

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica, Elettronica e delle
Telecomunicazioni

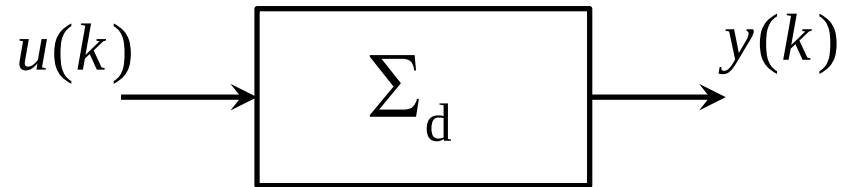
Lezione n. 20 di Fondamenti di Controlli Automatici
prof. Aurelio Piazzì

Sistemi a tempo discreto

Università degli Studi di Parma – a.a. 2019-2020

- Generalità sui sistemi a tempo discreto
- Risposta di un sistema lineare a tempo discreto e la funzione di trasferimento
- Conversione continuo/discreto di un sistema con il mantentore di ordine zero
- Esercizi

Generalità sui sistemi a tempo discreto



Un sistema (a tempo) discreto è un "processo" per il quale assegnato un segnale di ingresso a tempo discreto $u(k)$ determina un corrispondente segnale di uscita a tempo discreto $y(k)$ ($x: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}, y: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$).

Esempi

- 1) $y(k) = Cu(k)$, sistema algebrico lineare
- 2) $y(k) = (u(k))^2$ sistema algebrico non lineare
- 3) $y(k) = u(k) - u(k - 1)$ sistema "differenza" (dinamico e lineare)

Def. (**behavior** di Σ_d)

$$\mathcal{B}_d := \{(u, y) : y(k) \text{ è l'uscita di } \Sigma_d \text{ corrispondente all'ingresso } u(k)\}$$

Def. (**linearità** di Σ_d)

Un sistema si dice lineare quando soddisfa la proprietà di sovrapposizione degli effetti: $\forall (u_1, y_1), (u_2, y_2) \in \mathcal{B}_d$ e $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$$\alpha_1(u_1, y_1) + \alpha_2(u_2, y_2) := (\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) \in \mathcal{B}_d$$

(In modo equivalente, Σ_d è lineare quando $\mathcal{B}_d$ è uno spazio vettoriale)

Def. (**stazionarietà** di Σ_d)

Un sistema si dice stazionario (invariante nel tempo) se per ogni $n \in \mathbb{Z}$:

$$(u(k), y(k)) \in \mathcal{B}_d \Rightarrow (u(k-n), y(k-n)) \in \mathcal{B}_d$$

Equazione alle differenze di un sistema discreto ($n, m \in \mathbb{Z}, m \leq n$)

$$f(y(k), y(k-1), \dots, y(k-n)) = g(u(k-n+m), u(k-n+m-1), \dots, u(k-n))$$

Se f e g sono funzioni lineari degli argomenti si ottiene:

$$\begin{aligned} a_n y(k) + a_{n-1} y(k-1) + \dots + a_0 y(k-n) = \\ = b_m u(k-n+m) + b_{m-1} u(k-n+m-1) + \dots + b_0 u(k-n) \end{aligned}$$

E' un'equazione alle differenze di un sistema discreto lineare (e stazionario).

Affinché l'eq. alle diff. sia ben posta si assume

$$a_n \neq 0, b_m \neq 0, \{a_0 \neq 0\} \vee \{b_0 \neq 0\}, m \leq n \text{ (causalità)}$$

n ordine di Σ_d

$n - m$ grado relativo di Σ_d

Risposta di un sistema lineare a tempo discreto e la funzione di trasferimento

Definita l'eq. alle differenze, modello matematico di Σ_d

$$a_n y(k) + a_{n-1} y(k-1) + \dots + a_0 y(k-n) = \\ = b_m u(k-n+m) + b_{m-1} u(k-n+m-1) + \dots + b_0 u(k-n)$$

$$(a_n \neq 0, b_m \neq 0, \{a_0 \neq 0\} \vee \{b_0 \neq 0\}, m \leq n),$$

assegnato l'ingresso $u(k)$, $k \geq 0$ e le condizioni iniziali (estese)

$$y(-1), y(-2), \dots, y(-n)$$

$$u(-1), u(-2), \dots, u(-n)$$

determinare l'uscita $y(k)$, $k \geq 0$.

Si noti che le condizioni iniziali esatte sono

$$y(-1), y(-2), \dots, y(-n + n_0)$$

$$u(-1), u(-2), \dots, u(-n + m_0)$$

$$n_0 := \min \{i \in \{0, 1, \dots, n-1\} : a_i \neq 0\}, m_0 := \min \{i \in \{0, 1, \dots, m-1\} : b_i \neq 0\}$$

$$a_n y(k) + a_{n-1} y(k-1) + \dots + a_0 y(k-n) = b_m u(k-n+m) + b_{m-1} u(k-n+m-1) + \dots + b_0 u(k-n)$$

Soluzione

L'eq. alle differenze può essere riscritta come

$$a_n y(k) + a_{n-1} y(k-1) + \dots + a_0 y(k-n) = b_n u(k) + b_{n-1} u(k-1) + \dots + b_0 u(k-n)$$

$$m := \max \{i \in \{0, 1, \dots, n\} : b_i \neq 0\}$$

$$\sum_{i=0}^n a_i y(k-n+i) = \sum_{i=0}^n b_i u(k-n+i)$$

$$\sum_{i=0}^n a_i \mathcal{Z}[y(k-n+i)] = \sum_{i=0}^n b_i \mathcal{Z}[u(k-n+i)]$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i \mathcal{Z}[y(k-n+i)] + a_n Y(z) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i \mathcal{Z}[u(k-n+i)] + b_n U(z)$$

$$\mathcal{Z}[x(k-n)] = z^{-n} \mathcal{Z}[x(k)] + \sum_{k=0}^{n-1} x(k-n) z^{-k}$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i \mathcal{Z}[y(k-n+i)] + a_n Y(z) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i \mathcal{Z}[u(k-n+i)] + b_n U(z)$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-1} a_i \left\{ z^{-(n-i)} Y(z) + \sum_{k=0}^{n-i-1} y(k-n+i) z^{-k} \right\} + a_n Y(z) = \\ = \sum_{i=0}^{n-1} b_i \left\{ z^{-(n-i)} U(z) + \sum_{k=0}^{n-i-1} u(k-n+i) z^{-k} \right\} + b_n U(z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-1} a_i z^i Y(z) + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-i-1} a_i y(k-n+i) z^{n-k} + a_n z^n Y(z) = \\ = \sum_{i=0}^{n-1} b_i z^i U(z) + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-i-1} b_i u(k-n+i) z^{n-k} + b_n z^n U(z) \end{aligned}$$

$$\sum_{i=0}^n a_i z^i Y(z) + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-i-1} a_i y(k-n+i) z^{n-k} = \sum_{i=0}^n b_i z^i U(z) + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-i-1} b_i u(k-n+i) z^{n-k}$$

$$\sum_{i=0}^n a_i z^i Y(z) + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-i-1} a_i y(k-n+i) z^{n-k} = \sum_{i=0}^n b_i z^i U(z) + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-i-1} b_i u(k-n+i) z^{n-k}$$

$$a(z)Y(z) = b(z)U(z) + c(z)$$

$$a(z) := \sum_{i=0}^n a_i z^i, \quad b(z) := \sum_{i=0}^n b_i z^i$$

$$c(z) := \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-i-1} b_i u(k-n+i) z^{n-k} - \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-i-1} a_i y(k-n+i) z^{n-k}$$

$$c(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \cdots + c_1 z$$

$$Y(z) = \frac{b(z)}{a(z)} U(z) + \frac{c(z)}{a(z)}$$

$$Y(z) = Y_{\text{for.}}(z) + Y_{\text{lib.}}(z), \quad Y_{\text{for.}}(z) = \frac{b(z)}{a(z)} U(z), \quad Y_{\text{lib.}}(z) = \frac{c(z)}{a(z)}$$

$$y(k) = y_{\text{for.}}(k) + y_{\text{lib.}}(k), \quad y_{\text{for.}}(k) = \mathcal{Z}^{-1} \left[\frac{b(z)}{a(z)} U(z) \right], \quad y_{\text{lib.}}(k) = \mathcal{Z}^{-1} \left[\frac{c(z)}{a(z)} \right]$$

Def. (**funzione di trasferimento di Σ_d**)

Si definisce funzione di trasferimento di un sistema discreto Σ_d la funzione $H(z)$ per la quale

$$\mathcal{Z}[y(k)] = H(z)\mathcal{Z}[u(k)]$$

per ogni $(u, y) \in \mathcal{B}_d$ tale che $u(k) = 0, y(k) = 0, k < 0$.

$$\text{Quindi la f.d.t. di } \Sigma_d \text{ è } H(z) = \frac{b(z)}{a(z)} = \frac{\sum_{i=0}^m b_i z^i}{\sum_{i=0}^n a_i z^i} = \frac{b_m z^m + \dots + b_0}{a_n z^n + \dots + a_0}$$

$Y_{\text{for.}}(z) = H(z)U(z)$, se $u(k) = \delta(k)$ segue che $U(z) = 1$

La risposta all'impulso è $h(k) = \mathcal{Z}^{-1}[H(z)]$, si considera $h(k) = 0, k < 0$.

Viceversa nota la risposta all'impulso $H(z) = \mathcal{Z}[h(k)]$.

Dal teorema di convoluzione segue $y_{\text{for.}}(k) = \sum_{i=0}^k h(k-i)u(i)$

Analisi della risposta libera

Proprietà (struttura della risposta libera)

La risposta libera di Σ_d a seguito di perturbazioni è caratterizzata da

$$Y_{\text{lib.}}(z) = \frac{c(z)}{a(z)}, \quad c(z) = c_n z^n + \cdots + c_1 z$$

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 & 0 & & 0 \\ b_1 & b_0 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 0 \\ b_{n-1} & & b_1 & b_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(-1) \\ u(-2) \\ \\ u(-n) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_0 & 0 & & 0 \\ a_1 & a_0 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n-1} & & a_1 & a_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(-1) \\ y(-2) \\ \\ y(-n) \end{bmatrix}$$

Dim.

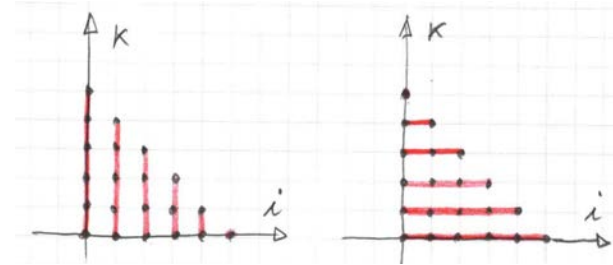
$$Y_{\text{lib.}}(z) = \frac{c(z)}{a(z)}, \quad c(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \cdots + c_1 z = \sum_{l=1}^n c_l z^l$$

(continua)

(continua)

$$c(z) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-i-1} b_i u(k-n+i) z^{n-k} - \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-i-1} a_i y(k-n+i) z^{n-k}$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-i-1} \equiv \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{n-k-1}$$



$$\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-i-1} b_i u(k-n+i) z^{n-k} = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{n-k-1} b_i u(k-n+i) z^{n-k} \stackrel{n-k=l}{=} \sum_{l=n}^1 \sum_{i=0}^{l-1} b_i u(-l+i) z^l$$

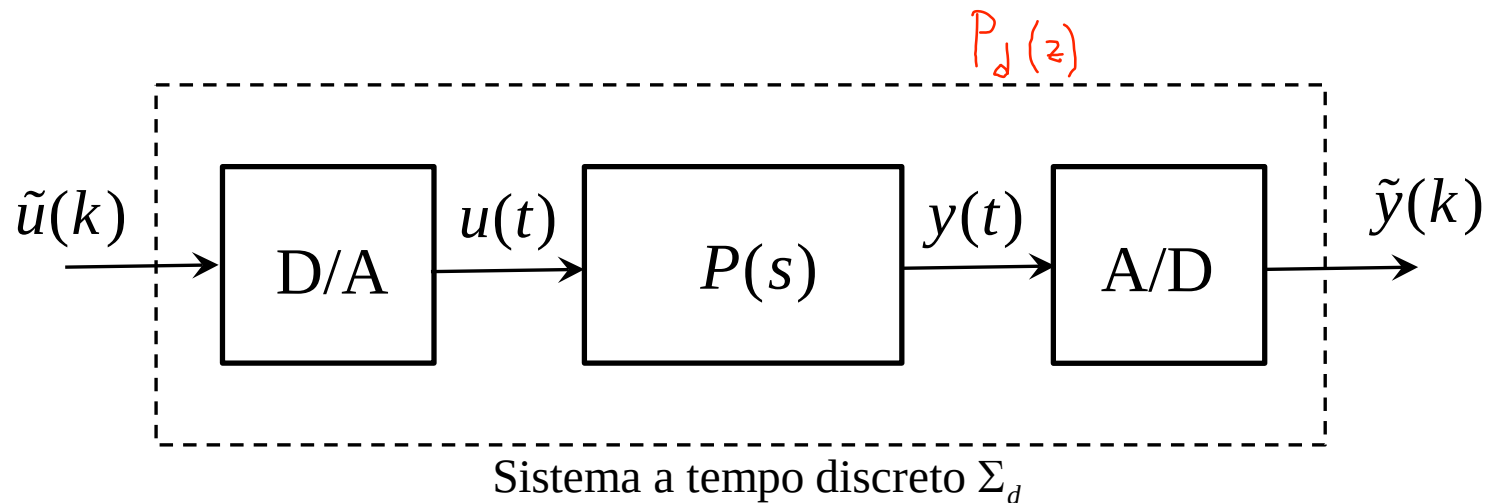
$$= \sum_{l=1}^n \sum_{i=0}^{l-1} b_i u(i-l) z^l \stackrel{i-l=-j}{=} \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^1 b_{l-j} u(-j) z^l = \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^l b_{l-j} u(-j) z^l$$

$$c(z) = \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^l b_{l-j} u(-j) z^l - \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^l a_{l-j} y(-j) z^l = \sum_{l=1}^n \left(\sum_{j=1}^l b_{l-j} u(-j) - \sum_{j=1}^l a_{l-j} y(-j) \right) \cdot z^l$$

$$c_l = \sum_{j=1}^l b_{l-j} u(-j) - \sum_{j=1}^l a_{l-j} y(-j), \quad l = 1, 2, \dots, n$$

□

Conversione continuo/discreto di un sistema con il mantenitore di ordine zero



Il tempo di campionamento sia T ($\tilde{y}(k) = y(kT)$) e il convertitore D/A sia un mantenitore (dispositivo di tenuta) di ordine zero. Si determini la funzione di trasferimento $P_d(z)$ di Σ_d .

Def. (Trasformata zeta di un segnale a tempo continuo campionato)

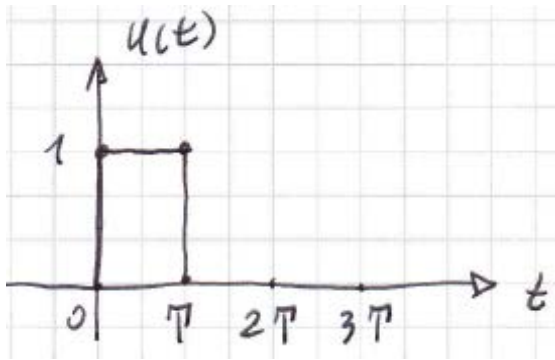
Sia $f(t)$ un segnale a tempo continuo e $F(s)$ la corrispondente trasformata di Laplace.

$$\mathcal{Z}[f(t), T] \triangleq \mathcal{Z}[f(kT)]$$

$$\mathcal{Z}[F(s), T] \triangleq \mathcal{Z}\left[\mathcal{L}^{-1}[F(s)]_{t=kT}\right]$$

(Si noti che $\mathcal{Z}[f(t), T] \equiv \mathcal{Z}[F(s), T]$)

Determiniamo $P_d(z)$ come trasformata zeta della risposta all'impulso applicato all'ingresso del mantenitore di ordine zero: $\tilde{u}(k) = \delta(k)$.



$$u(t) = 1(t) - 1(t - T)$$

$$\text{quindi } y(t) = p_s(t) - p_s(t - T)$$

con $p_s(t)$ risposta di $P(s)$ al gradino unitario $1(t)$

$$\left(p_s(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{P(s)}{s} \right] \right)$$

$$\tilde{y}(k) = p_s(kT) - p_s(kT - T) = p_s(kT) - p_s((k-1)T)$$

$$P_d(z) = \mathcal{Z}[\tilde{y}(k)]$$

$$= \mathcal{Z}[p_s(kT)] - \mathcal{Z}[p_s((k-1)T)] = \mathcal{Z}[p_s(kT)] - z^{-1} \mathcal{Z}[p_s(kT)]$$

$$= (1 - z^{-1}) \mathcal{Z}[p_s(kT)] = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left[\frac{P(s)}{s}, T \right]$$

$$P_d(z) = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left[\frac{P(s)}{s}, T \right]$$

Esercizi

1) Un sistema discreto è descritto dall'eq.

$$y(k+2) = y(k+1) - 0.24y(k) + u(k+2).$$

a) Scrivere in forma standard l'eq. alle differenze e determinare ordine e grado relativo del sistema.

b) Determinare la funzione di trasferimento.

2) Dato un sistema discreto del secondo ordine di equazione

$$a_2y(k) + a_1y(k-1) + a_0y(k-2) = b_2u(k) + b_1u(k-1) + b_0u(k-2)$$

determinare la trasformata zeta dell'uscita $Y(z)$ note la trasformata dell'ingresso $U(z)$ e le condizioni iniziali

$$y_{-1} := y(-1), y_{-2} := y(-2), u_{-1} := u(-1), u_{-2} := u(-2)$$

3) Determinare l'eq. alle differenze di un sistema tempo discreto la cui risposta all'impulso è

$$h(k) = 8 \cdot 1(k-1) - \frac{5}{2}(k-1) \left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} \cdot 1(k-1) - 7 \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \cdot 1(k-1), \quad k \geq 0$$