

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica, Elettronica e delle
Telecomunicazioni

Lezione n. 19 di Fondamenti di Controlli Automatici
prof. Aurelio Piazzì

Antitrasformazione Zeta

Università degli Studi di Parma – a.a. 2019-2020

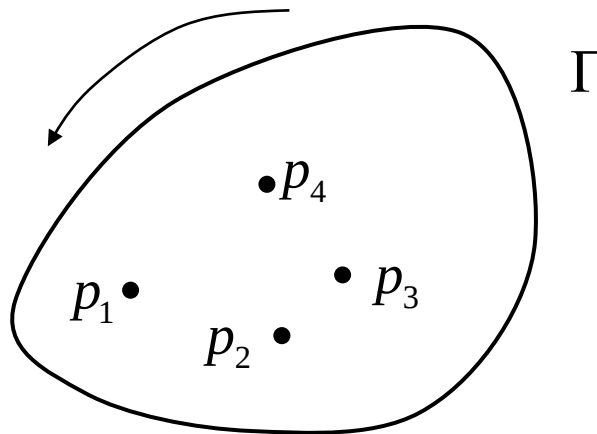
- Il teorema di antitrasformazione zeta
- Antitrasformazione zeta con il metodo dei residui
- Antitrasformazione zeta con il metodo dello sviluppo in fratti semplici
- Esercizi

Richiamo di analisi complessa

Teorema dei residui

Sia Γ una curva chiusa semplice e $f(z)$ una funzione analitica su Γ e nella sua regione interna ad eccezione dei punti singolari $p_1, p_2, \dots, p_n$ in essa contenuti. Allora

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz = 2\pi j \sum_{i=1}^n \text{Res}\{f, p_i\}.$$



Lemma

Sia $l \in \mathbb{Z}$, allora

$$\oint_{\Gamma} z^l dz = \begin{cases} 2\pi j & \text{se } l = -1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

dove Γ è una curva chiusa (semplice) che circonda l'origine di $\mathbb{C}$ percorsa in senso antiorario.

Il lemma può essere dimostrato facilmente utilizzando il teorema dei residui

Teorema (antitrasformazione zeta)

Sia $X(z)$ la trasformata zeta di una sequenza $x(k)$, allora

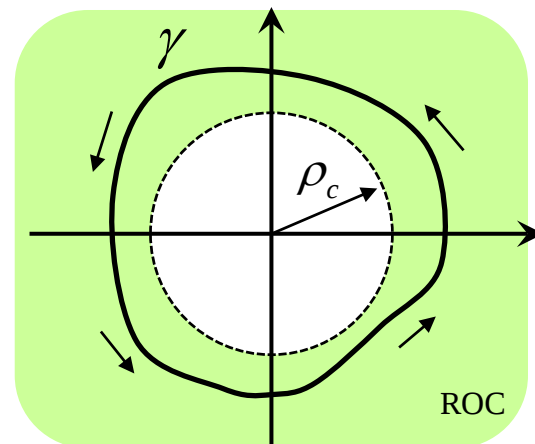
$$x(k) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\gamma} X(z) z^{k-1} dz$$

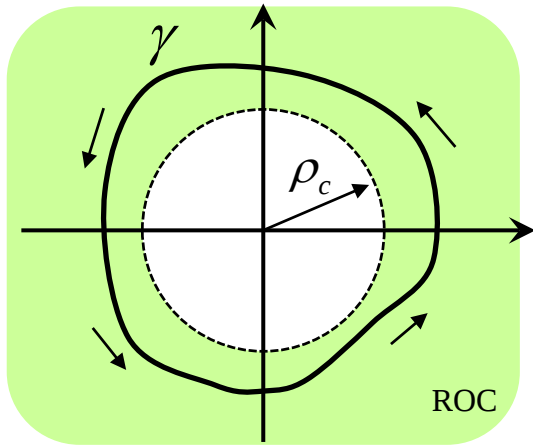
dove γ è una curva chiusa semplice, percorsa in senso antiorario, che circonda la regione di non convergenza di $Z[x(k)]$.

[La regione di non convergenza è

$$\mathbb{C} \setminus ROC = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \rho_c\} \subset \{\text{regione interna di } \gamma\}]$$

Formalmente $x(k) = \mathcal{Z}^{-1}[X(z)]$





$$x(k) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\gamma} X(z) z^{k-1} dz$$

Dim.:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi j} \oint_{\gamma} X(z) z^{k-1} dz &= \frac{1}{2\pi j} \oint_{\gamma} \left(\sum_{i=0}^{+\infty} x(i) z^{-i} \right) z^{k-1} dz \\ &= \frac{1}{2\pi j} \sum_{i=0}^{+\infty} x(i) \oint_{\gamma} z^{-i+k-1} dz = \frac{1}{2\pi j} x(k) \cdot 2\pi j = x(k) \quad \square \end{aligned}$$

$$x(k) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\gamma} X(z) z^{k-1} dz$$

Antitrasformazione zeta con il metodo dei residui

Applicando il teorema dei residui nel calcolo dell'integrale segue

$$x(k) = \frac{1}{2\pi j} \cdot 2\pi j \sum_i \text{Res} \{ X(z) \cdot z^{k-1}, p_i \}.$$

I valori p_i sono le singolarità distinte di $X(z) \cdot z^{k-1}$.

Quindi

$$x(k) = \sum_i \text{Res} \{ X(z) \cdot z^{k-1}, p_i \}.$$

Richiamo di una proprietà utile

Proprietà (sommatoria dei residui di una funzione razionale strettamente propria)

Sia $F(z) = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \cdots + b_0}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0}$ una funzione razionale

strettamente propria con $a_n \neq 0, b_m \neq 0$ e $p_1, p_2, \dots, p_h$ sono i suoi poli distinti. Segue allora

$$\sum_{i=1}^h \text{Res}\{F, p_i\} = \begin{cases} 0 & \text{se } n - m > 1 \\ \frac{b_m}{a_n} & \text{se } n - m = 1 \end{cases}$$

Calcolo di $\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{1}{z-a}\right]$ con il metodo dei residui

$$X(z) = \frac{1}{z-a}, \quad x(k) = \sum_i \text{Res}\left\{X(z) \cdot z^{k-1}, p_i\right\}$$

Se $k = 0$

$$x(0) = \sum_i \text{Res}\left\{\frac{1}{z-a} \cdot z^{-1}, p_i\right\} = \sum_i \text{Res}\left\{\frac{1}{z(z-a)}, p_i\right\} = 0$$

Se $k \geq 1$

$$x(k) = \text{Res}\left\{\frac{z^{k-1}}{z-a}, a\right\} = \cancel{(z-a)} \cdot \frac{z^{k-1}}{\cancel{z-a}} \Big|_{z=a} = a^{k-1}$$

$$\text{Quindi } \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{1}{z-a}\right] = a^{k-1}1(k-1)$$

Calcolo di $\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{1}{(z-a)^n}\right]$ con il metodo dei residui

$$X(z) = \frac{1}{(z-a)^n}, \quad x(k) = \sum_i \text{Res}\{X(z) \cdot z^{k-1}, p_i\}$$

Se $k = 0$

$$x(0) = \sum_i \text{Res}\left\{\frac{1}{(z-a)^n} \cdot z^{-1}, p_i\right\} = \sum_i \text{Res}\left\{\frac{1}{z(z-a)^n}, p_i\right\} = 0$$

Se $k \geq 1$

$$\begin{aligned} x(k) &= \text{Res}\left\{\frac{z^{k-1}}{(z-a)^n}, a\right\} = \frac{1}{(n-1)!} D^{n-1} \left[(z-a)^n \frac{z^{k-1}}{(z-a)^n} \right]_{z=a} \\ &= \frac{1}{(n-1)!} D^{n-1} [z^{k-1}]_{z=a} \end{aligned}$$

$$x(k) = \frac{1}{(n-1)!} D^{n-1} \left[z^{k-1} \right]_{z=a} \quad \text{se } k \geq 1$$

$$D^1 \left[z^{k-1} \right] = (k-1) z^{k-2}$$

$$D^2 \left[z^{k-1} \right] = (k-1)(k-2) z^{k-3}$$

$$D^3 \left[z^{k-1} \right] = (k-1)(k-2)(k-3) z^{k-4}$$

...

$$\begin{aligned} D^{n-1} \left[z^{k-1} \right] &= (k-1)(k-2) \cdots (k-(n-1)) z^{k-1-(n-1)} \\ &= (k-1)(k-2) \cdots (k-n+1) z^{k-n} \end{aligned}$$

$$x(k) = \frac{(k-1)(k-2) \cdots (k-n+1)}{(n-1)!} a^{k-n}$$

Riassumendo:

$$X(z) = \frac{1}{(z-a)^n}$$

$$x(0) = 0, \quad x(k) = \frac{(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)}{(n-1)!} a^{k-n}$$

Quindi

$$\mathcal{Z}^{-1} \left[\frac{1}{(z-a)^n} \right] = \frac{(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)}{(n-1)!} a^{k-n} 1(k-n)$$

Si noti

$$x(0) = 0, \quad x(1) = 0, \quad x(2) = 0, \quad \dots, \quad x(n-1) = 0,$$

$$x(n) = 1, \quad x(n+1) = na, \quad x(n+2) = \frac{(n+1)n}{2} a^2, \quad x(n+3) = \frac{(n+2)(n+1)n}{3!} a^3, \dots$$

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{1}{(z-a)^n}\right] = \frac{(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)}{(n-1)!} a^{k-n} 1(k-1)$$

Utilizzando la definizione di coefficiente binomiale

$$\binom{l}{m} = \frac{l!}{m!(l-m)!} = \frac{l(l-1)\cdots(l-m+1)}{m!}$$

si può riscrivere la formula trovata come

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{1}{(z-a)^n}\right] = \binom{k-1}{n-1} a^{k-n} 1(k-1)$$

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{1}{(z-a)^n}\right] = \frac{(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)}{(n-1)!} a^{k-n} 1(k-1) = \binom{k-1}{n-1} a^{k-n} 1(k-1)$$

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{(z-a)^n}\right] = ? \text{ si può evitare di riapplicare il metodo dei residui}$$

$$x(k) = \binom{k-1}{n-1} a^{k-n} 1(k-1), \quad X(z) = \frac{1}{(z-a)^n}$$

$$\mathcal{Z}[x(k+1)] = zX(z) - x(0)z = zX(z)$$

$$\mathcal{Z}^{-1}[zX(z)] = x(k+1)$$

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{(z-a)^n}\right] = \binom{k}{n-1} a^{k+1-n} 1(k)$$

anche esprimibile come

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{(z-a)^n}\right] = \frac{k(k-1)\cdots(k-n+2)}{(n-1)!} a^{k+1-n} 1(k)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{1}{(z-a)^n}\right] &= \frac{(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)}{(n-1)!} a^{k-n} \cdot 1(k-1) \\ &= \binom{k-1}{n-1} a^{k-n} \cdot 1(k-1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{(z-a)^n}\right] &= \frac{k(k-1)\cdots(k-n+2)}{(n-1)!} a^{k+1-n} \cdot 1(k) \\ &= \binom{k}{n-1} a^{k+1-n} \cdot 1(k)\end{aligned}$$

Casi particolari

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{1}{z-a}\right] = a^{k-1} \cdot 1(k-1)$$

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{1}{(z-a)^2}\right] = (k-1)a^{k-2} \cdot 1(k-1)$$

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{1}{(z-a)^3}\right] = \frac{(k-1)(k-2)}{2} a^{k-3} \cdot 1(k-1)$$

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{z-a}\right] = a^k \cdot 1(k)$$

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{(z-a)^2}\right] = ka^{k-1} \cdot 1(k)$$

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{(z-a)^3}\right] = \frac{k(k-1)}{2} a^{k-2} \cdot 1(k)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{k}{s-p} + \frac{\bar{k}}{s-\bar{p}}\right] = 2|k|e^{\operatorname{Re} p \cdot t} \cos(\operatorname{Im} p \cdot t + \arg k)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{a+jb}{s-(\alpha+j\beta)} + \frac{a-jb}{s-(\alpha-j\beta)}\right] = 2e^{\alpha t} [a \cos(\beta t) - b \sin(\beta t)]$$

Antitrasformata zeta di fratti complessi

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{c}{z-p} + \frac{\bar{c}}{z-\bar{p}}\right] = 2|c||p|^{k-1} \cos[\arg(p)(k-1) + \arg(c)] \cdot 1(k-1)$$

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[c \frac{z}{z-p} + \bar{c} \frac{z}{z-\bar{p}}\right] = 2|c||p|^k \cos[\arg(p)k + \arg(c)] \cdot 1(k)$$

oppure equivalentemente

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{a+jb}{z-p} + \frac{a-jb}{z-\bar{p}}\right] = 2|p|^{k-1} \{a \cos[\arg(p)(k-1)] - b \sin[\arg(p)(k-1)]\} \cdot 1(k-1)$$

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[(a+jb) \frac{z}{z-p} + (a-jb) \frac{z}{z-\bar{p}}\right] = 2|p|^k \{a \cos[\arg(p) \cdot k] - b \sin[\arg(p) \cdot k]\} \cdot 1(k)$$

Antitrasformazione zeta con il metodo dello sviluppo in fratti semplici

$$F(z) = \frac{b(z)}{(z - p_1)^{r_1} (z - p_2)^{r_2} \cdot \dots \cdot (z - p_h)^{r_h}}$$

$$p_i \neq p_j \text{ se } i \neq j; \quad \sum_{i=1}^h r_i = n, \quad \deg(b(z)) \leq n$$

$$F(z) = c_0 + \frac{c_{1,1}}{(z - p_1)^{r_1}} + \dots + \frac{c_{1,r_1}}{z - p_1} + \dots + \frac{c_{h,1}}{(z - p_h)^{r_h}} + \dots + \frac{c_{h,r_h}}{z - p_h}$$

$$c_0 = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z)$$

$$c_{i,j} = \frac{1}{(j-1)!} D^{j-1} \left[(z - p_i)^{r_i} F(z) \right] \bigg|_{z=p_i} \quad i = 1, \dots, h, \quad j = 1, \dots, r_i$$

Esercizi

Determinare i segnali discreti le cui trasformate zeta sono:

$$1) X(z) = \frac{2z + 3}{(z - 1)(z - 2)(z - 3)}$$

$$2) X(z) = \frac{2z^3 + z + 1}{(z - 1)(z - 2)^2}$$

Trasformate notevoli

$$\mathcal{Z} \left[\binom{k}{n-1} a^{k-(n-1)} \right] = \frac{z}{(z-a)^n}$$

$$\mathcal{L} \left[\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{at} \right] = \frac{1}{(s-a)^n}$$