

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica, Elettronica e delle
Telecomunicazioni

Lezione n. 21 di Fondamenti di Controlli Automatici
prof. Aurelio Piazzì

Stabilità dei sistemi a tempo discreto

Università degli Studi di Parma – a.a. 2019-2020

- **Stati di equilibrio e stabilità**
- **Metodi per lo studio della stabilità asintotica**
- **Cenni sui metodi di sintesi dei controllori discreti**
- **Esercizi**

Stati di equilibrio e stabilità

Sistema a tempo discreto Σ_d :

$$\begin{aligned} a_n y(k) + a_{n-1} y(k-1) + \dots + a_0 y(k-n) = \\ = b_m u(k-n+m) + b_{m-1} u(k-n+m-1) + \dots + b_0 u(k-n) \end{aligned}$$

$$H(z) = \frac{b(z)}{a(z)} = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_0}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0}$$

Guadagno statico di Σ_d : $H(1)$; se $y_c = H(1)u_c$ segue $(u_c, y_c) \in \mathcal{B}_d$

La presenza dei valori costanti u_c e $y_c = H(1)u_c$ caratterizza uno stato di equilibrio del sistema. Studiamo la stabilità dell'equilibrio $u_c = 0$ e $y_c = 0$.

Sia $u(k) = 0, y(k) = 0$ per $k < -n$ e la perturbazione sia data congiuntamente da

1) $u(k) \neq 0$ per $k = -n, -n+1, \dots, -1$ (perturbazione dell'ingresso)

2) $y(k) \neq 0$ per $k = -n, -n+1, \dots, -1$ (perturbazione imposta sull'uscita)

Dall'istante $k = 0$ in poi cessa la perturbazione: $u(k) = 0$ e $y(k) = y_{\text{lib.}}(k)$, $k \geq 0$.

Def. : Stabilità (alle perturbazioni) di Σ_d

Il sistema Σ_d si dice:

1. STABILE se per ogni perturbazione $y_{\text{lib.}}(k)$ è limitata per $k \geq 0$.
2. ASINTOTICAMENTE STABILE se Σ_d è stabile ed inoltre
$$\lim_{k \rightarrow +\infty} y_{\text{lib.}}(k) = 0 \text{ per ogni perturbazione introdotta.}$$
3. SEMPLICEMENTE (o marginalmente) STABILE se Σ_d è stabile ed inoltre esiste una perturbazione per la quale
$$\lim_{k \rightarrow +\infty} y_{\text{lib.}}(k) = y_{\infty} \neq 0 \vee \left\{ \text{non esiste } \lim_{k \rightarrow +\infty} y_{\text{lib.}}(k) \right\}.$$
4. INSTABILE se Σ_d non è stabile.

Teorema sulla stabilità alle perturbazioni

Sia Σ_d caratterizzato dalla f.d.t. $H(z)$ con $a(z)$ e $b(z)$ coprimi.

1. Σ_d è STABILE se e solo se tutti i suoi poli appartengono al cerchio unitario e quelli sulla frontiera del cerchio unitario (cioè sulla circonferenza unitaria) hanno molteplicità uguale a 1.
2. Σ_d è ASINTOTICAMENTE STABILE se e solo se tutti i suoi poli appartengono all'interno del cerchio unitario.
3. Σ_d è SEMPLICEMENTE (o marginalmente) STABILE se e solo se tutti i suoi poli appartengono al cerchio unitario e quelli sulla circonferenza unitaria (ne deve esistere almeno uno) hanno molteplicità uguale a 1.
4. Σ_d è INSTABILE se e solo se almeno un polo è esterno al cerchio unitario o almeno un polo è sulla circonferenza unitaria con molteplicità maggiore di 1.

Nota: Se $a(z)$ e $b(z)$ non sono coprimi fra loro, il teorema di stabilità ammette la medesima formulazione sostituendo i “poli” con le “radici di $a(z)$ ”. [$a(z)$ è polinomio caratteristico del sistema]

$$\mathcal{Z} \left[\binom{k}{n-1} a^{k-(n-1)} \cdot 1(k) \right] = \frac{z}{(z-a)^n}$$

Dimostrazione del teorema (punto 2)

2. Σ_d è asintoticamente stabile se e solo se $|p_i| < 1, i = 1, \dots, l$.

Sufficienza ($|p_i| < 1 \Rightarrow \Sigma_d$ è asint. stabile)

$$a(z) = (z - p_1)^{r_1} \cdots (z - p_l)^{r_l}, \quad p_i \neq p_j \text{ se } i \neq j$$

La risposta libera di Σ_d a seguito di perturbazioni è caratterizzata da

$$Y_{\text{lib.}}(z) = \frac{c(z)}{a(z)}, \quad c(z) = c_n z^n + \cdots + c_1 z$$

$$Y_{\text{lib.}}(z) = z \cdot \frac{c_n z^{n-1} + \cdots + c_1}{(z - p_1)^{r_1} \cdots (z - p_l)^{r_l}} = d_{1,1} \frac{z}{(z - p_1)^{r_1}} + \cdots + d_{1,r_1} \frac{z}{z - p_1} + \cdots \cdots$$

$$+ d_{l,1} \frac{z}{(z - p_l)^{r_l}} + \cdots + d_{l,r_l} \frac{z}{z - p_l}$$

$$y_{\text{lib.}}(k) = d_{1,1} \binom{k}{r_1 - 1} p_1^{k-(r_1-1)} + d_{1,2} \binom{k}{r_1 - 2} p_1^{k-(r_1-2)} + \cdots + d_{1,r_1} p_1^k + \cdots \cdots$$

$$y_{\text{lib.}}(k) = d_{1,1} \binom{k}{r_1-1} p_1^{k-(r_1-1)} + d_{1,2} \binom{k}{r_1-2} p_1^{k-(r_1-2)} + \dots + d_{1,r_1} p_1^k + \dots \dots$$

$$+ d_{l,1} \binom{k}{r_l-1} p_l^{k-(r_l-1)} + d_{l,2} \binom{k}{r_l-2} p_l^{k-(r_l-2)} + \dots + d_{l,r_l} p_l^k$$

$$\binom{k}{r} = \frac{k!}{r!(k-r)!} = \frac{k(k-1)\dots(k-r+1)}{r!} \quad (\text{polinomio in } k \text{ di grado } r).$$

Tutti gli addendi di $y_{\text{lib.}}(k)$ convergono a 0 per $k \rightarrow \infty$ in quanto se $|p| < 1$ allora $\lim_{k \rightarrow +\infty} k^n p^k = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Necessità (Σ_d è asint. stabile $\Rightarrow |p_i| < 1$)

Si ragiona per assurdo. Esiste $j \in \{1, \dots, l\}$ tale che $|p_j| \geq 1$.

Costruiamo una particolare perturbazione per la quale $Y_{\text{lib.}}(z) = \frac{z}{z - p_j}$.

$$Y_{\text{lib.}}(z) = \frac{c(z)}{a(z)} = \frac{c_n z^n + \dots + c_1 z}{\prod_{i=1}^l (z - p_i)^{r_i}} = \frac{(c_n z^{n-1} + \dots + c_1) \cdot z}{\left(\prod_{i \neq j}^l (z - p_i)^{r_i} \right) (z - p_j)^{r_j-1} (z - p_j)}$$

$$\text{Sia } c_n z^{n-1} + \dots + c_1 = \left(\prod_{i \neq j} (z - p_i)^{r_i} \right) (z - p_j)^{r_j-1}.$$

Considerato che $a_0 \neq 0$ o $b_0 \neq 0$ esistono sempre condizioni iniziali (ovvero la perturbazione) per le quali si ottengono i coefficienti c_i desiderati:

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_0 & \ddots \\ & \ddots & \ddots & 0 \\ b_{n-1} & b_1 & b_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(-1) \\ u(-2) \\ \vdots \\ u(-n) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_0 & \ddots \\ & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n-1} & a_1 & a_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(-1) \\ y(-2) \\ \vdots \\ y(-n) \end{bmatrix}$$

Quindi $y_{\text{lib.}}(k) = p_j^k$ ed evidentemente questa risposta libera non converge a zero per $k \rightarrow \infty$. Questo contraddice l'ipotesi di $y_{\text{lib.}}(k)$ convergente asintoticamente a zero per ogni perturbazione (Σ_d asint. stabile). $\square$

Def. : Stabilità BIBO di Σ_d

Il sistema Σ_d si dice BIBO stabile se per ogni azione forzante limitata la corrispondente risposta forzata è anch'essa limitata.

[Formalmente: $\forall (u, y) \in \mathcal{B}_d$ con $u(k) = 0, y(k) = 0$ per $k < 0$ e $\|u(k)\|_\infty < +\infty$
 $\Rightarrow \|y(k)\|_\infty < +\infty$]

Teorema sulla stabilità BIBO

Il sistema Σ_d è BIBO stabile se e solo se $\sum_{k=0}^{+\infty} |h(k)| < +\infty$ ($h(k)$ è la risposta all'impulso di Σ_d).

Teorema (equivalenza fra stabilità BIBO e stabilità asintotica)

Il sistema Σ_d è BIBO stabile se e solo se Σ_d è asintoticamente stabile.

Metodi per lo studio della stabilità asintotica

Per stabilire la stabilità asintotica di Σ_d :

1. Calcolo delle radici di $a(z)$
2. Trasformazione bilineare e criterio di Routh
3. Criterio di Jury

Proposizione (trasformazione bilineare)

La trasformazione bilineare $w = T(z)$ definita come

$$w = T(z) = \frac{z-1}{z+1}$$

per $z \neq -1$ soddisfa le relazioni

$$\operatorname{Re}(w) > 0 \Leftrightarrow |z| > 1$$

$$\operatorname{Re}(w) = 0 \Leftrightarrow |z| = 1$$

$$\operatorname{Re}(w) < 0 \Leftrightarrow |z| < 1$$

La trasformazione bilineare è biunivoca con dominio $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$ e codominio $\mathbb{C} \setminus \{1\}$:

$$T : \mathbb{C} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{1\}, \quad z \rightarrow w = T(z) = \frac{z-1}{z+1}$$

La trasformazione bilineare inversa è

$$T^{-1} : \mathbb{C} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{-1\}, \quad w \rightarrow z = T^{-1}(w) = \frac{1+w}{1-w}$$

Proposizione

Il polinomio $a(z)$ ha tutte le radici di modulo minore di 1 se e solo se

1. $a(-1) \neq 0$;
2. gli zeri di $a\left(\frac{1+w}{1-w}\right)$ sono tutti a parte reale negativa.

Introduzione al criterio di Jury

Proposizione

Sia dato il polinomio $a(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$ con $a_n > 0$.

Affinché $a(z)$ abbia tutte le radici con modulo minore di 1 è necessario che siano soddisfatte le disuguaglianze:

1. $a(1) > 0$;
2. $(-1)^n a(-1) > 0$;
3. $|a_0| < a_n$.

Nei casi $n = 1$ e $n = 2$ le disuguaglianze 1-3 sono anche sufficienti.

1. $a(1) > 0$
2. $(-1)^n a(-1) > 0$
3. $|a_0| < a_n$

Caso $n = 1$ 

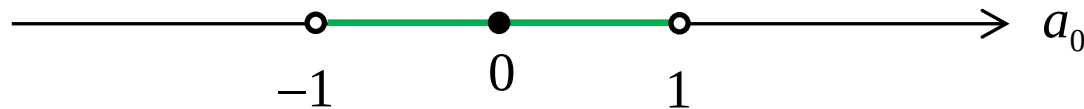
$$a(z) = a_1 z + a_0, \quad a_1 > 0$$

$$a_1 z + a_0 = 0 \quad z = -\frac{a_0}{a_1} \quad |z| < 1 \quad \frac{|a_0|}{a_1} < 1 \quad |a_0| < a_1 \quad (3^a)$$

$$\text{Se } a_0 > 0 \quad a_0 < a_1 \quad -a_1 + a_0 < 0 \quad a(-1) < 0 \quad -a(-1) > 0 \quad (2^a)$$

$$\text{Se } a_0 < 0 \quad -a_0 < a_1 \quad a_1 + a_0 > 0 \quad a(1) > 0 \quad (1^a)$$

Assumiamo $a_1 = 1$: $|a_0| < 1$



1. $a(1) > 0$
2. $(-1)^n a(-1) > 0$
3. $|a_0| < a_n$

Caso $n = 2$

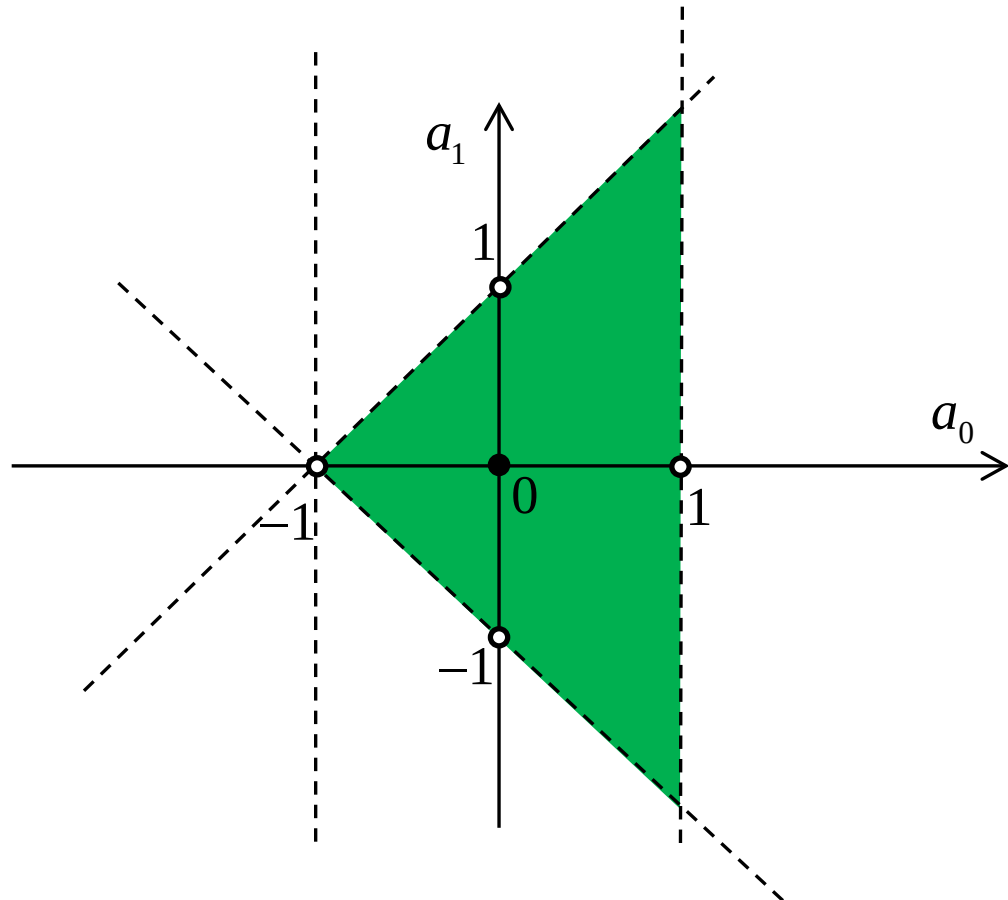
$$a(z) = a_2 z^2 + a_1 z + a_0, \quad a_2 > 0$$

$$\begin{cases} a_2 + a_1 + a_0 > 0 \\ a_2 - a_1 + a_0 > 0 \\ |a_0| < a_2 \end{cases}$$

Assumiamo $a_2 = 1$

$$\begin{cases} 1 + a_1 + a_0 > 0 \\ 1 - a_1 + a_0 > 0 \\ |a_0| < 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 > -a_0 - 1 \\ a_1 < a_0 + 1 \\ |a_0| < 1 \end{cases}$$



Costruzione della tabella di Jury associata al polinomio

$$a(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0, \quad a_n > 0$$

	z^0	z^1	z^2		z^{n-k}		z^{n-1}	z^n
1	a_0	a_1	a_2	$\cdots$	a_{n-k}	$\cdots$	a_{n-1}	a_n
2	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\cdots$	a_k	$\cdots$	a_1	a_0
3	b_0	b_1	b_2	$\cdots$	b_{n-1-k}	$\cdots$	b_{n-1}	
4	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	$\cdots$	b_k	$\cdots$	b_0	
5	c_0	c_1	c_2	$\cdots$		c_{n-2}		
6	c_{n-2}	c_{n-3}	c_{n-4}	$\cdots$		c_0		
	$\cdots$				$\cdots$			
	$\cdots$				$\cdots$			
$2n-5$	s_0	s_1	s_2	s_3				
$2n-4$	s_3	s_2	s_1	s_0				
$2n-3$	r_0	r_1	r_2					

$$b_k = \begin{vmatrix} a_0 & a_{n-k} \\ a_n & a_k \end{vmatrix}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

$$c_k = \begin{vmatrix} b_0 & b_{n-1-k} \\ b_{n-1} & b_k \end{vmatrix}, \quad k = 0, 1, \dots, n-2$$

$$r_0 = \begin{vmatrix} s_0 & s_3 \\ s_3 & s_0 \end{vmatrix}, \quad r_1 = \begin{vmatrix} s_0 & s_2 \\ s_3 & s_1 \end{vmatrix}, \quad r_2 = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 \\ s_3 & s_2 \end{vmatrix}$$

Teorema (criterio di Jury)

Il polinomio $a(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$, $a_n > 0$ ha tutte le radici di modulo minore di 1 se e solo se le seguenti $n + 1$ disuguaglianze sono soddisfatte:

1) $a(1) > 0$

2) $(-1)^n a(-1) > 0$

3) $|a_0| < a_n$

4) $|b_0| > |b_{n-1}|$

5) $|c_0| > |c_{n-2}|$

...

$n + 1)$ $|r_0| > |r_2|$

Cenni sui metodi di sintesi dei controllori discreti

1. Metodi diretti

Sintesi del controllore a tempo discreto $C_d(z)$ a partire dalla f.d.t. dell'impianto controllato $P_d(z)$.

2. Metodi indiretti

Sintesi del controllore a tempo continuo $C(s)$ e successiva sua discretizzazione per ottenere $C_d(z)$.

Per approfondire:

- G. Marro, Controlli Automatici, quinta edizione, Zanichelli, 2004
- P. Bolzern, R. Scattolini, N. Schiavoni, Fondamenti di controlli automatici, quarta edizione, Mc Graw Hill, 2015
- M. Sami Fadali, A. Visioli, Digital control engineering: analysis and design, second edition, Elsevier, 2013

Scelta del periodo di campionamento

Sia ω_b la banda passante desiderata per il sistema di controllo (dal segnale di comando all'uscita controllata).

Per il teorema del campionamento è necessario rispettare la condizione

$$\omega_s > 2\omega_b$$

dove $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$ è la pulsazione di campionamento e T è il corrispondente periodo. Quindi $\omega_s / \omega_b > 2$, in pratica si orienta il progetto scegliendo

$$6 \leq \frac{\omega_s}{\omega_b} \leq 20$$

Metodi indiretti: da $C(s)$ a $C_d(z)$

1. Metodo di Eulero in avanti

$$Dx(t) \Rightarrow \mathcal{L}[Dx(t)] = s \cdot \mathcal{L}[x(t)] \quad (\text{condizione iniziale nulla})$$

$$Dx(kT) \cong \frac{x((k+1)T) - x(kT)}{T}$$

$$\Rightarrow \mathcal{Z}[Dx(kT)] \cong \frac{\mathcal{Z}[x((k+1)T)] - \mathcal{Z}[x(kT)]}{T} = \frac{z\mathcal{Z}[x(kT)] - \mathcal{Z}[x(kT)]}{T} \quad (\text{c. i. nulla})$$

$$\mathcal{Z}[Dx(kT)] \cong \frac{z-1}{T} \mathcal{Z}[x(kT)]$$

Dal confronto si impone

$$s = \frac{z-1}{T}$$

2. Metodo di Eulero all'indietro

$$Dx(t) \Rightarrow \mathcal{L}[Dx(t)] = s \cdot \mathcal{L}[x(t)] \quad (\text{condizione iniziale nulla})$$

$$Dx(kT) \cong \frac{x(kT) - x((k-1)T)}{T}$$

$$\Rightarrow \mathcal{Z}[Dx(kT)] \cong \frac{\mathcal{Z}[x(kT)] - \mathcal{Z}[x((k-1)T)]}{T} = \frac{\mathcal{Z}[x(kT)] - z^{-1}\mathcal{Z}[x(kT)]}{T} \quad (\text{c. i. nulla})$$

$$\mathcal{Z}[Dx(kT)] \cong \frac{1}{T}(1 - z^{-1})\mathcal{Z}[x(kT)]$$

Dal confronto si impone

$$s = \frac{z-1}{Tz}$$

3. Metodo di Tustin

$$Dx(t) \Rightarrow \mathcal{L}[Dx(t)] = s \cdot \mathcal{L}[x(t)] \quad (\text{condizione iniziale nulla})$$

$$\int_{kT}^{(k+1)T} Dx(v)dv = x((k+1)T) - x(kT) \quad (\text{esatta})$$

$$\int_{kT}^{(k+1)T} Dx(v)dv \cong T \frac{Dx((k+1)T) + Dx(kT)}{2} \quad (\text{appr., metodo del trapezio})$$

$$T \frac{Dx((k+1)T) + Dx(kT)}{2} \cong x((k+1)T) - x(kT)$$

$$T \frac{z\mathcal{Z}[Dx(kT)] + \mathcal{Z}[Dx(kT)]}{2} \cong z\mathcal{Z}[x(kT)] - \mathcal{Z}[x(kT)] \quad (\text{c. i. nulla})$$

$$T \frac{z+1}{2} \mathcal{Z}[Dx(kT)] \cong (z-1)\mathcal{Z}[x(kT)]$$

$$\mathcal{Z}[Dx(kT)] \cong \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1} \mathcal{Z}[x(kT)]$$

$$\text{Dal confronto si impone } s = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}$$

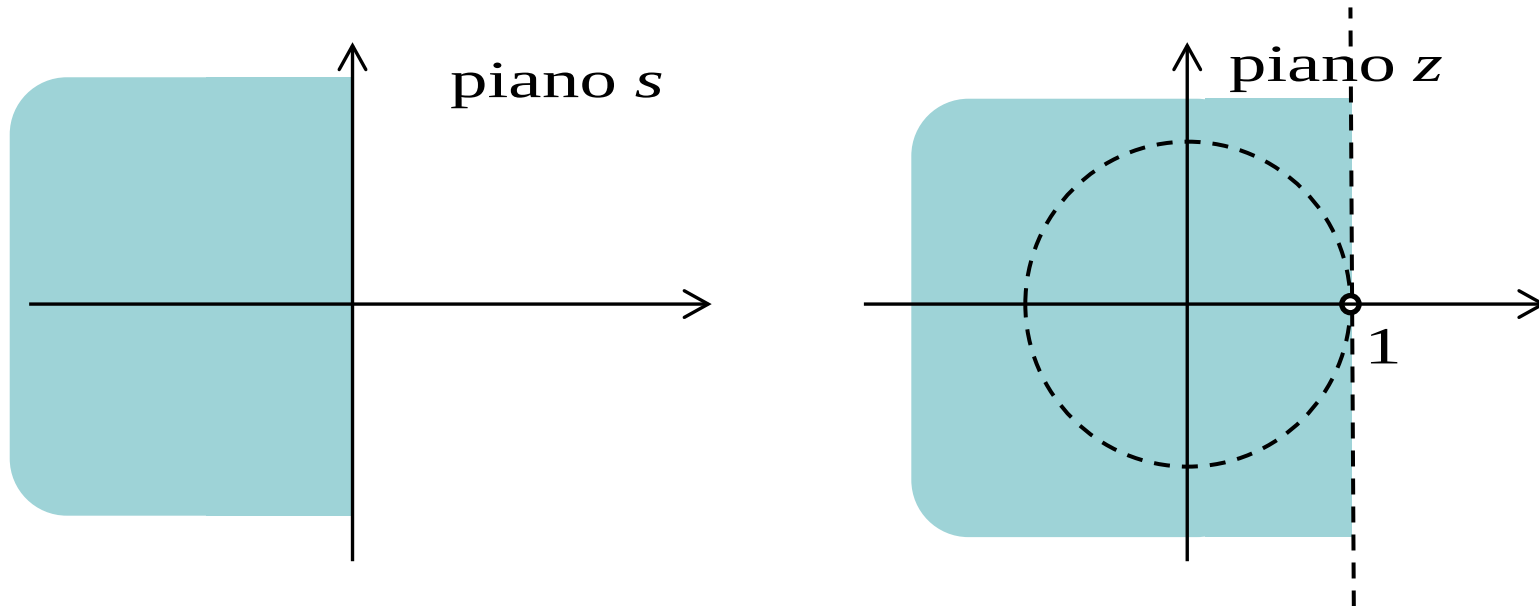
Considerazioni sulla stabilità

$$s = \frac{z-1}{T}$$

1. Metodo di Eulero in avanti

$$s = \frac{z-1}{T}, \text{ sia } z = \sigma + j\omega$$

$$s = \frac{\sigma + j\omega - 1}{T} = \frac{\sigma - 1}{T} + j\frac{\omega}{T}, \quad \operatorname{Re} s < 0 \Leftrightarrow \frac{\sigma - 1}{T} < 0 \Leftrightarrow \sigma < 1$$



Se $C(s)$ è asintoticamente stabile $C_d(z)$ può essere instabile.

$$s = \frac{z-1}{Tz}$$

2. Metodo di Eulero all'indietro

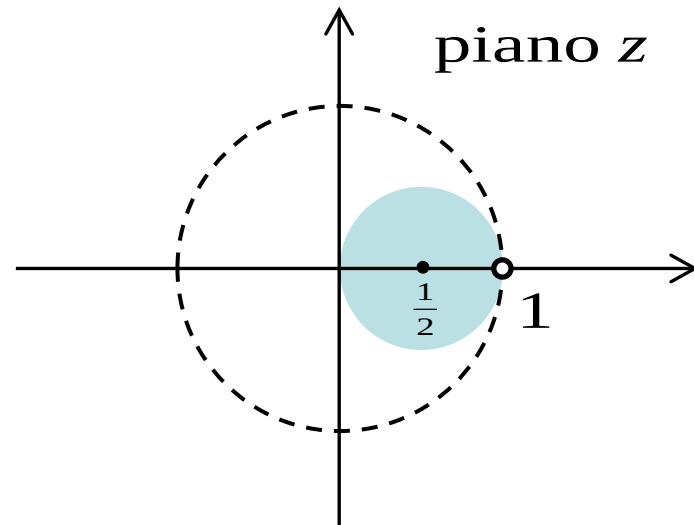
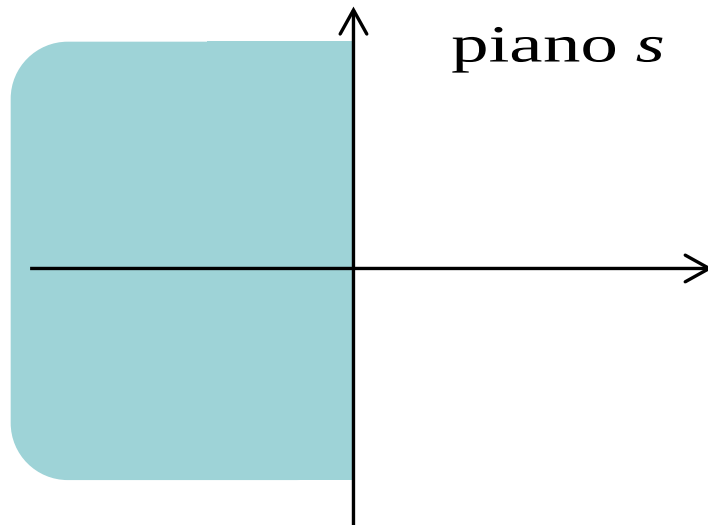
$$s = \frac{z-1}{Tz}, \quad z = \sigma + j\omega$$

$$\begin{aligned} s &= \frac{\sigma + j\omega - 1}{T(\sigma + j\omega)} = \frac{[(\sigma - 1) + j\omega](\sigma - j\omega)}{T(\sigma + j\omega)(\sigma - j\omega)} \\ &= \frac{(\sigma - 1)\sigma + \omega^2 + j\omega\sigma - j\omega(\sigma - 1)}{T(\sigma^2 + \omega^2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} s < 0 &\Leftrightarrow (\sigma - 1)\sigma + \omega^2 < 0 \Leftrightarrow \sigma^2 - \sigma + \frac{1}{4} + \omega^2 < \frac{1}{4} \\ &\Leftrightarrow \left(\sigma - \frac{1}{2}\right)^2 + \omega^2 < \left(\frac{1}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

2. Metodo di Eulero all'indietro

$$\operatorname{Re} s < 0 \Leftrightarrow \left(\sigma - \frac{1}{2} \right)^2 + \omega^2 < \left(\frac{1}{2} \right)^2$$



Se $C(s)$ è asintoticamente stabile allora $C_d(z)$ è asintoticamente stabile.

$$s = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}$$

3. Metodo di Tustin

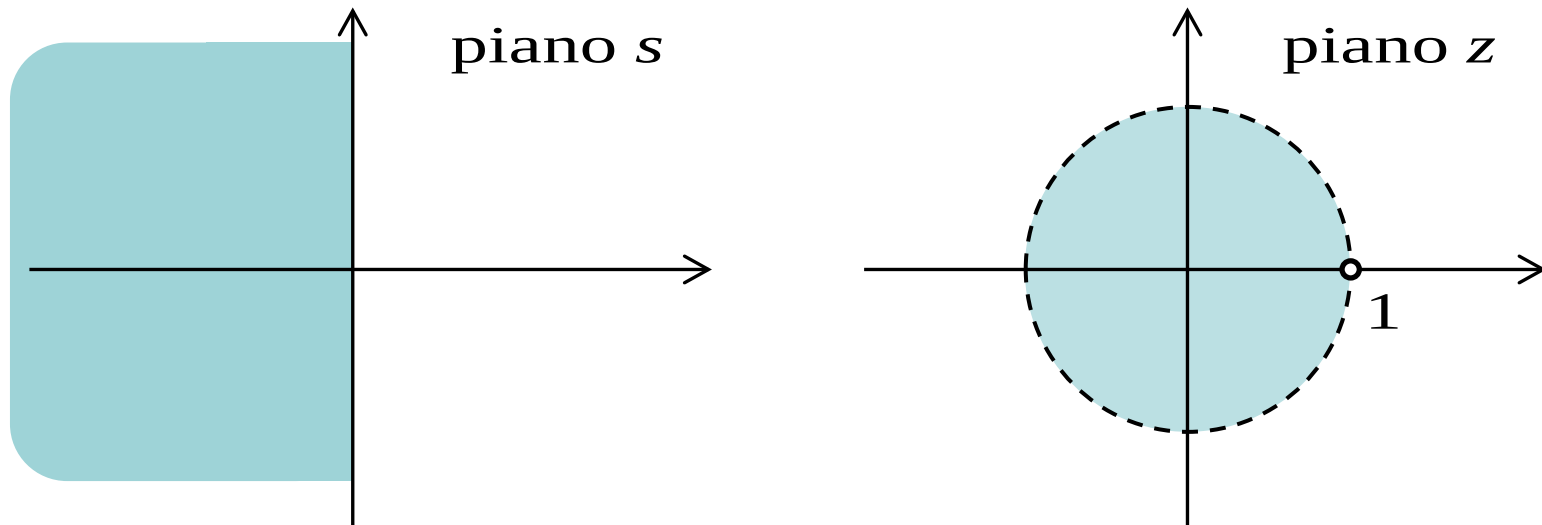
$$s = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}, \quad z = \sigma + j\omega$$

$$\begin{aligned} s &= \frac{2}{T} \frac{\sigma + j\omega - 1}{\sigma + j\omega + 1} = \frac{2}{T} \frac{[(\sigma - 1) + j\omega][(\sigma + 1) - j\omega]}{[(\sigma + 1) + j\omega][(\sigma + 1) - j\omega]} \\ &= \frac{2}{T} \frac{\sigma^2 - 1 + \omega^2 + j\omega(\sigma + 1) - j\omega(\sigma - 1)}{(\sigma + 1)^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

$$\operatorname{Re} s < 0 \Leftrightarrow \sigma^2 - 1 + \omega^2 < 0 \Leftrightarrow \sigma^2 + \omega^2 < 1$$

3. Metodo di Tustin

$$\operatorname{Re} s < 0 \Leftrightarrow \sigma^2 + \omega^2 < 1$$



La stabilità asintotica di $C(s)$ è equivalente alla stabilità asintotica di $C_d(z)$.

Esercizi

Studiare la stabilità asintotica di un sistema discreto con polinomio caratteristico

1) $a(z) = z^3 - z^2 + z + 0.5$

2) $a(z) = z^4 - z^3 + 0.25z^2 + 0.25z - 0.125$

3) Determinare i valori di $K \in \mathbb{R}$ che assicurano la stabilità asintotica del seguente sistema di controllo. Il periodo di campionamento è $T = 0.02$ sec

e $P(s) = \frac{1}{s+3}$.

