

# Appunti di Controlli Automatici 1

## Capitolo 6 – parte I

### Diagrammi di Bode

|                                                          |           |
|----------------------------------------------------------|-----------|
| <i>Introduzione.....</i>                                 | <i>1</i>  |
| <i>La funzione di risposta armonica.....</i>             | <i>2</i>  |
| <i>Diagrammi della risposta armonica.....</i>            | <i>4</i>  |
| DIAGRAMMI DI BODE .....                                  | 5         |
| <i>Regole di costruzione dei diagrammi di Bode .....</i> | <i>5</i>  |
| <i>Diagrammi di Bode delle funzioni elementari .....</i> | <i>9</i>  |
| ESEMPI VARI.....                                         | 23        |
| <i>Esempio: sistema del secondo ordine .....</i>         | <i>23</i> |
| <i>Esempio: sistema del secondo ordine .....</i>         | <i>25</i> |

## Introduzione

Nei capitoli precedenti abbiamo esaminato procedimenti per la soluzione delle equazioni differenziali lineari, ponendo in particolare rilievo quelli basati sulla *trasformazione di Laplace*: il nostro obiettivo era la deduzione della risposta dei sistemi lineari a eccitazioni tipiche, come il gradino o la rampa, così come a segnali di tipo qualunque. Questa procedura di analisi viene comunemente detta *analisi nel dominio del tempo*.

Ad essa, nello studio dei sistemi di controllo lineari, si affianca l'*analisi nel dominio della frequenza*, detta anche **analisi armonica**, che si basa su un diverso modello matematico dei sistemi lineari: la cosiddetta **funzione di risposta armonica**.

*La funzione di risposta armonica costituisce una rappresentazione dei sistemi lineari stazionari strettamente legata alla funzione di trasferimento ed è pertanto equivalente alle equazioni differenziali qualora si considerino sistemi inizialmente in quiete.* Tuttavia, essa è spesso più vantaggiosa per alcune sue caratteristiche, principale tra le quali è l'attitudine ad essere rilevata sperimentalmente: in altre parole, la funzione di risposta armonica rappresenta, rispetto all'equazione differenziale, un modello matematico di più agevole identificazione a partire dai dati sperimentali.

## La funzione di risposta armonica

Per definire la funzione di risposta armonica, dobbiamo partire da una proprietà caratteristica dei sistemi lineari stazionari. Consideriamo perciò un sistema lineare stazionario al cui ingresso è applicato un ingresso sinusoidale del tipo seguente:

$$x(t) = X \sin(\omega t)$$

Se il sistema è asintoticamente stabile, la sua uscita a regime (cioè una volta esaurito il transitorio) varia anch'essa con legge sinusoidale, caratterizzata dalla stessa pulsazione  $\omega$ . Essa può quindi essere espressa nel modo seguente:

$$y(t) = Y(\omega) \sin(\omega t + \phi(\omega))$$

Questa espressione mostra che l'ampiezza dell'uscita e l'angolo di fase rispetto all'ingresso sono, in generale, funzioni della pulsazione  $\omega$  del segnale di ingresso.

Si definisce, allora, **funzione di risposta armonica** la funzione  $F(\omega)$ , di variabile reale ed a valori complessi, avente come modulo il rapporto  $Y(\omega)/X$  e come argomento l'angolo  $\phi(\omega)$ :

$$F(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X} e^{j\phi(\omega)} = \frac{Y(\omega)}{X} (\cos(\phi(\omega)) + j\sin(\phi(\omega)))$$

*Questa funzione, in virtù della linearità del sistema, è indipendente dall'ampiezza  $X$  del segnale in ingresso e descrive completamente il comportamento del sistema in condizione di regime (periodico) alle varie frequenze.*

Premessa la definizione, consideriamo adesso un sistema lineare stazionario con funzione di trasferimento  $G(s)$  razionale fratta. Dato che siamo interessati a sistemi asintoticamente stabili, la funzione  $G(s)$  deve avere tutti i poli a parte reale negativa. Supponiamo allora di applicare in ingresso al sistema il segnale  $x(t) = X \sin(\omega t)$ : la sua trasformata di Laplace è

$$X(s) = X \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

Supponendo che il sistema parta da una condizione iniziale di quiete, la risposta del sistema a tale ingresso è una risposta forzata la cui trasformata di Laplace, per definizione, è data dal prodotto  $X(s) \cdot G(s)$ :

$$Y(s) = G(s)X(s) = G(s) \frac{X\omega}{s^2 + \omega^2} = G(s) \frac{X\omega}{(s + j\omega)(s - j\omega)}$$

E' evidente, da questa espressione, che i poli della funzione  $Y(s)$  sono gli stessi della funzione di trasferimento  $G(s)$ , più quelli corrispondenti al segnale ingresso, che in questo caso particolare sono  $p_1 = j\omega$  e  $p_2 = -j\omega$ . Effettuando, allora, l'antitrasformazione, i poli di  $G(s)$  corrispondono ad un termine transitorio  $y_0(t)$  (dato che sono tutti a parte reale negativa), mentre gli altri ad un termine permanente  $y_p(t)$  che, evidentemente, è di tipo sinusoidale: possiamo dunque scrivere, in generale, che

$$y(t) = y_0(t) + y_p(t) = y_0(t) + K_1 e^{j\omega t} + K_2 e^{-j\omega t}$$

In questa espressione,  $K_1$  è il residuo corrispondente al polo  $p_1=j\omega$ , mentre  $K_2$  è il residuo corrispondente a  $p_2=-j\omega$ . Li possiamo calcolare facilmente:

$$K_1 = [Y(s)(s - j\omega)]_{s=j\omega} = \left[ G(s) \frac{X\omega}{(s + j\omega)} \right]_{s=j\omega} = G(j\omega) \frac{X\omega}{2j\omega}$$

$$K_2 = [Y(s)(s + j\omega)]_{s=-j\omega} = \left[ G(s) \frac{X\omega}{(s - j\omega)} \right]_{s=-j\omega} = G(-j\omega) \frac{X\omega}{-2j\omega}$$

A questo punto, ricordando la proprietà della trasformata di Laplace secondo cui  $F(s^*) = F^*(s)$ , possiamo scrivere che

$$G(j\omega) = |G(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)} \longrightarrow G(-j\omega) = |G(j\omega)| e^{-j\varphi(\omega)}$$

dove ovviamente  $\varphi(\omega)$  è l'argomento di  $G(j\omega)$ , mentre  $|G(j\omega)|$  è il suo modulo. Con questa posizione, possiamo esprimere la  $y(t)$  nel modo seguente:

$$y(t) = y_0(t) + \frac{X}{2j} |G(j\omega)| e^{j(\omega t + \varphi(\omega))} - \frac{X}{2j} |G(j\omega)| e^{-j(\omega t + \varphi(\omega))} = y_0(t) + |G(j\omega)| X \frac{e^{j(\omega t + \varphi(\omega))} - e^{-j(\omega t + \varphi(\omega))}}{2j}$$

Adesso, dato che il sistema è per ipotesi asintoticamente stabile, possiamo trascurare il termine transitorio  $y_0(t)$ , assumendo di considerare istanti  $t$  sufficientemente grandi da avere  $y_0(t) \cong 0$ :

$$y(t) \cong |G(j\omega)| X \frac{e^{j(\omega t + \varphi(\omega))} - e^{-j(\omega t + \varphi(\omega))}}{2j} = |G(j\omega)| X \sin(\omega t + \varphi(\omega))$$

D'altra parte, abbiamo in precedenza detto che l'uscita del sistema deve essere nella forma generale  $y(t) = Y(\omega) \sin(\omega t + \varphi(\omega))$  ed abbiamo inoltre definito la funzione di risposta armonica mediante la relazione  $F(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X} (\cos(\varphi(\omega)) + j \sin(\varphi(\omega)))$ : possiamo allora concludere che

$$\boxed{F(\omega) = G(j\omega)}$$

In definitiva, abbiamo dimostrato il seguente **teorema**: *dato un sistema lineare stazionario con funzione di trasferimento razionale fratta avente tutti i poli a parte reale negativa e soggetto ad eccitazione sinusoidale, esso presenta, a regime, una risposta sinusoidale avente la stessa frequenza dell'eccitazione; inoltre, la funzione di risposta armonica del sistema si ottiene dalla funzione di trasferimento  $G(s)$  ponendo  $s=j\omega$ .*

N.B. La funzione di risposta armonica si può definire anche per sistemi instabili: tuttavia, in questo caso essa non ha significato fisico né risulta misurabile sperimentalmente.

A questo punto, ricordando che la funzione di trasferimento ha corrispondenza biunivoca con la sua antitrasformata di Laplace, ossia con la *funzione di risposta all'impulso*, possiamo anche affermare che la risposta all'impulso di un sistema lineare asintoticamente stabile determina univocamente la sua risposta armonica. Si può dimostrare facilmente anche il contrario, ossia che la risposta armonica di un sistema lineare asintoticamente stabile determina univocamente la sua risposta all'impulso.

## Diagrammi della risposta armonica

La rappresentazione grafica della funzione di risposta armonica viene effettuata con speciali diagrammi, che costituiscono la base dei procedimenti grafici per la sintesi delle *reti correttrici* nel dominio delle frequenze.

Consideriamo allora un sistema lineare stazionario, asintoticamente stabile, avente funzione di trasferimento  $G(s)$ . Abbiamo visto, nei paragrafi precedenti, che da questa funzione possiamo ricavare la funzione di risposta armonica semplicemente ponendo  $s=j\omega$ : otteniamo in tal modo la funzione  $G(j\omega)$ . Questa funzione è una funzione di variabile reale ( $0 \leq \omega < \infty$ ) ed a valori complessi, per cui si può rappresentare nelle diverse notazioni possibili per i numeri complessi. Ce ne interessano due in particolare:

notazione trigonometrica  $\longrightarrow G(j\omega) = |G(j\omega)|e^{j\arg(G(j\omega))}$

notazione cartesiana  $\longrightarrow G(j\omega) = \operatorname{Re}\{G(j\omega)\} + j \operatorname{Im}\{G(j\omega)\}$

In base a queste notazioni, ci sono due distinti modi per rappresentare graficamente la funzione  $G(j\omega)$  in funzione della pulsazione  $\omega$ :

- quando si rappresenta  $G(j\omega)$  in termini di modulo e fase, entrambi funzioni di  $\omega$ , si ottengono i cosiddetti **diagrammi di Bode** (o *diagrammi logaritmici*);
- quando invece si rappresenta  $G(j\omega)$  in termini di parte reale e coefficiente della parte immaginaria, sempre funzioni di  $\omega$ , si ottengono i cosiddetti **diagrammi di Nyquist** (o *diagrammi polari*).

Il nostro obiettivo è quello di capire come si costruiscono questi diagrammi e come se ne sfruttano le proprietà. Cominceremo dai diagrammi di Bode.

## Diagrammi di Bode

### Regole di costruzione dei diagrammi di Bode

Al fine di introdurre i **diagrammi di Bode**, è per prima cosa necessario porre in forma più opportuna la funzione di trasferimento  $G(s)$ .

Sappiamo intanto di poter esprimere la funzione di trasferimento nel modo seguente:

$$G(s) = K \frac{\prod_{j=1}^m (s - z_j)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)}$$

In questo modo, abbiamo evidenziato gli zeri ed i poli della funzione. In più, conviene separare i poli nell'origine dai poli reali e dalle coppie di poli complessi coniugati e, per quanto riguarda il numeratore, separare gli zeri reali dalle coppie di zeri complessi coniugati:

$$G(s) = K \frac{\prod_{j=1}^p (s - z_j) \prod_{h=1}^q (s^2 + 2\delta_h \omega_{mh} s + \omega_{mh}^2)}{s^\mu \prod_{i=1}^v (s - p_i) \prod_{k=1}^w (s^2 + 2\delta_k \omega_{mk} s + \omega_{mk}^2)}$$

Stiamo in pratica supponendo quanto segue:

- la funzione  $G(s)$  presenta  $\mu$  poli nell'origine,  $v$  poli reali e  $w$  coppie di poli complessi coniugati: ovviamente risulta  $\mu + v + 2w = n$ ;
- la funzione  $G(s)$  presenta  $p$  zeri reali e  $q$  coppie di zeri complessi coniugati, in modo tale che risulti  $p + 2q = m$ .

A questo punto, al posto di evidenziare i poli e gli zeri reali, evidenziamo le costanti di tempo ad essi associate: considerando che

$$\begin{aligned} (s - z_j) &= z_j \left( \frac{s}{z_j} - 1 \right) = z_j (-T_j s - 1) = -z_j (1 + T_j s) \\ (s - p_i) &= -p_i (1 + T_i s) \end{aligned}$$

abbiamo che

$$G(s) = K \frac{\prod_{j=1}^p (-z_j) \prod_{j=1}^p (1 + T_j s) \prod_{h=1}^q (s^2 + 2\delta_h \omega_{mh} s + \omega_{mh}^2)}{s^\mu \prod_{i=1}^v (-p_i) \prod_{i=1}^v (1 + T_i s) \prod_{k=1}^w (s^2 + 2\delta_k \omega_{mk} s + \omega_{mk}^2)}$$

Ponendo

$$K' = K \frac{\prod_{j=1}^p (-z_j)}{\prod_{i=1}^v (-p_i)}$$

possiamo dunque scrivere  $G(s)$  nella forma

$$G(s) = K' \frac{\prod_{j=1}^p (1 + T_j s) \prod_{h=1}^q (s^2 + 2\delta_h \omega_{mh} s + \omega_{mh}^2)}{s^\mu \prod_{i=1}^v (1 + T_i s) \prod_{k=1}^w (s^2 + 2\delta_k \omega_{mk} s + \omega_{mk}^2)}$$

In modo analogo, possiamo procedere per zeri e poli complessi: scrivendo infatti che

$$s^2 + 2\delta_{h/k} \omega_{mh/k} s + \omega_{mh/k}^2 = \omega_{mh/k}^2 \left( \frac{s^2}{\omega_{mh/k}^2} + \frac{2\delta_{h/k}}{\omega_{mh/k}} s + 1 \right)$$

abbiamo che

$$G(s) = K' \frac{\prod_{j=1}^p (1 + T_j s) \prod_{h=1}^q \omega_{mh}^2 \prod_{h=1}^q \left( \frac{s^2}{\omega_{mh}^2} + \frac{2\delta_h}{\omega_{mh}} s + 1 \right)}{s^\mu \prod_{i=1}^v (1 + T_i s) \prod_{k=1}^q \omega_{mk}^2 \prod_{k=1}^w \left( \frac{s^2}{\omega_{mk}^2} + \frac{2\delta_k}{\omega_{mk}} s + 1 \right)}$$

Ponendo allora

$$K_1 = K' \frac{\prod_{h=1}^q \omega_{mh}^2}{\prod_{k=1}^q \omega_{mk}^2}$$

possiamo infine porre la  $G(s)$  nella seguente forma conclusiva:

$$G(s) = K_1 \frac{\prod_{j=1}^p (1 + T_j s) \prod_{h=1}^q \left( \frac{s^2}{\omega_{mh}^2} + \frac{2\delta_h}{\omega_{mh}} s + 1 \right)}{s^\mu \prod_{i=1}^v (1 + T_i s) \prod_{k=1}^w \left( \frac{s^2}{\omega_{mk}^2} + \frac{2\delta_k}{\omega_{mk}} s + 1 \right)}$$

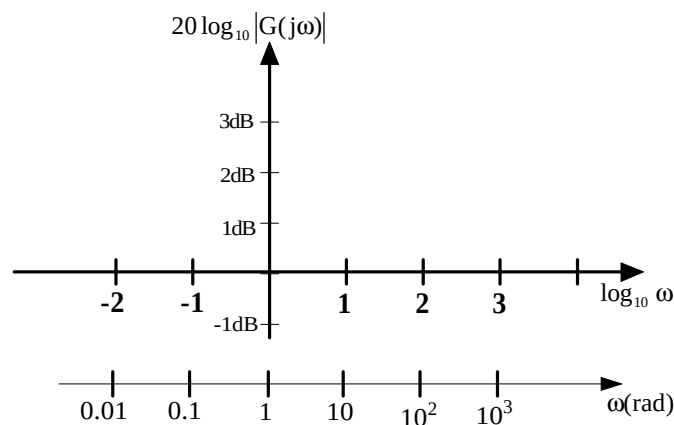
A questo punto, ottenuta la  $G(s)$  in questa forma, possiamo individuare la funzione di risposta armonica  $G(j\omega)$  nella forma in cui ci serve:

$$G(j\omega) = \frac{K_1}{(j\omega)^\mu} \frac{\prod_{j=1}^p (1 + jT_j \omega) \prod_{h=1}^q \left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_{mh}^2} + j \frac{2\delta_h}{\omega_{mh}} \omega \right)}{\prod_{i=1}^v (1 + jT_i \omega) \prod_{k=1}^w \left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_{mk}^2} + j \frac{2\delta_k}{\omega_{mk}} \omega \right)}$$

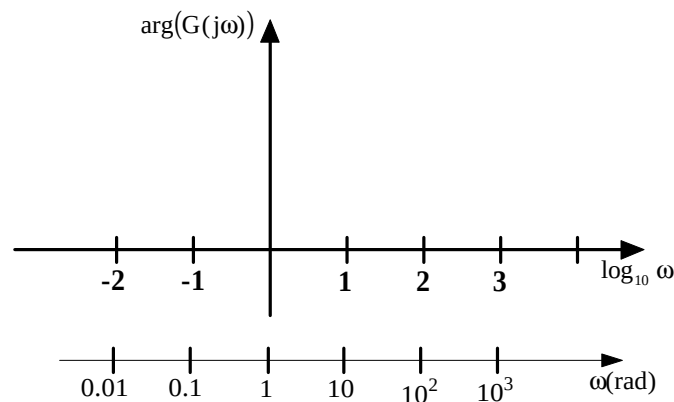
Questa è l'espressione della funzione di risposta armonica sulla base della quale si costruiscono i **diagrammi di Bode**.

I diagrammi di Bode si costruiscono riportando, in funzione della pulsazione  $\omega$ , il modulo e l'argomento della funzione di risposta armonica:

- per quanto riguarda l'asse delle ascisse, non si considera la pulsazione  $\omega$ , bensì la quantità  $\log_{10} \omega$ , utilizzando quindi la cosiddetta *scala logaritmica*; in questo modo, l'asse delle ascisse viene suddiviso in **decadi**: gli estremi di una decade sono due valori di pulsazione di cui quello finale è 10 volte quello iniziale:
- per quanto riguarda, invece, l'asse delle ordinate, sussiste una differenza tra il diagramma del modulo di  $G(j\omega)$  e quello dell'argomento di  $G(j\omega)$ :
  - \* nel **diagramma dei moduli** (o *diagramma delle ampiezze*), non viene riportato direttamente  $|G(j\omega)|$ , bensì la quantità  $20\log_{10}|G(j\omega)|$ , ossia il modulo di  $G(j\omega)$  espresso in dB:



- \* nel **diagramma degli argomenti** (o *diagramma delle fasi*), invece, viene direttamente riportato  $\arg(G(j\omega))$ :



E' bene comunque precisare che, nonostante la scala usata per le ascisse sia quella logaritmica, i valori numerici che vengono riportati sono quelli della

pulsazione  $\omega$  espressa in radianti, in modo da facilitare la lettura del diagramma e soprattutto i calcoli che su esso si basano.

I vantaggi che si conseguono impiegando la scala logaritmica sono i seguenti:

- in primo luogo, è possibile rappresentare, col dovuto dettaglio, grandezze che variano su range notevolmente estesi: in particolare, il modulo della funzione di risposta armonica, generalmente, passa, all'aumentare della frequenza, da valori molto alti a valori molto bassi;
- in secondo luogo, è possibile sommare i diagrammi relativi a sistemi in cascata, al fine di ottenere il diagramma del sistema complessivo: infatti, la risposta armonica complessiva si ottiene eseguendo il prodotto delle singole risposte armoniche, cioè eseguendo il prodotto delle ampiezze (che, impiegando una scala logaritmica, si riconduce ad una somma) e la somma algebrica delle fasi;
- infine, è possibile costruire i diagrammi relativi ad una funzione di risposta armonica, data in forma fattorizzata, come somma di *diagrammi elementari*, di un numero limitato di tipi fondamentali, corrispondente ciascuno ad un singolo fattore.

Una volta individuate le quantità riportate nei diagrammi di Bode e le scale secondo cui tali quantità vengono riportate, passiamo a vedere le principali caratteristiche di tali diagrammi. A tale scopo, riprendiamo l'espressione della  $G(j\omega)$  trovata prima:

$$G(j\omega) = \frac{K_1 \prod_{j=1}^p (1 + jT_j \omega) \prod_{h=1}^q \left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_{nh}^2} + j \frac{2\delta_h}{\omega_{nh}} \omega \right)}{(j\omega)^\mu \prod_{i=1}^v (1 + jT_i \omega) \prod_{k=1}^w \left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_{nk}^2} + j \frac{2\delta_k}{\omega_{nk}} \omega \right)}$$

In questa espressione si individuano facilmente le seguenti **funzioni elementari**:

$$\begin{aligned} &K \\ &(j\omega)^{-\mu} \\ &(1 + j\omega T)^{\pm 1} \\ &\left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + j \frac{2\delta}{\omega_n} \omega \right)^{\pm 1} \end{aligned}$$

Allora, se si tracciano i diagrammi di Bode, delle ampiezze e delle fasi, corrispondenti a queste funzioni elementari, basterà poi sommarli per ottenere il diagramma di Bode della funzione complessiva  $G(j\omega)$ . Il nostro scopo diventa dunque quello di tracciare i diagrammi di Bode delle funzioni elementari.



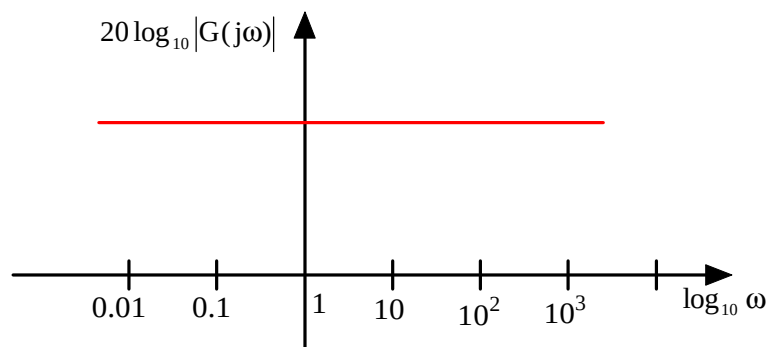
## Diagrammi di Bode delle funzioni elementari

La prima funzione elementare di cui ci occupiamo è

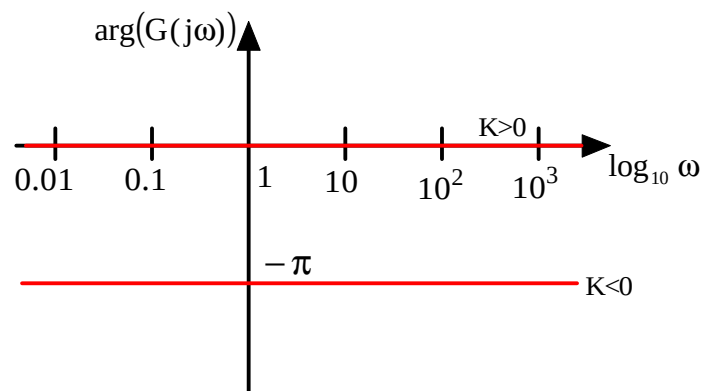
$$G(j\omega) = K$$

Questa funzione ha evidentemente modulo pari a  $K$  (indipendente da  $\omega$ ) e fase dipendente solo dal segno di  $K$ : se  $K$  è positiva, la fase è  $0$ , mentre se  $K$  è negativa, la fase è  $-\pi$ . Deduciamo allora quanto segue:

- il diagramma dei moduli è una retta orizzontale corrispondente a  $|G(j\omega)| = 20 \log_{10} |K|$ :



- il diagramma delle fasi è invece una retta orizzontale corrispondente a  $-\pi$  se  $K < 0$  oppure coincidente con l'asse delle ascisse se  $K > 0$ :



La seconda funzione elementare è

$$G(j\omega) = (j\omega)^{-h}$$

Questa funzione corrisponde ad eventuali poli nulli della funzione di trasferimento del sistema. Calcoliamo per prima cosa il modulo di questa funzione:

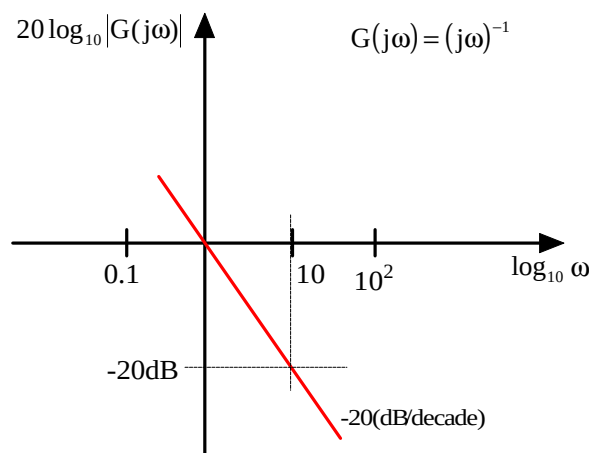
$$|G(j\omega)| = |(j\omega)^{-h}| = \omega^{-h}$$

La funzione che viene allora riportata sul diagramma di Bode dei moduli è

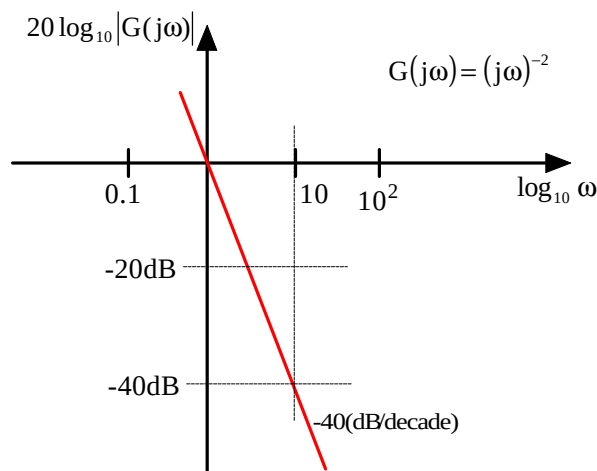
$$|G(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log_{10} \omega^{-h} = -20h \log_{10} \omega$$

Dato che in ascisse viene riportata la quantità  $\log_{10} \omega$ , deduciamo che  $|G(j\omega)|_{\text{dB}} = -20h \log_{10} \omega$  corrisponde ad una retta passante per l'origine e di pendenza  $-20h(\text{dB/decade})$  dipendente dal valore di  $h$ :

- il caso più semplice è ovviamente quello di un sistema avente 1 solo polo nell'origine, per cui  **$h=1$** : la funzione da considerare è dunque  $G(j\omega) = (j\omega)^{-1}$ , per cui la quantità da riportare sul diagramma dei moduli è  $|G(j\omega)|_{\text{dB}} = -20 \log_{10} \omega$ , corrispondente ad una retta (passante per l'origine) di pendenza  $-20(\text{dB/decade})$ :



- il secondo caso è quello di un sistema avente 2 poli nell'origine, per cui  **$h=2$** : la funzione da considerare è dunque  $G(j\omega) = (j\omega)^{-2}$ , per cui la quantità da riportare sul diagramma dei moduli è  $|G(j\omega)|_{\text{dB}} = -40 \log_{10} \omega$ , corrispondente ad una retta (passante per l'origine) di pendenza  $-40(\text{dB/decade})$ :



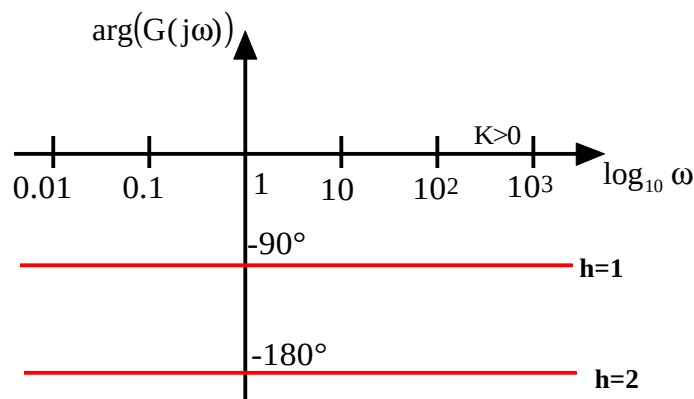
Si osserva, dunque, in generale, che, aumentando il numero  $h$  dei poli nell'origine (cioè il cosiddetto *tipo* del sistema), il diagramma dei moduli della

funzione  $G(j\omega) = (j\omega)^{-h}$  è sempre una retta passante per l'origine, ma di pendenza crescente: tale pendenza aumenta di 20(dB/decade) per ogni aumento unitario di  $h$ .

Passiamo adesso al diagramma delle fasi della funzione  $G(j\omega) = (j\omega)^{-h}$ : abbiamo intanto che

$$\arg G(j\omega) = \arg[(j\omega)^{-h}] = \arg\left[\frac{1}{(j\omega)^h}\right] = \begin{cases} -90^\circ & h=1 \\ -180^\circ & h=2 \\ \dots & h>2 \end{cases}$$

Avendo una quantità puramente immaginaria a denominatore, l'argomento è un multiplo intero  $-\pi/2$ , per cui avremo, nel diagramma delle fasi, ancora una volta una retta orizzontale, sempre più "lontana" dall'asse reale quanto maggiore è il numero  $h$  di poli nell'origine:



La terza funzione elementare di cui ci occupiamo è

$$G(j\omega) = (1 + j\omega T)^{-1}$$

Cominciamo sempre dal modulo:

$$|G(j\omega)| = |(1 + j\omega T)^{-1}| = \left| \frac{1}{1 + j\omega T} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}$$

La funzione da riportare sul diagramma dei moduli è dunque

$$|G(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log_{10} |G(j\omega)| = 20 \log_{10} \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}} = -20 \log_{10} \sqrt{1 + \omega^2 T^2} = -10 \log_{10} (1 + \omega^2 T^2)$$

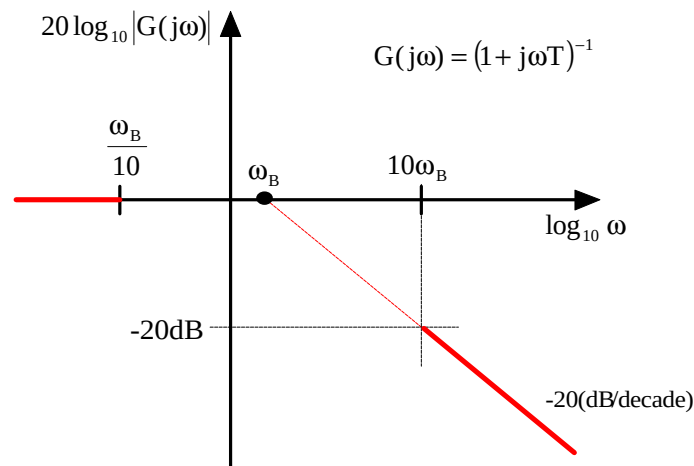
Per capire quale andamento abbia questa funzione, possiamo osservare quello che succede per  $\omega$  molto piccolo e per  $\omega$  molto grande:

$$\text{se } \omega \ll \frac{1}{T} \rightarrow |G(j\omega)|_{\text{dB}} \cong -10 \log_{10} 1 = 0(\text{dB})$$

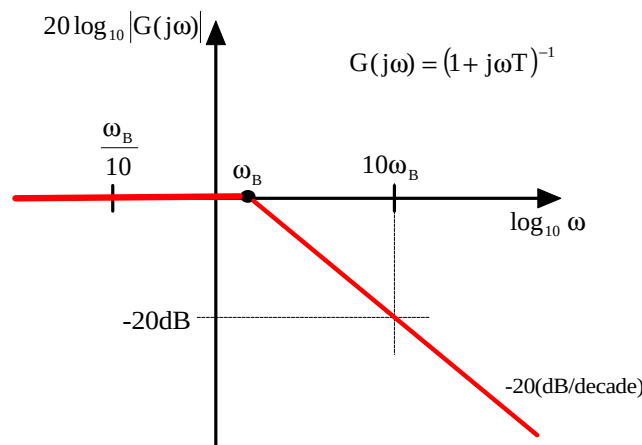
$$\text{se } \omega \gg \frac{1}{T} \rightarrow |G(j\omega)|_{\text{dB}} \cong -20 \log_{10} \omega T$$

In base a questi risultati, indicata con  $\omega_B = \frac{1}{T}$  la cosiddetta **frequenza di break** (o *frequenza di rottura* o anche *frequenza d'angolo*), possiamo affermare che l'andamento di  $|G(j\omega)|_{dB}$  corrisponde ad una retta coincidente con l'asse orizzontale per  $\omega \ll \omega_B$  e, per  $\omega \gg \omega_B$ , ad una retta passante per il punto  $(0, \omega_B)$  e con pendenza di  $-20(dB/decade)$ .

Si tratta allora di capire come quantificare le dizioni  $\omega \ll \omega_B$  e  $\omega \gg \omega_B$ : si assume che  $\omega \ll \omega_B$  equivalga a porsi una decade prima di  $\omega_B$  e, ovviamente, che  $\omega \gg \omega_B$  equivalga a porsi una decade dopo  $\omega_B$ . Così facendo, possiamo tracciare il diagramma dei moduli da  $-\infty$  fino a una decade prima di  $\omega_B$  e da una decade dopo  $\omega_B$  fino a  $+\infty$ :



Dobbiamo adesso capire l'andamento del diagramma nell'intorno della frequenza  $\omega_B$ , ossia tra  $\omega_B/10$  e  $10\omega_B$ . E' possibile allora procedere in modo diversi: un primo modo sarebbe quello di calcolarsi la quantità  $|G(j\omega)|_{dB}$  in corrispondenza di 3 o 4 punti nell'intervallo considerato e di interpolare i valori ottenuti al fine di raccordare i due tratti estremi; un secondo modo, più approssimato, è invece quello di costruire il **diagramma asintotico**, che si ottiene semplicemente prolungando i due tratti estremi fino a congiungersi in  $\omega_B$ :



Così facendo, si ottiene un diagramma approssimato, che però approssima molto bene (lo si può verificare analiticamente) il diagramma reale. Nel seguito, quindi, faremo sempre uso di questo diagramma asintotico.

Passiamo ora al diagramma delle fasi della funzione  $G(j\omega) = (1 + j\omega T)^{-1}$ : la fase di questa funzione è

$$\arg G(j\omega) = \arg[(1 + j\omega T)^{-1}] = \arg\left[\frac{1}{1 + j\omega T}\right] = -\arctg(\omega T)$$

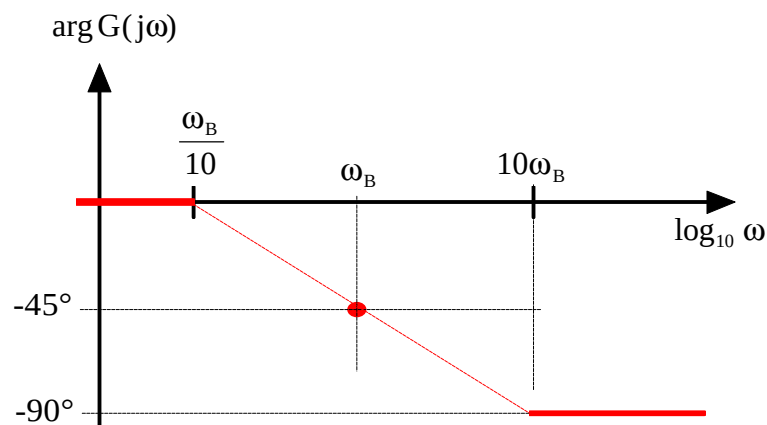
Dobbiamo dunque diagrammare la funzione  $-\arctg(\omega T)$ . Anche in questo caso, possiamo cominciare ad analizzare l'andamento asintotico del diagramma:

$$\text{se } \omega \ll \frac{1}{T} \rightarrow \arg G(j\omega) \cong 0$$

$$\text{se } \omega = \frac{1}{T} \rightarrow \arg G(j\omega) = -45^\circ$$

$$\text{se } \omega \gg \frac{1}{T} \rightarrow \arg G(j\omega) \cong -90^\circ$$

In base a questi risultati, possiamo tracciare un diagramma delle fasi qualitativo fatto nel modo seguente:



Si tratta ancora una volta di stabilire l'andamento del diagramma nell'intorno della frequenza di break  $\omega_B = 1/T$ : possiamo allora approssimare questo andamento con un segmento di pendenza pari a quella della tangente al diagramma reale nel punto  $(\omega_B, -45^\circ)$ .

Dobbiamo allora andare a calcolare questa tangente e in particolare la sua pendenza: analiticamente, dobbiamo calcolare la quantità  $\frac{d(\arg G(j\omega))}{d(\log_{10} \omega)}$ , ossia

$$\begin{aligned} \frac{d(\arg G(j\omega))}{d(\log_{10} \omega)} &= \frac{d}{d(\log_{10} \omega)} [-\arctg(\omega T)] = \frac{d}{d\omega} [-\arctg(\omega T)] \frac{d\omega}{d(\log_{10} \omega)} = -\frac{T}{1 + \omega^2 T^2} \frac{d\omega}{d(\log_{10} \omega)} = \\ &= -\frac{T}{1 + \omega^2 T^2} \omega \log_e 10 \end{aligned}$$

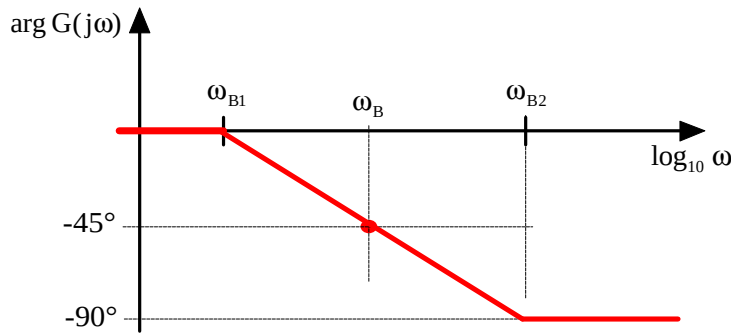
Dato che  $\log_e 10 = 2.3$  è un numero caratteristico, deduciamo che la pendenza della tangente al diagramma reale vale

$$\frac{d(\arg G(j\omega))}{d(\log_{10} \omega)} = -\frac{T}{1+\omega^2 T^2} \omega \cdot 2.3$$

ed è ovviamente funzione di  $\omega$ , ossia del punto in cui ci stiamo ponendo: a noi interessa il punto  $\omega = \omega_B$ , in corrispondenza del quale si trova un altro numero caratteristico:

$$\left[ \frac{d(\arg G(j\omega))}{d(\log_{10} \omega)} \right]_{\omega = \frac{1}{T}} = -\frac{1}{1+1} \cdot 2.3 = -1.151$$

Possiamo dunque tracciare, nell'intorno della frequenza di break, un segmento di pendenza 1.151:



Ovviamente, la conoscenza della pendenza di tale segmento consente di individuare con precisione il punto  $\omega_{B1}$  in cui il segmento stesso interseca l'asse delle ascisse: infatti, dato che il segmento passa per i punti  $(\omega_{B1}, 0)$  e  $(\omega_B, -45^\circ)$  ed ha pendenza 1.151, possiamo scrivere che

$$\frac{\frac{\pi}{4}}{\log_{10} \omega_B - \log_{10} \omega_{B1}} = 1.151 \longrightarrow \log_{10} \frac{\omega_B}{\omega_{B1}} = \frac{\pi}{4} \cdot 1.151 \longrightarrow \frac{\omega_B}{\omega_{B1}} = 10^{\frac{\pi \cdot 1.151}{4}} = 4.81$$

da cui concludiamo che  $\omega_{B1} = \frac{\omega_B}{4.81}$ .

La relazione trovata è fondamentale, in quanto consente di tracciare il diagramma delle fasi semplicemente conoscendo la frequenza di break  $\omega_B$ : nota  $\omega_B$ , dividendo per **4.81** (in prima approssimazione, basta anche dividere per 5) si trova il punto  $\omega_{B1}$  in cui il diagramma interseca l'asse delle ascisse per poi rimanere su di esso per  $\omega$  decrescenti. Ovviamente, moltiplicando per 4.81 si ottiene invece il valore  $\omega_{B2}$  della pulsazione a partire dalla quale il diagramma si assesta asintoticamente sul valore  $-90^\circ$ ; tra i valori  $\omega_{B1}$  e  $\omega_{B2}$ , il diagramma è costituito da un segmento di pendenza -1.151.

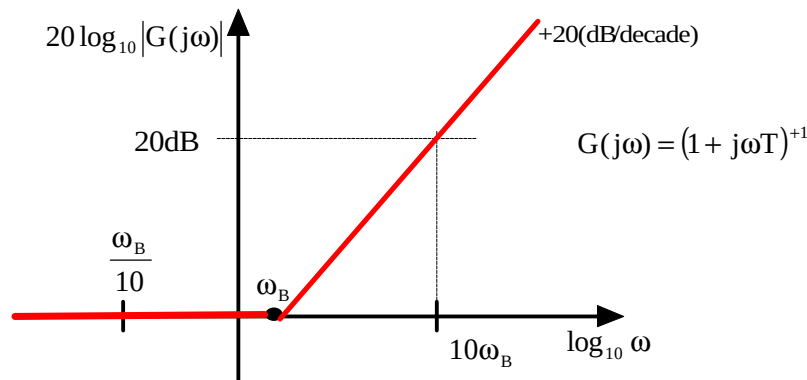
Questo semplice procedimento prende il nome di “**regola del 4.81**”.

Abbiamo dunque capito come diagrammare il modulo e la fase della funzione elementare  $G(j\omega) = (1 + j\omega T)^{-1}$ . Non ci vuole molto per capire come diagrammare il modulo e la fase della funzione

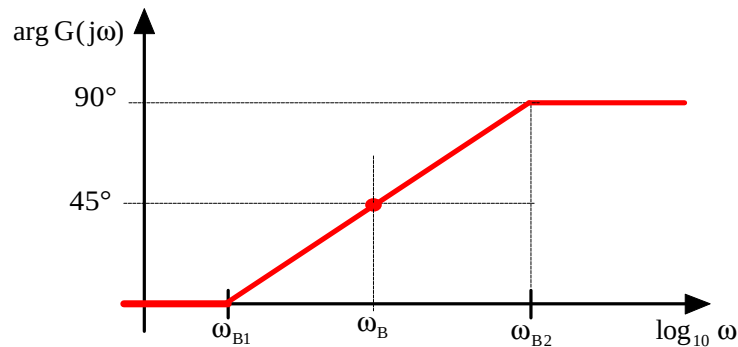
$$G(j\omega) = (1 + j\omega T)^{+1}$$

E' evidente, infatti, che sia il diagramma del modulo sia quello della fase di questa funzione si ottengono semplicemente ribaltando, rispetto all'asse delle ascisse, quelli di  $G(j\omega) = (1 + j\omega T)^{-1}$ .

Il diagramma dei moduli sarà dunque fatto nel modo seguente (ovviamente si tratta sempre del *diagramma asintotico*):



Il diagramma delle fasi, per il quale vale ovviamente ancora la *regola del 4.81*, sarà del tipo seguente:



Osserviamo adesso che le funzioni  $(1 + j\omega T)^{-1}$  e  $(1 + j\omega T)^{+1}$ , assumendo  $T$  positivo, sono relative, rispettivamente, ad un polo a parte reale negativa e ad uno zero a parte reale negativa. In modo del tutto analogo, allora, le funzioni  $(1 - j\omega T)^{-1}$  e  $(1 - j\omega T)^{+1}$ , assumendo  $T$  sempre positivo, sono relative, rispettivamente, ad un polo a parte reale positiva e ad uno zero a parte reale positiva. Ci chiediamo allora come sono fatti i diagrammi di Bode di queste funzioni. Consideriamo ad esempio la funzione

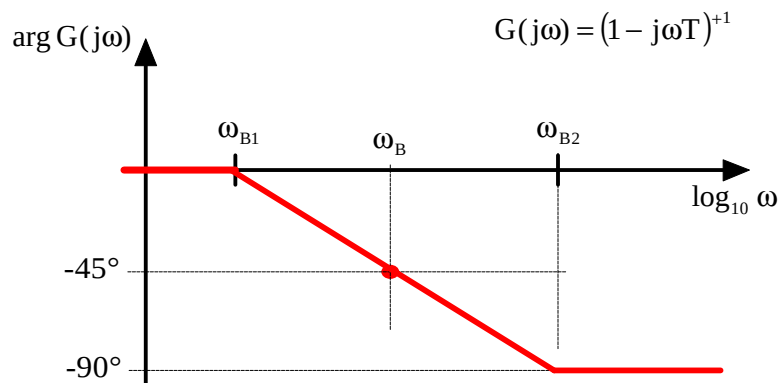
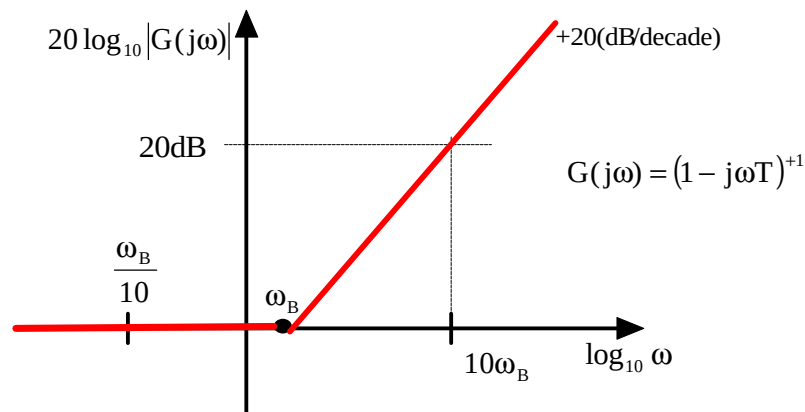
$$G(j\omega) = (1 - j\omega T)^{+1}$$

Possiamo intanto scrivere che

$$G(j\omega) = (1 - j\omega T)^{-1} = (1 + (-j\omega)T)^{-1} = G'(-j\omega) \longrightarrow \begin{cases} |G(j\omega)| = |G'(-j\omega)| \\ \arg G(j\omega) = \arg G'(-j\omega) = -\arg G'(j\omega) \end{cases}$$

dove  $G'(j\omega) = (1 + j\omega T)^{-1}$ .

Questo risultato dice dunque che il diagramma del modulo di  $G(j\omega) = (1 - j\omega T)^{-1}$  rimane immutato rispetto a quello di  $(1 + j\omega T)^{-1}$ , mentre quello della fase si ottiene da quello di  $(1 + j\omega T)^{-1}$  tramite un ribaltamento rispetto all'asse delle ascisse, per cui coincide con quello di  $(1 + j\omega T)^{-1}$ .

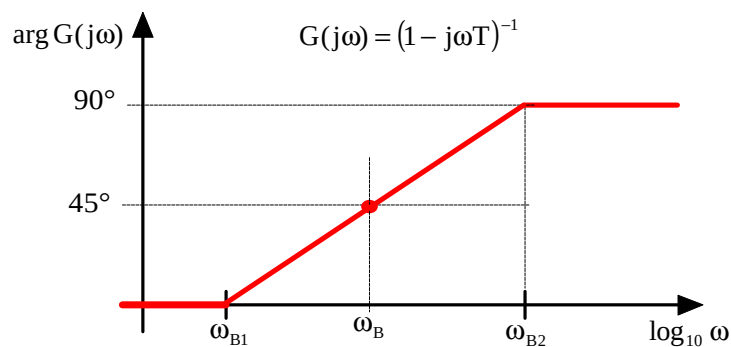
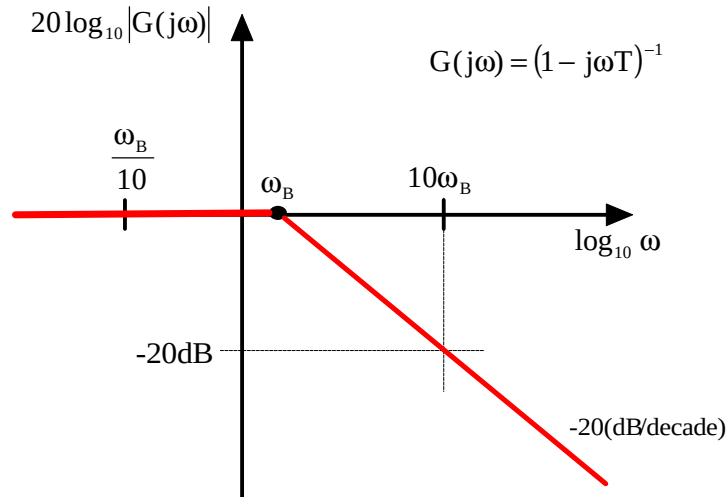


Ovviamente, i diagrammi della funzione

$$G(j\omega) = (1 - j\omega T)^{-1}$$

si otterranno entrambi da quelli, appena tracciati, della funzione  $(1 - j\omega T)^{-1}$  tramite un ribaltamento rispetto all'asse delle ascisse:





La penultima funzione di cui dobbiamo tracciare i diagrammi di Bode è

$$G(j\omega) = \left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + j \frac{2\delta}{\omega_n} \omega \right)^{-1}$$

(corrispondente alla presenza di una coppia di poli complessi coniugati). Calcoliamo per prima cosa il modulo di questa funzione:

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(\frac{2\delta}{\omega_n} \omega\right)^2}} \xrightarrow{\text{sul diagramma}} |G(j\omega)|_{\text{dB}} = -20 \log_{10} \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(\frac{2\delta}{\omega_n} \omega\right)^2}$$

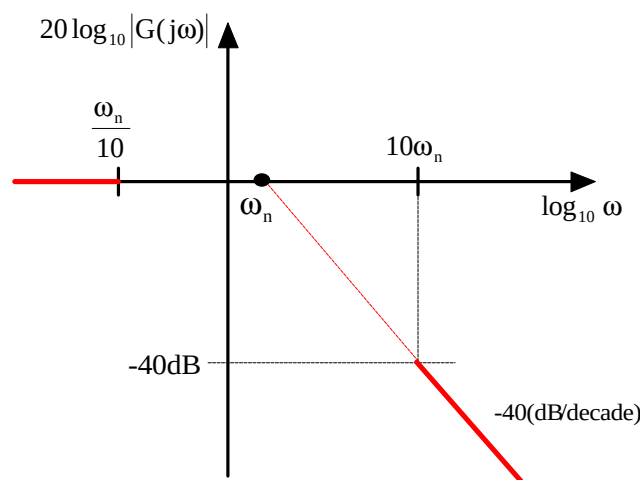
Evidentemente, la quantità  $|G(j\omega)|_{\text{dB}}$ , oltre a dipendere da  $\omega$ , dipende anche dalla *pulsazione naturale*  $\omega_n$  e dal *coefficiente di smorzamento*  $\delta$ . E' bene ricordare che facciamo riferimento al caso in cui  $0 \leq \delta < 1$ , in quanto, se fosse  $\delta \geq 1$ , le due radici non sarebbero più complesse coniugate e si potrebbe scindere il termine di 2° grado nel prodotto di due termini di 1° grado, riconducendosi perciò ai casi considerati in precedenza.

Premesso questo, supponiamo nota la pulsazione naturale  $\omega_n$ , mentre lasciamo variabile  $\delta$ . Possiamo allora vedere quanto vale la funzione  $|G(j\omega)|_{dB}$  per  $\omega$  molto maggiore e molto minore della pulsazione naturale:

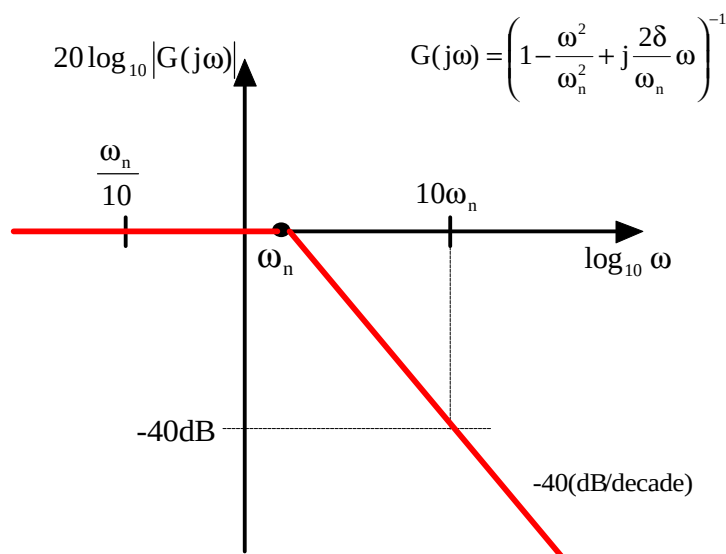
$$\text{se } \omega \ll \omega_n \rightarrow |G(j\omega)|_{dB} \cong 10 \log_{10} 1 = 0$$

$$\text{se } \omega \gg \omega_n \rightarrow |G(j\omega)|_{dB} \cong -20 \log_{10} \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 = -40 \log_{10} \frac{\omega}{\omega_n}$$

Quindi, per  $\omega \ll \omega_n$ , il diagramma coincide con l'asse delle ascisse, mentre, per  $\omega \gg \omega_n$ , il diagramma è costituito da una retta passante per il punto  $(\omega_n, 0)$  e di pendenza  $-40(\text{dB/decade})$ :



Dobbiamo ora capire l'andamento del diagramma nell'intorno della frequenza  $\omega_n$ , ossia tra  $\omega_n/10$  e  $10\omega_n$ . Allora, come abbiamo fatto per i termini di primo grado, possiamo pensare di utilizzare anche qui il **diagramma asintotico**, che si ottiene semplicemente prolungando i due tratti estremi fino a congiungersi in  $\omega_n$ :



Tuttavia, in questo caso subentra una complicazione rispetto a quanto accade per i termini del primo ordine: infatti, mentre in quel caso si può facilmente verificare che il diagramma asintotico approssima comunque bene il diagramma reale, in questo caso l'approssimazione dipende strettamente dal valore del coefficiente di smorzamento  $\delta$ . Vediamo allora qualche dettaglio in più su questo aspetto.

Nel diagramma asintotico appena tracciato, abbiamo supposto  $|G(j\omega_n)|_{dB} = 0$ ; se, invece, usiamo l'espressione di  $|G(j\omega)|_{dB}$ , otteniamo che

$$|G(j\omega_n)|_{dB} = 20 \log_{10} \frac{1}{2\delta}$$

Abbiamo cioè che, in  $\omega = \omega_n$ , la quantità  $|G(j\omega)|_{dB}$  non è nulla, ma assume un valore tanto maggiore quanto più piccolo è il coefficiente di smorzamento  $\delta$ . Questo è già un primo risultato che ci consente di dire che il diagramma reale può discostarsi apprezzabilmente dal diagramma asintotico.

Si può trovare anche un altro risultato importante: si trova infatti che la funzione  $|G(j\omega)|_{dB}$  presenta un massimo nel punto

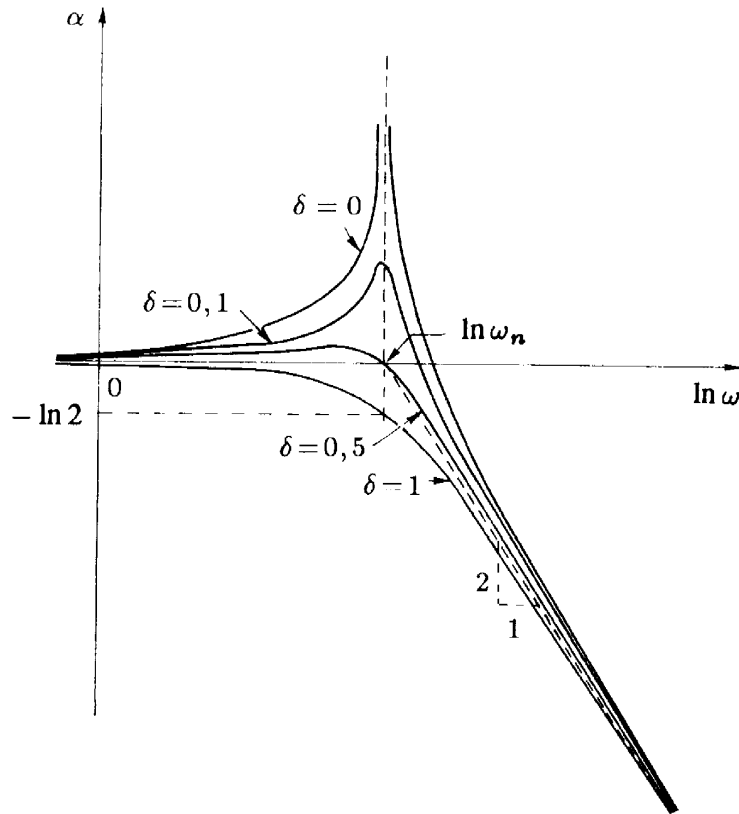
$$\omega_{max} = \omega_n \cdot \sqrt{1 - 2\delta^2}$$

Evidentemente, al diminuire di  $\delta$ , tale punto di massimo si approssima al valore  $\omega_n$ , confermando una volta di più la differenza tra il diagramma reale e quello asintotico.

Naturalmente, perché il valore  $\omega_{max}$  abbia un senso, l'argomento della radice a denominatore deve essere positivo, dal che deduciamo che questo massimo esiste solo se  $1 - 2\delta^2 > 0$ , ossia se  $\delta < \frac{\sqrt{2}}{2}$ . Possiamo allora affermare quanto segue: se

$\delta < \frac{\sqrt{2}}{2}$ , la funzione  $|G(j\omega)|_{dB}$  presenta un andamento reale diverso (anche notevolmente) da quello asintotico, per cui il diagramma asintotico va necessariamente corretto, usando i valori indicati in apposite tabelle; se, invece, risulta  $\delta > \frac{\sqrt{2}}{2}$ , allora la funzione  $|G(j\omega)|_{dB}$  non presenta un massimo e il diagramma asintotico diventa accettabile (in quanto  $|G(j\omega)|_{dB}$  risulta comunque avere un andamento monotonicamente decrescente).

Riportiamo, in conclusione, nella figura seguente l'andamento della funzione  $|G(j\omega)|_{dB}$  per diversi valori del coefficiente di smorzamento  $\delta$ :



Questo diagramma conferma (ovviamente) le conclusioni analitiche ricavate prima: in particolare, si osserva che il valore di  $|G(j\omega)|_{dB}$  nel punto di massimo  $\omega_{max}$  vale  $\infty$  nel caso in cui  $\delta=0$ .

Passiamo adesso al diagramma delle fasi per la funzione  $G(j\omega) = \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + j \frac{2\delta}{\omega_n} \omega\right)^{-1}$ : la fase di questa funzione è

$$\arg G(j\omega) = \arg \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + j \frac{2\delta}{\omega_n} \omega} = -\arctg \frac{\frac{2\delta}{\omega_n} \omega}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} = -\arctg \frac{2\delta \omega_n \omega}{\omega_n^2 - \omega^2}$$

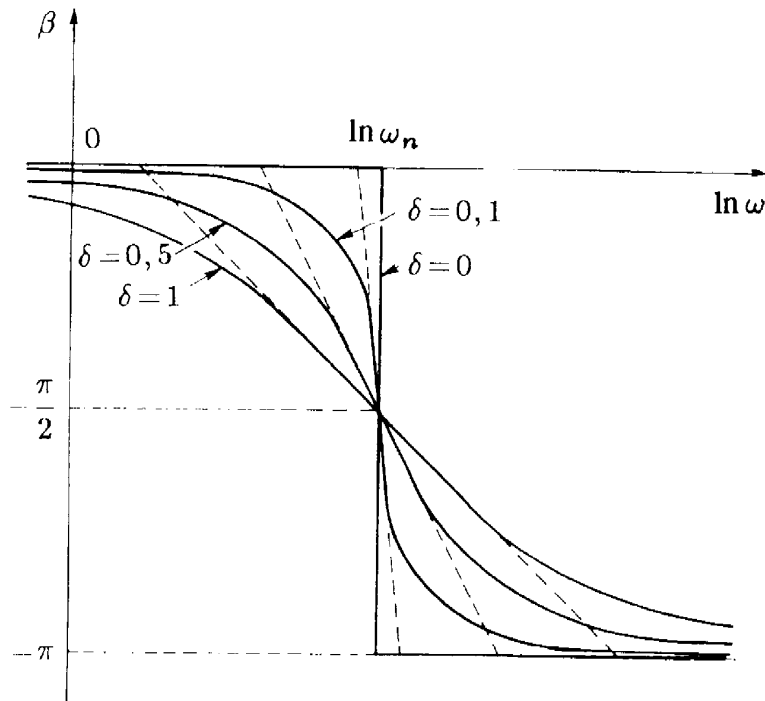
Si tratta, anche in questo caso, di una funzione di  $\omega$  e di  $\delta$ , per cui avremo una famiglia di curve al variare di  $\delta$ . Supponendo sempre fissata la pulsazione naturale  $\omega_n$ , calcoliamo  $\arg G(j\omega)$  in alcuni punti notevoli:

$$\omega \ll \omega_n \rightarrow \arg G(j\omega) \cong -\arctg \frac{2\delta}{\frac{\omega}{\omega_n}} \cong 0^\circ$$

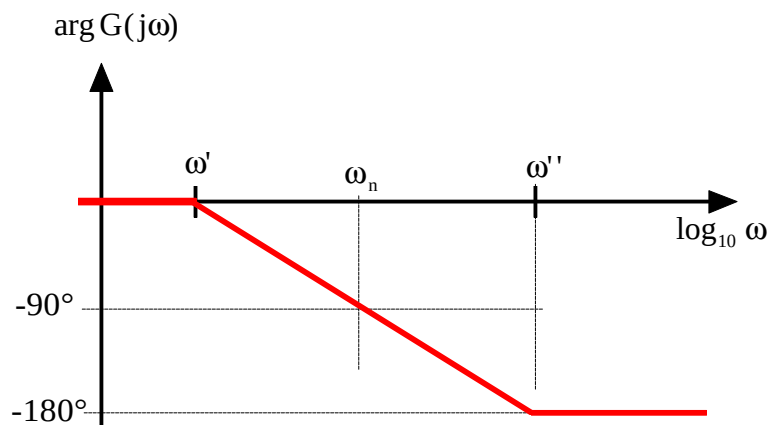
$$\omega \gg \omega_n \rightarrow \arg G(j\omega) \cong -\arctg \frac{2\delta}{\frac{\omega}{\omega_n}} \cong -180^\circ$$

$$\omega = \omega_n \rightarrow \arg G(j\omega_n) = -\arctg \frac{2\delta}{0} = -\arctg \infty = -90^\circ$$

Il corrispondente diagramma reale, al variare di  $\delta$ , è fatto nel modo seguente:



Volendo approssimare questo diagramma con un andamento asintotico, basta osservare che, al diminuire di  $\delta$ , le curve diventano più ripide nell'intorno della frequenza naturale, per cui si può tracciare un diagramma del tipo seguente:



La pendenza del tratto inclinato può essere ricavata con lo stesso procedimento seguito nel caso dei termini del primo ordine, ossia calcolando la pendenza della tangente al diagramma reale in corrispondenza di  $\omega = \omega_n$ . Seguendo questo procedimento, si trova che, per un assegnato valore di  $\delta$ , la frequenza  $\omega'$  in cui il tratto inclinato va ad intersecare l'asse delle ascisse è legata alla frequenza naturale dalla relazione

$$\frac{\omega_n}{\omega'} = (4.81)^\delta$$

Usando questa semplice formula, diventa anche in questo caso immediato il tracciamento del diagramma asintotico.

**Segno del coefficiente di smorzamento**

Una osservazione importante è la seguente: mentre la pulsazione naturale  $\omega_n$  è pari al modulo delle radici complesse coniugate, per cui è sempre positiva, il coefficiente di smorzamento  $\delta$  può anche essere negativo, mentre noi lo abbiamo considerato positivo: per ottenere, allora, il diagramma di Bode corrispondente a  $\delta < 0$ , basta considerare che il diagramma dei moduli rimane invariato (a patto di considerare il valore assoluto di  $\delta$ ), mentre quello delle fasi risulta ribaltato rispetto all'asse delle ascisse.

L'ultima funzione da analizzare è il termine di 2° grado posto a numeratore (corrispondente cioè a due zeri complessi coniugati), ossia la funzione

$$G(j\omega) = \left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + j \frac{2\delta}{\omega_n} \omega \right)$$

Ancora una volta, il procedimento è semplice, in quanto basta ribaltare, rispetto all'asse delle ascisse, i diagrammi (sia per i moduli sia per le fasi) ottenuti poco fa

per la funzione  $G(j\omega) = \left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + j \frac{2\delta}{\omega_n} \omega \right)^{-1}$ .

## Esempi vari

### Esempio: sistema del secondo ordine

Vogliamo tracciare il diagramma di Bode della funzione

$$G(s) = \frac{k}{s(1+Ts)} \quad k, T > 0$$

Dato che il sistema non presenta poli a parte reale positiva, possiamo immediatamente ricavare la funzione di risposta armonica semplicemente ponendo  $s=j\omega$ :

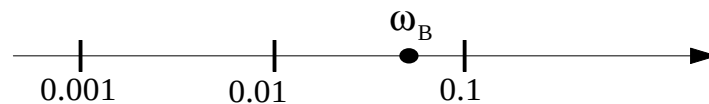
$$G(j\omega) = \frac{k}{j\omega} \frac{1}{(1+jT\omega)}$$

Questa funzione di risposta armonica è dunque data dal prodotto delle funzioni elementari  $G_1(j\omega)=k$ ,  $G_2(j\omega)=(j\omega)^{-1}$  e  $G_3(j\omega)=(1+jT\omega)^{-1}$ : il diagramma delle ampiezze di  $G(j\omega)$  è allora il prodotto dei rispettivi diagrammi delle ampiezze, mentre il diagramma delle fasi si ottiene facendo la somma (algebrica, che cioè tenga conto dei termini a numeratore e di quelli a denominatore) dei rispettivi diagrammi delle fasi.

Cominciamo allora dal diagramma delle ampiezze: il modulo di  $G(j\omega)$  è

$$20 \log_{10} |G(j\omega)| = 20 \log_{10} \left| \frac{k}{(j\omega)(1+jT\omega)} \right| = 20 \log_{10} \frac{k}{\omega \sqrt{1+T^2\omega^2}}$$

Possiamo procedere nel modo seguente. In primo luogo, abbiamo una sola frequenza di break,  $\omega_B=1/T$ , corrispondente alla costante di tempo  $T$ . Andiamo allora ad individuare tale frequenza sull'asse orizzontale, supponendo che si trovi come indicato nella figura seguente:

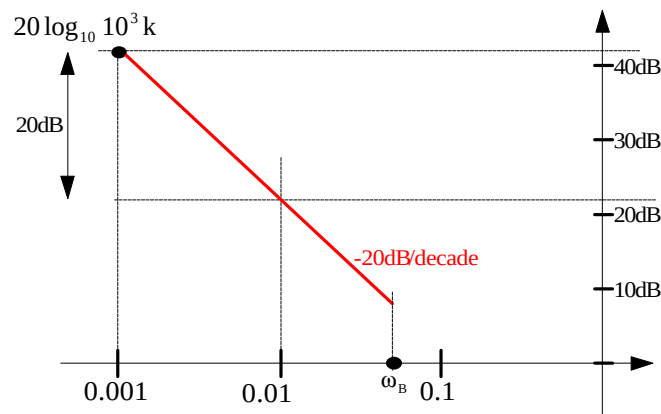


E' lecito assumere che, ponendoci una decade prima rispetto a  $\omega_B$  (cioè in corrispondenza di  $\omega_B/10$ ), il contributo del termine  $(1+jT\omega)^{-1}$  sia trascurabile rispetto agli altri, per cui la funzione è approssimabile con  $G(j\omega) \cong \frac{k}{j\omega}$ ; il corrispondente modulo (in dB) è allora  $|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} |G(j\omega)| \cong 20 \log_{10} \frac{k}{\omega}$  e si tratta chiaramente di una retta con pendenza negativa di 20dB/decade.

Per rappresentare questa retta, dato che ne conosciamo la pendenza, ci basta conoscere un punto da essa intercettato. Allora, con riferimento alla figura precedente, possiamo ad esempio calcolare il valore di  $|G(j\omega)|_{dB}$  in corrispondenza di  $\omega=0.001$ : facendo i conti, si ottiene  $G(j\omega) = \frac{k \cdot 10^3}{j}$ , da cui quindi deduciamo che

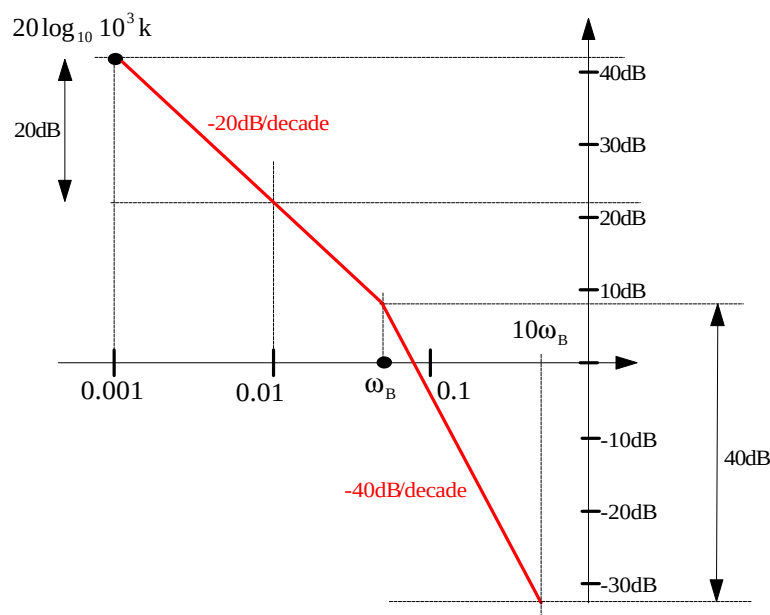
$$|G(j\omega)|_{dB} \Big|_{\omega=0.001} = 20 \log_{10} 10^3 k$$

Dato che  $k$  si suppone noto, possiamo dunque individuare questo punto sul diagramma e mandare da esso una retta con pendenza negativa di 20dB/decade:



Questa retta approssima bene il diagramma reale fino alla frequenza di break, a partire dalla quale il contributo del termine  $(1+jT\omega)^{-1}$  non può più essere trascurato. Per tenere conto di questo contributo, ci basta aumentare la pendenza di 20dB/decade (in quanto sappiamo che il diagramma delle ampiezze di  $(1+jT\omega)^{-1}$  è a sua volta una retta con pendenza -20dB/decade), passando perciò a -40dB/decade.

Possiamo dunque concludere che il diagramma (asintotico) delle ampiezze di  $G(j\omega)$  è fatto nel modo seguente:





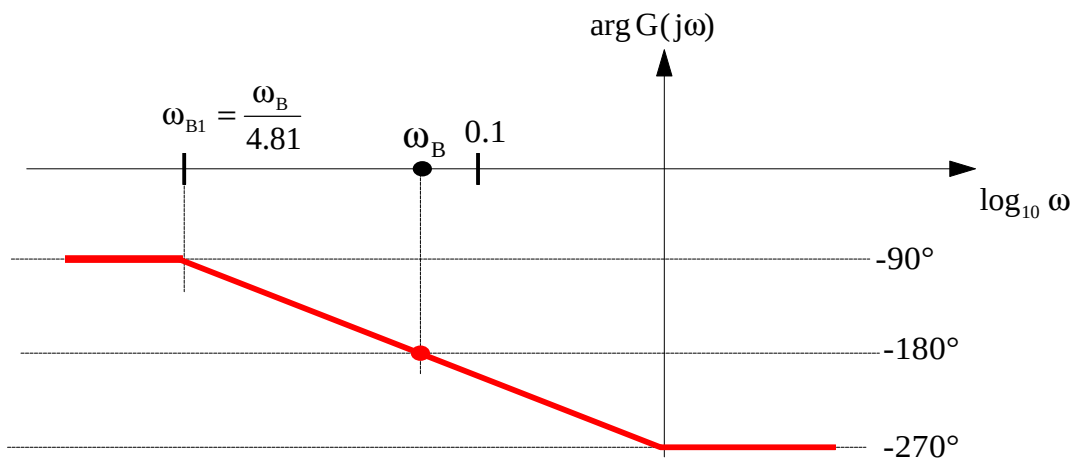
Passiamo adesso al diagramma degli argomenti: l'argomento di  $G(j\omega)$  è

$$\arg G(j\omega) = \arg\left(\frac{k}{j\omega(1+jT\omega)}\right) = \arg(k) - \arg(j\omega) - \arg(1+jT\omega) = \arg(k) - \frac{\pi}{2} - \arctg(\omega T)$$

Considerando che  $k > 0$ , risulta  $\arg(k) = 0$ , per cui concludiamo che

$$\arg G(j\omega) = -\frac{\pi}{2} - \arctg(\omega T)$$

Abbiamo dunque la funzione  $-\arctg(\omega T)$  traslata di  $\pi/2$  verso il basso, per cui il diagramma asintotico, usando la regola del 4.81 per ottenere la pulsazione  $\omega_{B1}$ , è fatto nel modo seguente:



## Esempio: sistema del secondo ordine

Vogliamo tracciare il diagramma di Bode della funzione

$$G(s) = k \frac{1 - 0.1s}{s(1 + 0.5s)} \quad k > 0$$

Dato che il sistema non presenta poli a parte reale positiva, possiamo immediatamente ricavare la funzione di risposta armonica semplicemente ponendo  $s = j\omega$ :

$$G(s) = k \frac{1 - j0.1\omega}{j\omega(1 + j0.5\omega)}$$

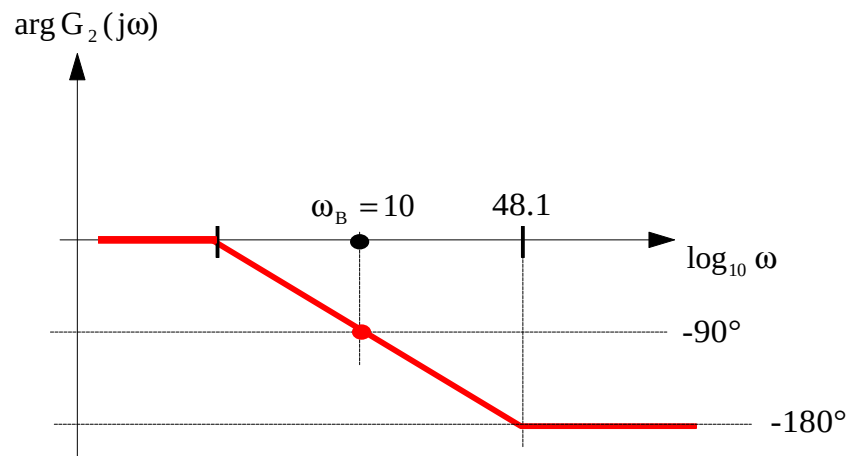
Questa funzione presenta una particolarità, rappresentata da uno zero a parte reale positiva (o, ciò che è lo stesso, una costante di tempo negativa a numeratore). Possiamo allora procedere nel modo seguente: moltiplicando numeratore e denominatore per la quantità  $(1 + j0.1\omega)$ , otteniamo

$$G(j\omega) = k \frac{1 - j0.1\omega}{j\omega(1 + j0.5\omega)} \frac{1 + j0.1\omega}{1 + j0.1\omega} = k \frac{1 + j0.1\omega}{j\omega(1 + j0.5\omega)} \frac{1 - j0.1\omega}{1 + j0.1\omega}$$

In tal modo, la  $G(j\omega)$  risulta data dal prodotto di un termine  $G_1(j\omega) = k \frac{1 + j0.1\omega}{j\omega(1 + j0.5\omega)}$  avente solo costanti di tempo positive e di un termine  $G_2(j\omega) = \frac{1 - j0.1\omega}{1 + j0.1\omega}$  sul quale dobbiamo indagare.

Questo termine  $G_2(j\omega)$  presenta una caratteristica fondamentale, che è quella di avere modulo unitario: ciò significa che il diagramma delle ampiezze di  $G(j\omega)$ , che si ottiene come prodotto dei diagrammi delle ampiezze di  $G_1(j\omega)$  e  $G_2(j\omega)$ , coincide con il diagramma di  $G_1(j\omega)$ , in quanto il diagramma di  $G_2(j\omega)$  è una retta coincidente con l'asse delle ascisse.

Per quanto riguarda, invece, il diagramma delle fasi, sarà la somma del diagramma delle fasi di  $G_1(j\omega)$  (che sappiamo tracciare in quanto  $G_1(j\omega)$  rientra tra le funzioni analizzate in precedenza) e di quello di  $G_2(j\omega)$ . Andiamo allora a vedere come è fatto il diagramma delle fasi di  $G_2(j\omega)$ :



In definitiva, quindi, il termine  $G_2(j\omega)$  non modifica il modulo di  $G_1(j\omega)$ , mentre produce uno sfasamento crescente con la frequenza. Per questo motivo, esso prende il nome di **fattore passa-tutto**: questo nome indica il fatto che, dato un sistema avente  $G_2(j\omega)$  come funzione di risposta armonica e ponendo in ingresso a tale sistema un segnale sinusoidale  $u(t) = A \sin(\omega t)$ , di pulsazione qualsiasi, l'uscita del sistema è semplicemente del tipo  $y(t) = A \sin(\omega t - \phi)$ . Il sistema, cioè, non attenua e non amplifica, ma si limita solamente a sfasare l'ingresso di una quantità dipendente da  $\omega$ .

Autore: **Sandro Pettrizzelli**  
 e-mail: [sandry@iol.it](mailto:sandry@iol.it)  
 sito personale: <http://users.iol.it/sandry>