

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica, Elettronica e delle
Telecomunicazioni

Lezione n. 18 di Fondamenti di Controlli Automatici
prof. Aurelio Piazzì

Proprietà della trasformata zeta

Università degli Studi di Parma – a.a. 2019-2020

Trasformata zeta di un segnale ritardato di n passi

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}[x(k-n)] &= z^{-n} \mathcal{Z}[x(k)] + \sum_{k=0}^{n-1} x(k-n) z^{-k} \\ &= z^{-n} \mathcal{Z}[x(k)] + x(-n) + x(-n+1)z^{-1} + \cdots + x(-1)z^{-n+1}\end{aligned}$$

Dim.: ...

Se le "condizioni iniziali" del segnale $x(k)$ sono nulle vale:

$$\mathcal{Z}[x(k-n)] = z^{-n} \mathcal{Z}[x(k)]$$

z^{-1} è l'operatore ritardo di un passo.

In generale vale:

$$\mathcal{Z}[x(k-n)1(k-n)] = z^{-n} \mathcal{Z}[x(k)]$$

Trasformata zeta di un segnale anticipato di n passi

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}[x(k+n)] &= z^n \mathcal{Z}[x(k)] - \sum_{i=0}^{n-1} x(i) z^{n-i} \\ &= z^n \mathcal{Z}[x(k)] - x(0)z^n - x(1)z^{n-1} - \dots - x(n-1)z\end{aligned}$$

Dim.: ...

z è l'operatore anticipo di un passo.

Esempi:

$$\mathcal{Z}[2^{k+2}] = \frac{4z}{z-2}; \quad \mathcal{Z}[\sin(k+1)] = \frac{\sin 1 \cdot z^2}{z^2 - 2 \cos 1 \cdot z + 1}$$

Teorema del valore iniziale

$$x(0) = \lim_{z \rightarrow +\infty} \mathcal{Z}[x(k)]$$

Dim.: ...

Esempio:

$$x(k) = \cos(k) + 4^k, \quad X(z) = \frac{z(z - \cos 1)}{z^2 - 2z \cos 1 + 1} + \frac{z}{z - 4},$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} X(z) = 2$$

Teorema del valore finale

Dato il segnale $x(k)$ per il quale il limite $\lim_{z \rightarrow +\infty} x(k)$ esiste ed è finito, vale

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} x(k) = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) \mathcal{Z}[x(k)]$$

Esempi:

$$x(k) = 0.8^k + 1, \quad X(z) = \frac{z}{z - 0.8} + \frac{z}{z - 1}, \quad \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)X(z) = 1 \quad \text{ok}$$

$$x(k) = \sin k, \quad X(z) = \frac{z \sin 1}{z^2 - 2z \cos 1 + 1}, \quad \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)X(z) = 0 \quad \text{!! non valido}$$

Teorema del valore finale (versione estesa)

Dato il segnale $x(k)$ sia $X(z) := \mathcal{Z}[x(k)]$.

1. Se $X(z)$ non ha poli nella regione $|z| \geq 1$ allora $\lim_{k \rightarrow +\infty} x(k) = 0$.
2. Se $X(z)$ non ha poli nella regione $|z| \geq 1$ ad eccezione di un polo semplice in $z = 1$ allora $x(k)$ converge per $k \rightarrow +\infty$ e vale
$$\lim_{k \rightarrow +\infty} x(k) = \text{Res}\{X(z), 1\} = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)X(z).$$
3. Se $X(z)$ ha un polo multiplo in $z = 1$, allora $x(k)$ non converge per $k \rightarrow +\infty$.
4. Se $X(z)$ ha un polo nella regione $|z| \geq 1$, $z \neq 1$, allora $x(k)$ non converge per $k \rightarrow +\infty$.

Esempi:

$$1. \quad X(z) = \frac{z-1}{\left(z - \frac{1}{2}\right)^2}, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} x(k) = 0$$

$$2. \quad X(z) = \frac{1}{(z-1)\left(z - \frac{1}{3}\right)}, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} x(k) = \text{Res}\{X(z), 1\} = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)X(z) = \frac{3}{2}$$

$$3. \quad X(z) = \frac{2z+1}{(z-1)^2\left(z - \frac{1}{2}\right)}, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} x(k) \text{ non converge}$$

$$4. \quad X(z) = \frac{1}{z+1}, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} x(k) \text{ non converge}$$

Trasformata zeta di $a^k x(k)$

$$\mathcal{Z}[a^k x(k)] = X\left(\frac{z}{a}\right)$$

Dim.: ...

Esempi

$$\mathcal{Z}[a^k \sin(\omega k)] = \mathcal{Z}[\sin(\omega k)]\left(\frac{z}{a}\right) = \frac{\frac{z}{a} \sin \omega}{\left(\frac{z}{a}\right)^2 - 2 \frac{z}{a} \cos \omega + 1} = \frac{za \sin \omega}{z^2 - 2za \cos \omega + a^2}$$

$$\mathcal{Z}[a^k \cos(\omega k)] = \mathcal{Z}[\cos(\omega k)]\left(\frac{z}{a}\right) = \frac{\frac{z}{a} \left(\frac{z}{a} - \cos \omega\right)}{\left(\frac{z}{a}\right)^2 - 2 \frac{z}{a} \cos \omega + 1} = \frac{z(z - a \cos \omega)}{z^2 - 2za \cos \omega + a^2}$$

Convoluzione (a tempo discreto)

Def.

La convoluzione dei segnali discreti $x(k)$ e $y(k)$ è definita come

$$(x * y)(k) \equiv x(k) * y(k) := \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x(k-i)y(i)$$

La convoluzione di $x(k)$ e $y(k)$ è il segnale ottenuto sommando infinite copie di $x(k)$ ciascuna delle quali è traslata in avanti di i passi e moltiplicata per $y(i)$. Per esempio se $y(k) = 0, k < 0$

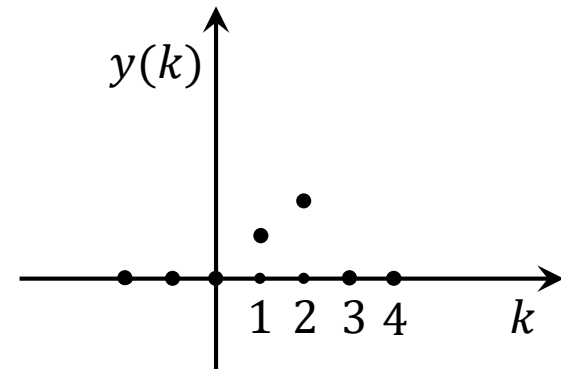
$$x(k) * y(k) = x(k)y(0) + x(k-1)y(1) + x(k-2)y(2) + \dots$$

$$x * y = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x(k-i)y(i)$$

Esempi

$$1. \quad x(k) = 0.5^k \quad y(k) = \begin{cases} 0 & k \leq 0 \\ 1 & k = 1 \\ 2 & k = 2 \\ 0 & k \geq 3 \end{cases}$$

$$x * y = 0.5^{k-1} + 2 \cdot 0.5^{k-2}$$



$$2. \quad x(k) = y(k) = 1(k) \quad x * y = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} 1(k-i)1(i)$$

$$1(k-i)1(i) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq i \leq k \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}, \quad (x * y)(k) = 0 \quad \text{se } k \leq -1$$

$$\text{Segue } 1(k) * 1(k) = (k+1)1(k)$$

Commutatività della convoluzione

$$x(k) * y(k) = y(k) * x(k)$$

Dim.: ...

Trasformata zeta della convoluzione

Se $x(k)$ e $y(k)$ sono segnali discreti tali che $x(k) = 0$, $y(k) = 0$ per $k < 0$ (segnali causali) allora

$$\mathcal{Z}[x * y] = X(z)Y(z)$$

Dim.: ...

Esempi

$$1. \mathcal{Z}[1(k) * 1(k)] = \mathcal{Z}[1(k)] \cdot \mathcal{Z}[1(k)] = \frac{z}{z-1} \cdot \frac{z}{z-1}$$

$$\Rightarrow \mathcal{Z}[(k+1)1(k)] = \frac{z^2}{(z-1)^2}$$

$$2. \text{ Se } x(k) = (k+1)1(k) \text{ segue } x(k-1) = k1(k-1) = k1(k)$$

$$\mathcal{Z}[x(k-1)] = z^{-1} \mathcal{Z}[x(k)] + x(-1)$$

$$\mathcal{Z}[k1(k)] = z^{-1} \frac{z^2}{(z-1)^2} + 0 = \frac{z}{(z-1)^2} \text{ (trasformata zeta della rampa)}$$

Derivata della trasformata zeta

Sia $x(k)$ un segnale discreto e $X(z)$ la corrispondente trasformata zeta. Nella regione in cui $X(z)$ è analitica vale

$$-z \frac{dX(z)}{dz} = \mathcal{Z}[k \cdot x(k)]$$

Dim.: ...

Esempi

1. Trasformata zeta della rampa

$$\mathcal{Z}[k] = \mathcal{Z}[k \cdot 1(k)] = -z \cdot \frac{d}{dz} \left(\frac{z}{z-1} \right) = -z \cdot \frac{z-1 - z \cdot 1}{(z-1)^2} = \frac{z}{(z-1)^2}$$

2. Trasformata zeta della parabola

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}[k^2] &= \mathcal{Z}[k \cdot k] = -z \cdot \frac{d}{dz} \mathcal{Z}[k] = -z \cdot \frac{d}{dz} \left(\frac{z}{(z-1)^2} \right) \\ &= -z \cdot \frac{(z-1)^2 - z \cdot 2(z-1)}{(z-1)^4} = -z \cdot \frac{z-1-2z}{(z-1)^3} = -z \cdot \frac{-z-1}{(z-1)^3} \\ &= \frac{z(z+1)}{(z-1)^3}\end{aligned}$$

$$\mathcal{Z}[1(k)] = \frac{z}{z-1}, \quad \mathcal{Z}[k1(k)] = \frac{z}{(z-1)^2}, \quad \mathcal{Z}[k^2 1(k)] = \frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$$