

FORMULARIO - FCA

① STABILITÀ: Sia Σ un sistema lineare per il quale i poli coincidono con le radici del polinomio caratteristico ($a(s)$ e $b(s)$ sono coprimi fra loro)

• Σ STABILE : $\forall p_i : \operatorname{Re} p_i \leq 0$ e i poli puramente immaginari sono semplici

• Σ ASINTOTICAMENTE STABILE : $\forall p_i : \operatorname{Re} p_i < 0$

• Σ SEMPLICEMENTE STABILE : $\forall p_i : \operatorname{Re} p_i \leq 0$ e i poli puramente immaginari (che devono esistere) sono semplici

• Σ INSTABILE : $\exists p_i : \operatorname{Re} p_i > 0$ e/o esiste un polo puramente immaginario con molteplicità maggiore di 1

ES. $G(s) = \frac{s+1}{s(s+5)} \rightarrow$ SEMPLIC. STABILE $G(s) = \frac{(s+2)(s-5)}{(s+7)^4(s+50)} \rightarrow$ ASINT. STABILE

$G(s) = \frac{(s+2)(s-5)}{s^2(s+12)(s+50)} \rightarrow$ INSTABILE $G(s) = \frac{(s+2)(s-5)}{(s-3)(s+50)} \rightarrow$ INSTABILE

+ Se $a(s)$ e $b(s)$ non sono coprimi fra loro, il teorema di stabilità ammette la medesima formulazione sostituendo i poli con le radici del polinomio caratteristico $[G(s) = b(s)/a(s)]$

② TEOREMA DI ROUTH: Ad ogni variazione di segno nella tabella di Routh degli elementi della prima colonna corrisponde una radice a parte reale positiva, ad ogni permanenza corrisponde una radice a parte reale negativa

CASI PARTICOLARI

④ Il primo elemento di una riga è zero: ogni riga non nulla che inizia con n zeri viene sommata con se stessa moltiplicata per $(-1)^n$ e traslata verso sinistra di n posizioni

$$\begin{array}{r} 3 \ 1 \ 3 \ 0 \\ 2 \ 0 \ -2 \ 0 \\ 2'' \ 2 \ 0 \ 0 \\ 2 \ 2 \ -2 \ 0 \\ 1 \ 4 \ 0 \\ 0 \ -2 \end{array}$$

⑤ Tutti gli elementi di una riga sono nulli: si deriva il polinomio ausiliario e i coefficienti del polinomio così ottenuto sostituiscono la riga nulla [in questo caso le permanenze corrispondono anche a radici puramente immaginarie]

③ BODE: $G(j\omega) = |G(j\omega)| e^{j\arg(G(j\omega))}$

$\rightarrow$ AMPIEZZA: $\log |G(j\omega)|$ } entrambi in funzione del
 $\rightarrow$ FASE: $\arg(G(j\omega))_k$ } logaritmo della pulsazione
 ω ($\log_{10} \omega$)

$$G(s) = K \frac{(s-z_1) \dots (s-z_n)}{s^h (s-p_{n+1}) \dots (s-p_m)} \longleftrightarrow K_2 \frac{(1+t_1 s) \dots (1+2\delta_1 \frac{s}{\omega_{n1}} + \frac{s^2}{\omega_{n1}^2})}{(1+t_1' s) (1+2\delta_2 \frac{s}{\omega_{n2}} + \frac{s^2}{\omega_{n2}^2})}$$

PARAMETRI CARATTERISTICI

• Pulsazione di risonanza : $\omega_R = \arg \max(G(j\omega))$

• Picco di risonanza : $M_R = \frac{|G(j\omega_R)|}{|G(j0)|}$ } = Valore massimo assunto dal diagramma della ampiezza

* $\begin{cases} \omega_a = \omega_0 / 4,81 \\ \omega_b = \omega_0 \cdot 4,81 \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} \log_{10}(\omega_a) = \log(\omega_0) - \log(4,81) \\ \log_{10}(\omega_b) = \log(\omega_0) + \log(4,81) \end{cases}$ [Solo per l'argomento]

$$Y(s) = \frac{4}{s[(s+1)^2 + 1]^2} = \frac{4}{s(s+1+s)^2(s+1-s)^2} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_{21}}{(s+1+s)^2} + \frac{K_{22}}{(s+1-s)^2} + \frac{\bar{K}_{31}}{(s+1-s)^2} + \frac{\bar{K}_{32}}{(s+1-s)^2}$$

$$\rightarrow K_1 = s \cdot \frac{4}{s(s+1+s)^2(s+1-s)^2} \Big|_{s=0} = 1$$

$$\rightarrow K_{31} = (s+1-s)^2 \cdot \frac{4}{s(s+1+s)^2(s+1-s)^2} \Big|_{s=-1+s} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}s$$

$$\rightarrow K_{32} = D \left[\frac{4}{s(s+1+s)^2} \right] \Big|_{s=-1+s} = -\frac{1}{2} + s$$

$$\bullet K_{31} = \bar{K}_{21} \rightarrow K_{21} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}s$$

$$\bar{K}_{32} = K_{22} \rightarrow K_{22} = -\frac{1}{2} - s$$

GRADO MASSIMO DI CONTINUITA'

$u(t)$ CONTINUA $\in C^h \rightarrow y(t) \in C^{h+h}$

$u(t)$ DISCONTINUA $\cdot e=0 \rightarrow y(t)$ DISCONTINUA

$\cdot e \geq 1 \rightarrow y(t) \in C^{e-1}$

FUNZIONE DI TRASFERIMENTO

$$\bullet G(s) = \frac{x}{y} : ax = by$$

$$\rightarrow \frac{x}{y} = \frac{b}{a}$$

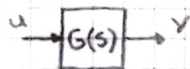
$G(0)$ = Guadagno statico

Si definisce F.D.T. di un sistema la funzione a variabile complessa $G(s)$ per la quale è valida la relazione

$$\mathcal{L}[y(t)] = G(s) \mathcal{L}[u(t)]$$

$\forall (u(t), y(t)) \in B$ con $u(t)=0, y(t)=0$ per $t < 0$

$$G(s) = \frac{\text{USCITA}}{\text{INGRESSO}} = \frac{b(s)}{a(s)} \longleftrightarrow \text{Eq. DIFFERENZIALE} : \sum_{i=0}^n a_i D^i y(t) = \sum_{i=0}^m b_i D^i u(t)$$



Poli: valori di s che annullano il denominatore

Zeri: valori di s che annullano il numeratore

Modi: 1) se p_i è reale di molteplicità h : $e^{p_i t}, \dots, t^{h-1} e^{p_i t}$

2) se $p_i = \sigma \pm j\omega$ è una coppia di poli complessi coniugati di molteplicità h

$$\rightarrow t^h e^{\sigma t} \sin(\omega t + \phi_i) \dots t^{h-1} e^{\sigma t} \sin(\omega t + \phi_h)$$

$\rightarrow$ RESIDUI [Scomposizione in fattori]

per residui di grado 1

$$\bullet \sum K_i = 0 \quad \forall e \geq 1$$

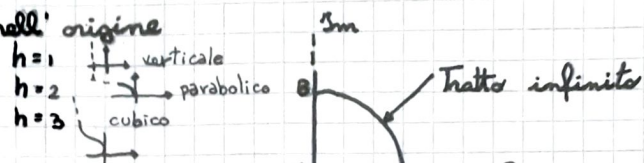
$$\bullet \sum K_i = \frac{a_n}{b_n} \quad e=0$$

ASINTOTI: Se non ci sono poli nell'origine non ci sono asintoti

$$\sigma_a = K \left(\frac{1 + \sum \omega_i T_{pi} - \sum T_{zi}}{(\sum \omega)^h} \right) \quad h = n^\circ \text{ poli nell'origine}$$

• Scomponi $L(j\omega)$ in $|L(j\omega)|$, $\angle L(j\omega)$

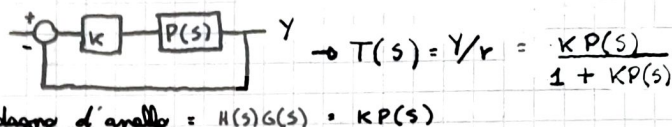
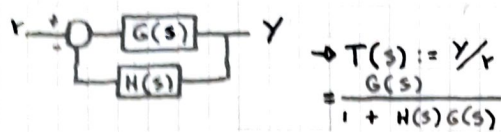
• limiti per $\omega \rightarrow 0^+$
 $\omega \rightarrow +\infty$



Se ci sono dei poli sull'asse immaginario fra due lettere, vuol dire che fra loro vi è una semicirconferenza infinita

• semicirconferenza infinita → tratto infinitesimo

• Intersezione con l'asse $-\pi$



$L(s) = \text{guadagno d'anello} = H(s)G(s) = KP(s)$

Il sistema retroazionato è stabile asintoticamente SSE l'equazione caratteristica $1 + L(s) = 0$ ha tutte le radici a parte reale negativa

$n_z = N^\circ$ degli zeri di $1 + L(s) \in \mathbb{C}^+$

$n_p = N^\circ$ dei poli di $L(s) \in \mathbb{C}^+$

$\psi = n_z - n_p = \text{numero di giri in senso orario del diagramma polare completo intorno al punto } -1 + j0$

• Condizione necessaria e sufficiente affinché il sistema in retroazione sia asintoticamente stabile è che il diagramma polare completo non tocchi il punto critico -1 ma lo circonda tante volte in senso antiorario quanti sono i poli del guadagno di anello con parte reale positiva.

Nell'ipotesi che il guadagno di anello non abbia poli a parte reale positiva, condizione necessaria e sufficiente affinché il sistema in retroazione sia asintoticamente stabile è che il diagramma polare completo non tocchi né circonda il punto -1 .

MARGINE D'AMPIEZZA

$$M_A = \frac{1}{|L(j\omega_p)|}$$

$$\omega_p \rightarrow \angle L(j\omega_p) = -\pi$$

↳ pulsazione di fase

MARGINE DI FASE

$$M_F = \pi - \arg(L(j\omega_c))$$

pulsazione critica: $\omega_c: |L(j\omega_c)| = 1$

TEMPO DI ASSESTAMENTO
 $T_a = \frac{3}{G_s}$

→ MASSIMIZZARE GRADO DI STABILITÀ (K)

• cerco radice doppia

• inserisco radice doppia più vicina allo 0 in $1 + L(s)$

→ trovo valori di K

$$\tan(a+b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$$

$$\cot(a+b) = \frac{1 - \tan(a)\tan(b)}{\tan(a) + \tan(b)}$$

$$\tan(a-b) = \frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a)\tan(b)}$$

$$\cot(a-b) = \frac{1 + \tan(a)\tan(b)}{\tan(b) - \tan(a)}$$

LUOGO DELLE RADICI

equazione caratteristica $1 + KG(s) = 0$

$K \in (0, +\infty)$: luogo diretto : alla sua destra un numero dispari di poli e zeri
 $K \in (0, -\infty)$: luogo inverso : alla sua destra un numero pari di poli e zeri

PROPRIETÀ

① Il luogo ha tanti rami quanti sono i poli di $G(s)$. Ogni ramo parte da un suo polo e termina in uno zero o in un punto all'infinito; i rami si intersecano nelle radici doppie

② Il luogo delle radici è simmetrico rispetto all'asse reale

③ ANGOLI DI PARTENZA (Poli) / ARRIVO (Zeri)

$$\begin{aligned} \phi_i &= \pi + \sum \arg(p_i - z_j) - \sum_{j \neq i} \arg(p_i - p_j) \\ \phi_i &= \pi + \sum \arg(z_i - p_j) - \sum_{j \neq i} \arg(z_i - z_j) \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Se il luogo delle radici} \\ \text{è inverso basta} \\ \text{sostituire } 0 \text{ a } \pi \end{array} \right\}$$

→ Se il polo/zero ha molteplicità $h > 1$

$$\begin{aligned} h \angle p_i &= \pi + \sum \arg(p_i - z_j) - \sum_{j \neq i} \arg(p_i - p_j) \pmod{2\pi} \\ h \angle z_i &= \pi + \sum \arg(z_i - p_j) - \sum_{j \neq i} \arg(z_i - z_j) \pmod{2\pi} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Volendo trovare il primo} \\ \text{angolo } \pm 12^\circ \text{ per trovare} \\ \text{gli altri facendo} \\ 360/n + 12^\circ \end{array} \right\}$$

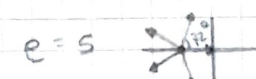
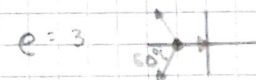
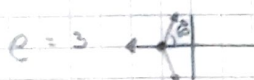
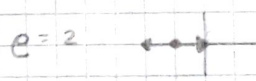
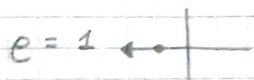
④ Trovare le radici doppie : $\sum_{i=1}^n \frac{1}{s-p_i} - \sum_{i=1}^m \frac{1}{s-z_i} = 0$

⑤ In corrispondenza di una radice di molteplicità h il luogo presenta h rami entranti e h uscenti, alternati fra loro, le cui tangenti suddividono lo spazio circostante in settori uguali di π/h radianti

⑥ ASINTOTI : $\sigma_a = (\sum p_i - \sum z_i) / e$

DIRETTO

INVERSO



⑦ Si fornisce grado di stabilità di Σ : $G_s := -\max\{\operatorname{Re} p_i\}$ Cambiamento
di polo

⑧ Teorema del Baricentro ($e \geq 2$) → Guadagno ottimale K^* è $\sigma, \sigma + j\omega, \sigma - j\omega$

$$1 + K \frac{1}{s[(s+2)^2 + 16]} = 0$$

→ $\sum p_{K^*} = \sum p_i$ → Trovare σ che minimizza grado di stabilità

pongo poli σ
 $\Rightarrow 1 + K^* \frac{1}{(\sigma)[(\sigma+2)+16]} = 0 \rightarrow$ Trovare K^*

FORMULARIO - FCA

TRASFORMATE NOTEVOLI

$$\mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{s-a}$$

$$\mathcal{L}[1(t)] = \frac{1}{s}$$

$$\mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

$$\mathcal{L}[t^n e^{at}] = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$$

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$$

$$\mathcal{L}[\sin(\omega t)] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$\mathcal{L}[\cos(\omega t)] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

TRASFORMATA DI LAPLACE

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_{0^-}^{+\infty} f(t) e^{-st} dt$$

+ EXTRA

$$\mathcal{L}[Df(t)] = sF(s) - f(0^+)$$

$$\mathcal{L}[D^2 f(t)] = s^2 F(s) - sf(0^+) - Df(0^+)$$

$$\mathcal{L}\left[\int_0^+ f(\tau) d\tau\right] = \frac{1}{s} F(s)$$

$$\mathcal{L}[D^* f(t)] = sF(s) - f(0^-)$$

$$\mathcal{L}[D^{*2} f(t)] = s^2 F(s) - sf(0^-) - Df(0^-)$$

$$\mathcal{L}[f(t-t_0)1(t-t_0)] = e^{-t_0 s} F(s)$$

$$\mathcal{L}[e^{at} f(t)] = F(s-a)$$

$$\mathcal{L}[D^i f(t)] = s^i F(s) - \sum_{j=0}^{i-1} s^j D^{i-j-1} f(0^+)$$

è LINEARE e INIETTIVA

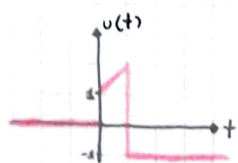
$$\mathcal{L}[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)] = c_1 \mathcal{L}[f_1(t)] + c_2 \mathcal{L}[f_2(t)]$$

$$\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[g(t)] \rightarrow f(t) = g(t)$$

ANTITRASFORMATE

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{k}{s-p} + \frac{\bar{k}}{s-\bar{p}}\right] = 2|k|e^{\text{Re}pt} \cos(\text{Im}pt + \arg k)$$

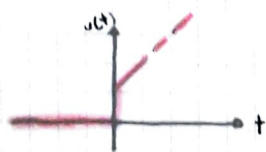
$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-p)^n}\right] = \frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{pt}$$



$$u(t) = (1+t)1(t) + (-3(t-1))1(t-1)$$

$$\bullet U(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + e^{-s} \left\{ -\frac{3}{s} - \frac{1}{s^2} \right\}$$

$$\left\{ e^{-s} \mathcal{L}[-3-t] \right\}$$



$$u(t) = 1(t) + t1(t) \rightarrow \text{discontinua}$$

$$U(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}$$

$$\begin{cases} Y(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{7}{4} \frac{1}{s} + \frac{4}{(s+2)^3} + \frac{2}{(s+2)^2} + \frac{2}{s+2} - \frac{1}{4} \frac{1}{(s+4)} \\ Y(t) = t - \frac{7}{4} 1(t) + 2t^2 e^{-2t} + 2t e^{-2t} + 2e^{-2t} - \frac{1}{4} e^{-4t} \end{cases}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2)}\right] = 1 - A e^{-\delta\omega_n t} \sin(\omega t + \phi)$$

$$\bullet A = \frac{1}{\sqrt{1-\delta^2}} \quad \left\{ \delta \gg 1 \rightarrow \text{impulsibile} \right\}$$

TRASFORMATE Z

$$Z[x(k-n)] = z^{-n} Z[x(k)]$$

$$Z[a^k f(k)] = F\left(\frac{z}{a}\right)$$

$$Z[x(k+n)] = z^n [Z[x(k)] - \sum_{t=0}^{n-1} x(t) z^{-t}]$$

$$Z[f(k) * g(k)] = F(z) G(z)$$

Teorema del valore iniziale $x(0) = \lim_{z \rightarrow +\infty} z [x(k)]$

Teorema del valore finale $\lim_{k \rightarrow +\infty} x(k) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) Z[x(k)]$

$$Z[\delta(k)] = 1$$

$$Z[k^2] = \frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$$

$$Z[1(k)] = \frac{z}{(z-1)}$$

$$Z[a^k 1(k)] = \frac{z}{(z-a)}$$

$$Z[a^k \sin(\omega k)] = \frac{za \sin(\omega)}{z^2 - 2za \cos(\omega) + a^2}$$

$$Z[k 1(k)] = \frac{z}{(z-1)^2}$$

$$Z[a^k \cos(\omega k)] = \frac{za \cos(\omega)}{z^2 - 2za \cos(\omega) + a^2}$$

$$Z[k a^k 1(k)] = \frac{a^2 z}{(z-a)^2}$$

$$Z[k a^{k-1} 1(k)] = \frac{z}{(z-a)^2}$$

$$Z\left[\binom{k}{h} a^{k-h} 1(k)\right] = \frac{z}{(z-a)^{h+1}}$$

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} f(k) z^{-k}$$

$$Z[\sin(\omega k)] = \frac{z \sin(\omega)}{z^2 - 2z \cos(\omega) + 1}$$

$$-z \frac{dX(z)}{dz} = Z[k x(k)]$$

$$Z[\cos(\omega k)] = \frac{z(z - \cos \omega)}{z^2 - 2z \cos \omega + 1}$$

ANTITRASFORMATE

$$Z^{-1}\left[\frac{z}{(z-a)^n}\right] = \frac{k(k-1)(k-2)\dots(k-n+2)}{(n-1)!} a^{k-n+1} 1(k) = \binom{k}{n-1} a^{k+1-n} 1(k)$$

$$Z^{-1}\left[\frac{1}{(z-a)^n}\right] = \frac{(k-1)\dots(k-n+1)}{(n-1)!} a^{k-n} 1(k-1) = \binom{k-1}{n-1} a^{k-n} 1(k-1)$$

$$Z^{-1}\left[\frac{c}{z-p} + \frac{\bar{c}}{z-\bar{p}}\right] = 2|c||p|^{k-1} \cos[\arg(p)(k-1) + \arg(c)] 1(k-1)$$

$$Z^{-1}\left[c \frac{z}{z-p} + \bar{c} \frac{z}{z-\bar{p}}\right] = 2|c||p|^k \cos[\arg(p)k + \arg(c)] 1(k)$$

ESEMPLI ① $y(k) = 2k 1(k) + \frac{2}{3} 1(k) + \left(\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^k 1(k)$ ②

$$\rightarrow Y(z) = \frac{2z}{(z-1)^2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{z}{(z-1)} + \frac{1}{3} \cdot \frac{z}{(z+\frac{1}{2})}$$

② $y(k) = \frac{1}{3} - \frac{10}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^k + 2k(-1)^{k-1} + 3(-1)^k$

$$\rightarrow Y(z) = \frac{1}{3} \cdot \frac{z}{z-1} - \frac{10}{3} \cdot \frac{z}{(z+\frac{1}{2})} + 2 \cdot \frac{z}{(z+1)^2} + 3 \cdot \frac{z}{z+1}$$

③ $h(k) = 8 \cdot 1(k-1) - \frac{5}{2}(k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} 1(k-1) - 7\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} 1(k-1)$

$$H(z) = \frac{8z}{(z-1)z} - \frac{5}{2} \frac{z}{(z-\frac{1}{2})^2 z} - 7 \frac{z}{(z-\frac{1}{2})z}$$

1) TRASFORMATA $Z \leftrightarrow$ Equazione alle differenze

$$\textcircled{a} H(z) = \frac{z^2 + 1}{z^3 - 2z^2 + \frac{5}{4}z - \frac{1}{4}} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow y(k) - 2y(k-1) + \frac{5}{4}y(k-2) - \frac{1}{4}y(k-3) = u(k-1) + u(k-3)$$

2) CONTROLLORE / DISTURBO

Controllori

Ordine: $\textcircled{1} C(s) = \frac{b_1s + b_0}{s + a_0}$

$\textcircled{2} C(s) = \frac{b_2s^2 + b_1s + b_0}{s^2 + a_1s + a_0}$

$\textcircled{3} \dots$

• disturbo $x(t) \rightarrow$ denominatore di $\mathcal{L}[x(t)]$ e solo/i di $C(s)$ per eliminarlo

• b_0 lo si trova da $K_p/K_v/K_a$

• Blocco algebrico

$$\rightarrow G(s) = \frac{F L(s)}{1 + L(s)} \rightarrow G(0) = 1 \rightarrow F = \frac{1 + L(0)}{L(0)}$$

• Se chiede che il guadagno d'anello abbia i poli $a, b, c, \dots$

$$\rightarrow (s-a)(s-b)(s-c) \dots = 1 + C(s)P(s)$$

[Si confronta solo il numeratore]

{ Stessa cosa per i poli dominanti, gli altri poli però devono essere più lontani dall'asse immaginario }

3) LUOGO DELLE RADICI

Trovare punti di intersezione con l'asse immaginario

$\textcircled{2}$ Applico Routh $\rightarrow$ trovo K t.c. riga $1=0 \rightarrow$ sostituisco valore di K in riga 2 e trovo intersezioni con l'asse immaginario

4) TEOREMA DEL CAMPIONAMENTO (Shannon)

Una funzione $f(t)$ con spettro limitato da 0 a ω_s , i.e. con trasformata di Fourier $F(j\omega)$ nulla per $\omega > \omega_s$ si può ricostruire dalla sequenza di campioni $\tilde{f}(k) = f(kT)$ SSE la pulsazione di campionamento $\Omega = 2\pi/T$ è non inferiore a $2\omega_s$ [Sennò si è aliasing]

5) POLO DOMINANTE: $s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2$

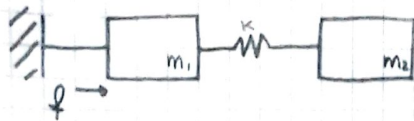
$$\rightarrow s_{1,2} = -\delta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\delta^2} = \text{Re } s + j\text{Im } s$$

SOVRAELONGAZIONE: $s = 100 \exp\left\{\frac{-\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}\right\}$

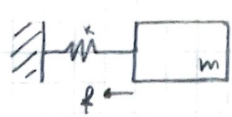
$\rightarrow$ TEMPO DI ASSESTAMENTO: $3/\delta\omega_n$

TEMPO DI SALITA: $1.8/\omega_n$

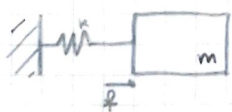
MOLLE



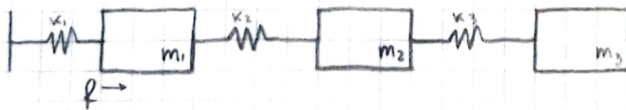
$$\begin{cases} m_1 D^2 x_1 = f + k(x_2 - x_1) \\ m_2 D^2 x_2 = -k(x_2 - x_1) \end{cases}$$



$$m D^2 x = -f - kx$$

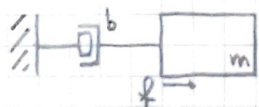


$$m D^2 x = +f - kx$$

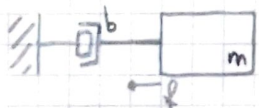


$$\begin{cases} m_1 D^2 x_1 = f - k_1 x_1 + k_2(x_2 - x_1) \\ m_2 D^2 x_2 = -k_2(x_2 - x_1) + k_3(x_3 - x_2) \\ m_3 D^2 x_3 = -k_3(x_3 - x_2) \end{cases}$$

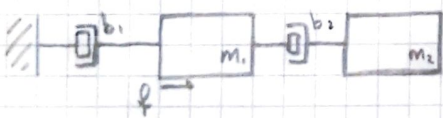
PISTONI



$$m D^2 x = f - b D x$$

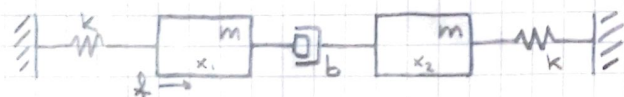


$$m D^2 x = -f - b D x$$



$$\begin{cases} m_1 D^2 x_1 = f - b_1 D x_1 + b D(x_2 - x_1) \\ m_2 D^2 x_2 = -b D(x_2 - x_1) \end{cases}$$

ESEMPIO



$$\begin{cases} m D^2 x_1 = f - k x_1 + b D(x_2 - x_1) \\ m D^2 x_2 = -b D(x_2 - x_1) - k x_2 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} (m D^2 + b D + k) x_1 = f + b D x_2 \\ (m D^2 + b D + k) x_2 = + b D x_1 \end{cases}$$

$$\rightarrow x_2 = \frac{b D x_1}{(m D^2 + b D + k)} \rightarrow (m D^2 + b D + k) x_1 = f + \frac{b^2 D^2 x_1}{(m D^2 + b D + k)}$$

$$\rightarrow \frac{[(m D^2 + b D + k)(m D^2 + b D + k) - b^2 D^2] x_1}{(m D^2 + b D + k)} = f$$

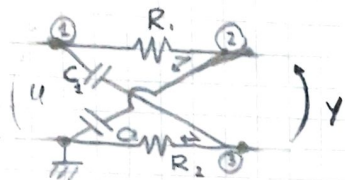
$$\rightarrow \frac{x_1}{f} = \frac{(m D^2 + b D + k)}{m^2 D^4 + 2 m b D^3 + (2 m k + b^2 - b^2) D^2 + 2 b k D + k^2}$$

→ Equazione differenziale

$$m^2 D^4 x_1(t) + 2 m b D^3 x_1(t) + 2 m k D^2 x_1(t) + 2 b k D x_1(t) + k^2 x_1(t) = m D^2 f + b D f + k f$$

RIPASSO ELETTROTECNICA

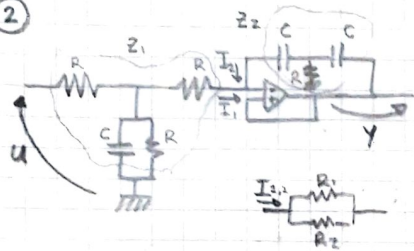
①



$$\begin{cases} Y = V_{C1} - V_{R1} = I \frac{1}{C_1 s} - I R_1 \\ U = V_{R1} + V_{C2} = I \frac{1}{C_2 s} + I R_2 \end{cases}$$

$$G(s) = \frac{Y}{U} = \frac{\frac{1}{C_1 s} - R_1}{\frac{1}{C_2 s} + R_2} = \frac{C_2 s (-R_1 C_1 s + 1)}{C_1 s (R_2 C_2 s + 1)}$$

②



$$I_1 = -I_2 \rightarrow \frac{U}{Z_1} \cdot \frac{Z_{CR}}{Z_R + Z_{CR}} = - \frac{Y}{Z_2} \cdot \frac{Z_R}{Z_C + Z_R}$$

* Partizione di corrente:

$$I_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} I$$

$$D \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

$$\int f'(x)g(x) dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)$$

G_s : grado di stabilità; $-\max\{R_{ap_i}\}$ del polo più vicino all'asse immaginario

Entrare a regime

1) GRADINO : $Q_r = \frac{V_0}{1 + K_p}$

$$r(t) = v_{02}(t)$$

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \text{COSTANTE DI POSIZIONE}$$

2) RAMPA : $Q_r = \frac{V_0}{K_v}$

$$r(t) = v_{01}(t)$$

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = \text{COSTANTE DI VELOCITÀ}$$

3) PARABOLA : $Q_r = \frac{V_0}{K_a}$

$$r(t) = v_{02}(t)$$

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s) = \text{COSTANTE DI ACCELERAZIONE}$$

$$[T_a = \text{tempo di assestamento} = 3/G_s]$$

Se chiede $G_s \geq n \rightarrow S = Z - n \rightarrow$ trova numeratore di $1 + G(s) \rightarrow$ applico Routh

FORMULE ELETTROTECNICA

SCOMPOSIZIONE IN FATTORI DI POLINOMI

10 METODI:

1) RFC: raccoglimento a fattori comune

$$5a^2 + 12a = a(5a + 12)$$

2) RFP: raccoglimento a fattori comune

$$5a - 20 - ab + 4b = 5(a-4) - b(a-4) = (5-b)(a-4)$$

3) $\square$ bin.: $x^2 - 8xy^2 + 16y^4 = (x - 4y^2)^2$

4) $-\square$ di monomi: $a^2 - 4b^2 = (a + 2b)(a - 2b)$

5) $\square$ trinomio: $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac = (a + b + c)^2$

6) $\square$ binomio: $27x^3 - 27x^2 + 9x - 1 = (3x - 1)^3$

7) $+$ di cubi: $x^3 + 125 = (x + 5)(x^2 - 5x + 25)$

8) $-$ di cubi: $a^3 - 1 = (a - 1)(a^2 + 1a + 1)$

9) trinomio particolare: 1 grado: $x^2 + 2x - 15 = (x - 3)(x + 5)$ $P = -15 \rightarrow 5 \cdot 3$

2 grado: $2x^2 + x - 15 = 2x^2 - 30x + x - 15 = x(2x + 1) - 15(2x + 1)$

10) ruffini: $x^3 + x + 2 = (x + 1)(x^2 - x + 2)$

$P_1 = 1^3 + 1 + 2 = 4$

$P_{-1} = -1^3 - 1 + 2 = 0$

È IL -1 CAMBIATO DI SEGNO

1	0	1	2
↓	↓	↓	
-1	-1	1	-2
1	-1	2	0

$$\frac{-\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - ac}}{a} \quad / \quad \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$x^2 + y^2 = r^2$

$(x + y)^2 - 2xy = 0$



$(a + b) : 2 = 2 : a$

$a : b = b : b$

$(a + b) = \sqrt{b^2 + a^2}$

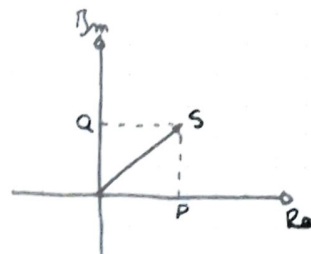
FORMULE ELETTROTECNICA

POTENZE : COMPLESSA : $S = P + jQ = V_{eff} I_{eff} \angle \phi$

APPARENTE : $|S| = V_{eff} I_{eff} = \sqrt{P^2 + Q^2}$

ATTIVA/REALE : $V_{eff} I_{eff} \cos(\phi) = P$

REATTIVA : $V_{eff} I_{eff} \sin(\phi) = Q$



FATTORE DI POTENZA : $P/S = \cos(\phi)$

SFASAMENTO : $\arctg(Q/P) = \phi$

POTENZA ISTANTANEA

$E_{MAX} = E_{eff} \sqrt{2}$

$P(t) = i(t)v(t) = I_{max} V_{max} \cos(\omega t) \cos(\omega t - \phi) =$

$= \frac{1}{2} V_{max} I_{max} \cos(\phi) + \frac{1}{2} V_{max} I_{max} \cos(2\omega t - \phi)$

TRASFORMATORE IDEALE

$\frac{V_2}{V_1} = \frac{N_2}{N_1} = \frac{I_1}{I_2}$

$S_1 = S_2$

$Z_{21} = Z_2 \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2$

$Z_{12} = Z_1 \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2$

SOLENOIDE

$N\phi_B = LI \quad NI = \mathcal{R}\phi \quad B = \frac{N}{l} \mu_0 I$

BODE GRAFICI

① $H(j\omega) = 20 \log(K)$

② $H(j\omega) = 20 \log(j\omega)$

③ $H(j\omega) = 20 \log\left(\frac{j\omega}{K} + 1\right)$

④ $|H(j\omega)| = 20 \log|K|$

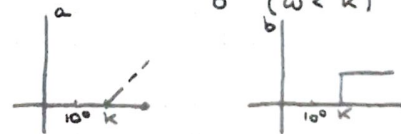
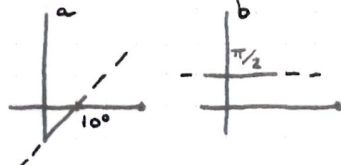
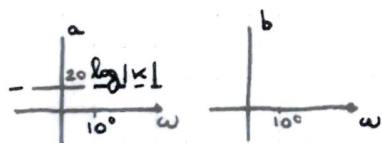
⑤ $|H(j\omega)| = m\omega$

⑥ $|H(j\omega)| = m\omega \quad (\omega > K)$

⑦ $\angle H(j\omega) = 0$

⑧ $\angle H(j\omega) = \pi/2$

⑨ $\angle H(j\omega) = \pi/2 \quad (\omega > K)$
 $0 \quad (\omega < K)$



TRANSITORIO : $\alpha x^2 + \beta x + c = 0$

$\alpha_{1,2} = K_1, K_2$

① 2 Sol. reali distinte ($K_1 \neq K_2$)

$y(x) = C_1 e^{K_1 x} + C_2 e^{K_2 x}$

② 1 Sol. reale ($K_1 = K_2$)

$y(x) = C_1 e^{K_1 x} + C_2 x e^{K_1 x}$

③ 2 Sol. complesse ($K_{1,2} = a + jb$)

$y(x) = C_1 e^{ax} \cos(\beta x) + C_2 e^{ax} \sin(\beta x)$

FORMULE ELETTROTECNICA

• $V = RI$

• $P_d = VI = \frac{V^2}{R} = RI^2$

• RESISTENZE: SERIE $R_1 + \dots + R_n = R_{eq}$

PARALL. $\frac{1}{\frac{1}{R_1} + \dots + \frac{1}{R_n}} = R_{eq}$

• PARTITORE DI TENSIONE $V_k = E \frac{R_k}{\sum R_i}$

• PARTITORE DI CORRENTE $I_k = I \frac{1/R_k}{\sum 1/R_i}$

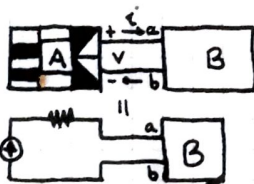
• NUMERI COMPLESSI

- F.a. $a + jb$
- F.e. AR^{54}
- F.t. $A \cos(\phi) + jA \sin(\phi)$

$\gamma = \sqrt{-1}$
 $A = \sqrt{a^2 + b^2}$
 $\phi = \arctg(b/a)$

• FASORE $x(t) = \bar{x} = A \cos(\omega t + \phi)$
 A ampiezza
 ω pulsazione
 ϕ fase

• THEVENIN



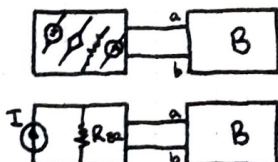
CALCOLARLO:

R_{ea} ? SPENGO GENERATORI INDIPENDENTI *

$\rightarrow R_{ea}$

V_{ea} ? $= V_{ab}$

• NORTON

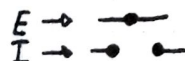


CALCOLARLO

R_{ea} ? SPENGO GENERATORI INDIPENDENTI *

I_{ea} ? I con ab CORTOCIRCUITATO

* SPENGO



• CONDENSATORE

$i_c = C \frac{dV_c}{dt}$

$V_c = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_c(\tau) d\tau$

$Z_c = \frac{1}{j\omega C}$

$U_c = \frac{1}{2} C V_c^2 \quad [F = \frac{C}{V}]$

• INDUTTORE

$i_L = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t V_L(\tau) d\tau$

$V_L = L \frac{di_L}{dt}$

$Z_L = j\omega L$

$U_L = \frac{1}{2} L i_L^2 \quad [H = \Omega s = \frac{Vs}{A}]$



Serie
 $\frac{1}{C_{eq}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}$
 $\sum_{i=1}^n L_i = L_{eq}$

Parallelo
 $C_{eq} = \sum_{i=1}^n C_i$
 $\frac{1}{L_{eq}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{L_i}$

RISONANZA IN SERIE $\omega L = \frac{1}{\omega C}$

RISONANZA IN PARALLELO $\omega^2 LC = 1$

MATRICI DOPPI BIPOLI

$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$

IMPEDENZE

$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$

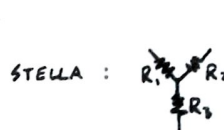
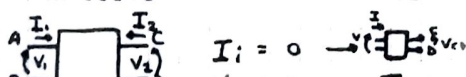
AMMETTENZE

$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$

IBRIDA

$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix}$

DI TRASMISSIONE DIRETTA



STELLA $\rightarrow$ TRIANGOLO
 $R_a = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}{R_1}$

$R_b = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}{R_2}$

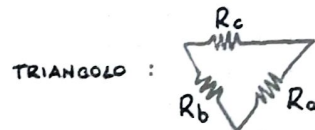
$R_c = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}{R_3}$

TRIANGOLO $\rightarrow$ STELLA

$R_1 = \frac{R_b R_c}{R_a + R_b + R_c}$

$R_2 = \frac{R_c R_a}{R_a + R_b + R_c}$

$R_3 = \frac{R_a R_b}{R_a + R_b + R_c}$

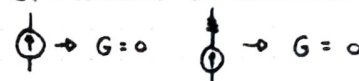


RETI A STELLA E A TRIANGOLO SI DICONO BILANCIATE QUANDO $R_1 = R_2 = R_3$, $R_a = R_b = R_c$

MILLMAN: $V_{AB} = \frac{\sum I_i}{\sum G_k}$

G_k : CONDUZZANZA DI OGNI RARO

I_i : CORRENTE DI CORTOCIRCUITO DI OGNI RARO



$T_F - T_A = R_T P_{diss}$