono un elaboratore digitale nel sistema di controllo (sistemi di controllo con segnali campionati, sistemi di controllo a tempo discreto)

Un esempio di sistema di controllo digitale:



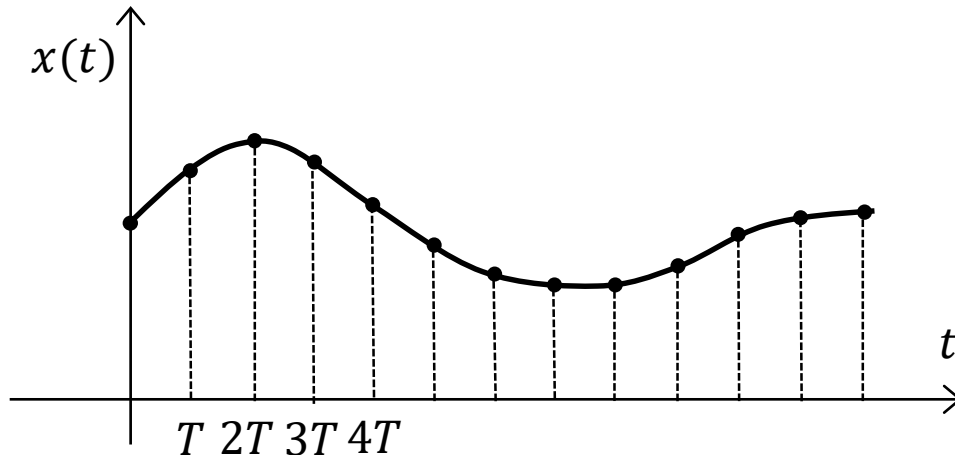
m, c segnali a tempo continuo (analogici)
 $\tilde{m}, \tilde{c}, \tilde{r}, \tilde{e}$ segnali a tempo discreto (digitali)
Convertitore D/A (digitale/analogico)
Convertitore A/D (analogico/digitale)

Convertitore A/D



Campionamento del segnale con periodo T :

$$x(t) \rightarrow \tilde{x}(k) = x(kT), \quad k \in \mathbb{Z}$$



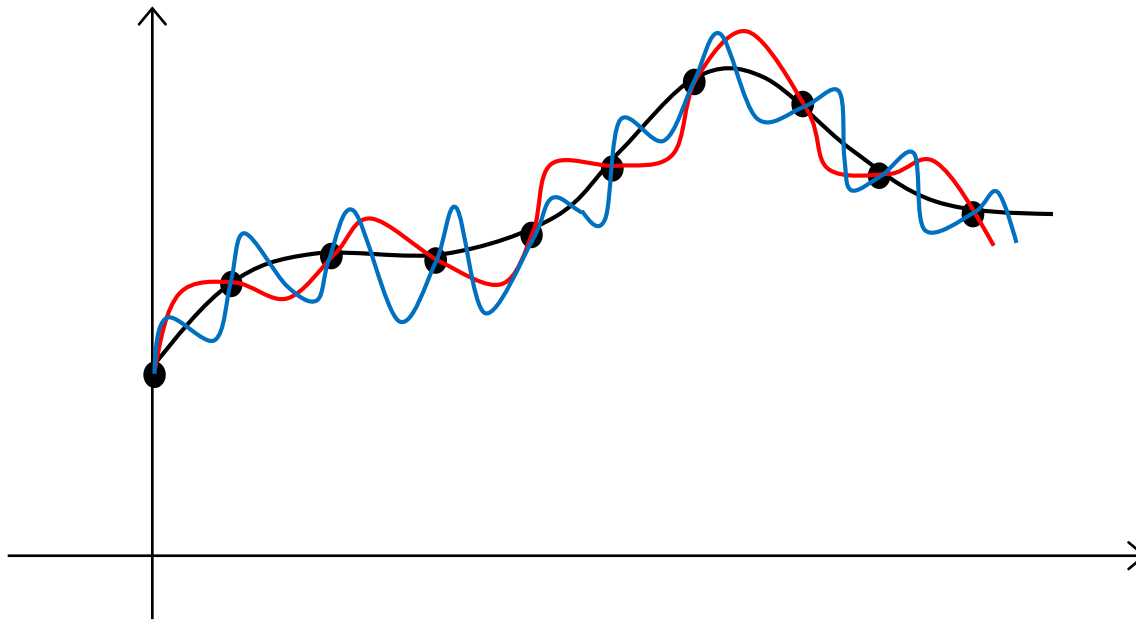
$\tilde{x}$ è una sequenza o
successione di valori

Ogni campione viene rappresentato da un numero finito di bit (approssimazione del campione). Esempio: convertitori a 8, 10, 12 bit corrispondono a 256, 1024, 4096 livelli di quantizzazione.

Assunzione: trascureremo la quantizzazione dei segnali

Conversione digitale-analogica

La conversione inversa, cioè la ricostruzione di un segnale analogico a partire dai suoi campioni, in generale non ammette un'unica soluzione.



Il teorema del campionamento (Shannon 1948)

Un segnale $f(t)$ con spettro limitato da 0 a ω_s , cioè con trasformata di Fourier $F(j\omega)$ nulla per $\omega \geq \omega_s$, si può ricostruire dalla sequenza di campioni $\tilde{f}(k) = f(kT)$ se e solo se la pulsazione di campionamento $\Omega = 2\pi/T$ è non inferiore a $2\omega_s$.

Fenomeno di **aliasing**:

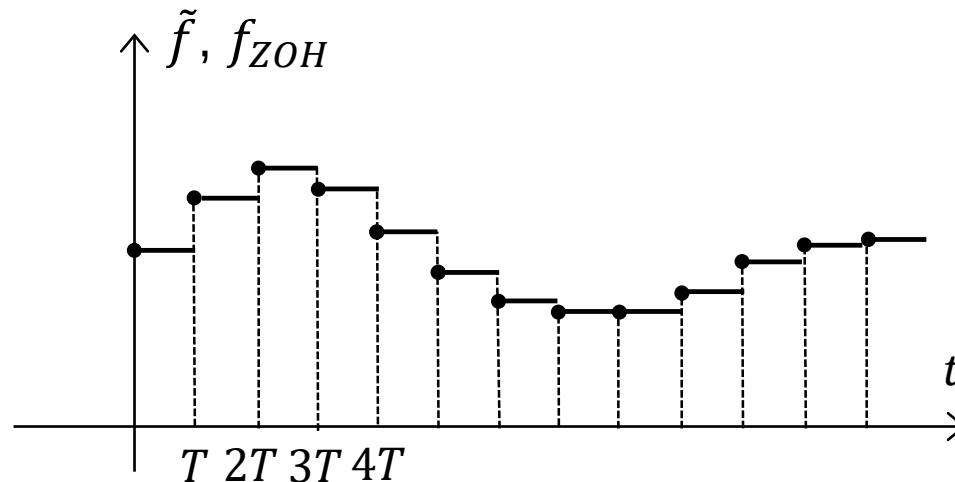
Quando il teorema del campionamento è violato emerge l'**aliasing**. Il sottocampionamento implica l'impossibilità di ricostruire il segnale a tempo continuo e nei sistemi di controllo a segnali campionati emergono disturbi (alias) che pregiudicano le prestazioni del sistema di controllo.

Per ovviare questo problema si utilizzano **filtri anti-aliasing** (di tipo passa-basso) di Butterworth o di Bessel per esempio.

Convertitore D/A



Il più comune è il **dispositivo di tenuta di ordine zero (zero-order hold)**



$$f_{ZOH}(t) = \tilde{f}(k) \quad \text{se } t \in [kT, (k+1)T), \quad k \in \mathbb{Z}$$

La trasformata zeta

Emerge la necessità di introdurre i segnali e i sistemi a tempo discreto: uno strumento fondamentale è la **trasformata Zeta** (Hurewicz 1947, Ragazzini, Zadeh 1952).

def.

Sia $x : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) un segnale a tempo discreto (anche sequenza o successione). La trasformata zeta di $x(k)$ è

$$\mathcal{Z}[x] \equiv \mathcal{Z}[x(k)] := \sum_{k=0}^{+\infty} x(k)z^{-k}$$

con z variabile complessa.

$$X(z) := \mathcal{Z}[x]$$

$$X(z) = x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \cdots + x(k)z^{-k} + \cdots$$

Se esistono $\rho > 0$ e $M > 0$ per i quali vale $|x(k)| \leq M \rho^k, k \geq 0$ allora $X(z)$ è analitica su $\mathbb{C} \setminus B_\rho$, ovvero per i valori $|z| > \rho$.

Esempi:

$$x(k) = a^k, \quad \mathcal{Z}[a^k] = \sum_{k=0}^{+\infty} a^k z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{a}{z} \right)^k = \frac{1}{1 - \frac{a}{z}} = \frac{z}{z - a}$$

convergente per $|z| > |a|$, per continuazione analitica

$X(z) = \frac{z}{z - a}$ è ben definita per ogni $z \neq a$.

Se $a = 1$ otteniamo $\mathcal{Z}[1^k] = \mathcal{Z}[1(k)] = \frac{z}{z - 1}$

Esempi:

La delta di Dirac discreta o impulso (a tempo) discreto è

$$\delta(k) = \begin{cases} 1 & \text{se } k = 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\mathcal{Z}[\delta(k)] = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta(k) z^{-k} = 1$$

Linearità della trasformata zeta:

Dati due segnali $x(k)$, $y(k)$ e $a, b \in \mathbb{C}$:

$$\mathcal{Z}[ax(k) + by(k)] = a\mathcal{Z}[x(k)] + b\mathcal{Z}[y(k)]$$

La regione di convergenza della trasformata zeta (ROC, region of convergence)

def. (regione di convergenza o ROC)

Data la sequenza $x(k)$, la regione di convergenza, ROC di $X(z)$ ($= \mathcal{Z}[x(k)]$) è definita da

$$\text{ROC} := \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| \sum_{k=0}^{\infty} x(k) z^{-k} \right| < \infty \right\}.$$

Proprietà

1. $X(z)$ è analitica su ROC.

2. Se ROC non è l'insieme vuoto:

$$\text{ROC} = \{z \in \mathbb{C} : |z| > \rho_c\}$$

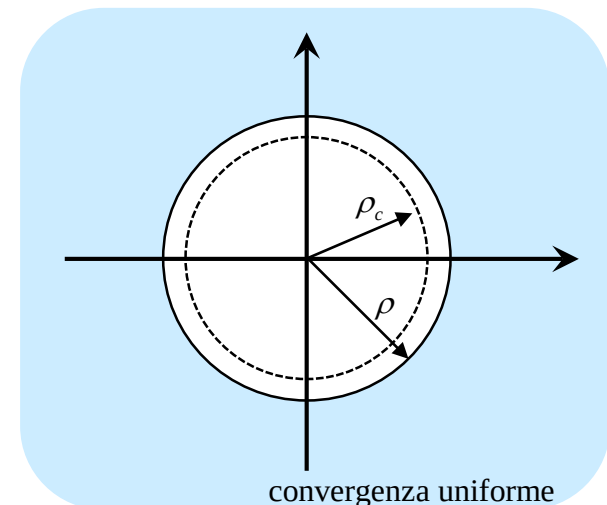
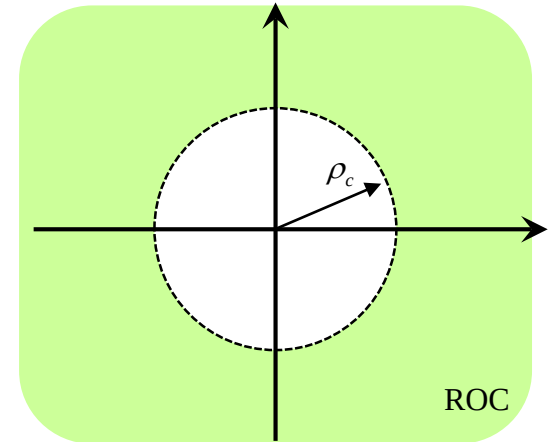
$\rho_c \equiv$ raggio di (assoluta) convergenza

$$\rho_c = \limsup_{k \rightarrow +\infty} |x(k)|^{1/k} := \lim_{k \rightarrow +\infty} \sup_{m \geq k} \left\{ |x(m)|^{1/m} \right\}$$

(formula di Hadamard)

3. Se $\rho > \rho_c$ la serie $\sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k}$ è convergente

uniformemente su $\{z \in \mathbb{C} : |z| \geq \rho\}$.



Esercizi:

$$\mathcal{Z}[\sin(\omega k)] = \frac{z \sin \omega}{z^2 - 2z \cos \omega + 1}$$

$$\mathcal{Z}[\cos(\omega k)] = \frac{z(z - \cos \omega)}{z^2 - 2z \cos \omega + 1}$$