



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA

Facoltà di Ingegneria

Anno Accademico 2000-2001

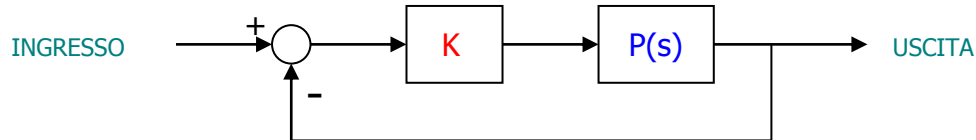
ENRICO CASTRO

GUIDA PRATICA ALLA RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI

NOTA BENE : Il presente lavoro rappresenta esclusivamente una raccolta di formule utili per lo svolgimento degli esercizi del corso di controlli automatici (A.A. 2000/2001 CdL Ing. Elettronica) effettuata dallo studente Enrico Castro. Non viene tuttavia da me garantita la completa correttezza delle formule e delle indicazioni in esso contenute e non sostituisce in alcun modo i libri di testo ed il materiale consigliato per la preparazione del corso.

Prof. G. Muscato

LUOGO DELLE RADICI



METODO PER IL TRACCIAMENTO

Consta essenzialmente di due fasi :

- $K > 0$
- $K < 0$

$K > 0$

- 1) Si determinano i POLI (x) e gli ZERI (o) della $P(s)$ e si individuano sul PIANO COMPLESSO.
- 2) Si determinano: NUMERO degli ASINTOTI ($A_{ASINTOTI} = N_{POLI} - M_{ZERI}$) e relativi ANGOLI (v. schema apposito)
CENTRO degli ASINTOTI (formula I)
NUMERO di RAMI ($R_{RAMI} = N_{POLI}$)
- 3) Si tracciano le parti dell'ASSE REALE facenti parte del LUOGO mediante la regola:
numero di poli e zeri a destra PARI $\Rightarrow$ la zona NON APPARTIENE al luogo
numero di poli e zeri a destra DISPARI $\Rightarrow$ la zona APPARTIENE al luogo
- 4) Si ricercano gli eventuali PUNTI di DIRAMAZIONE (formula II) e, se dovesse occorrere, gli ANGOLI di ENTRATA-USCITA dai poli e zeri (formula III)
- 5) Nel caso si presentasse la necessità si calcolano le INTERSEZIONI del luogo con l'ASSE IMMAGINARIO mediante l'utilizzo della TABELLA di ROUTH (v. schema apposito)
- 6) Si completa il diagramma tenendo presente che ci si muove PARTENDO dai POLI ed ARRIVANDO agli ZERI lungo gli R rami.

$K < 0$

- 1) Si ridisegnano gli ASINTOTI (in numero uguale al caso precedente) facendo riferimento per gli ANGOLI allo schema sopracitato.
- 2) Si tracciano le restanti parti dell'ASSE REALE ricordando, per verifica, che il criterio di appartenenza è adesso:
numero di poli e zeri a destra PARI $\Rightarrow$ la zona APPARTIENE al luogo
numero di poli e zeri a destra DISPARI $\Rightarrow$ la zona NON APPARTIENE al luogo
- 3) Si completa il diagramma tenendo presenti i risultati ottenuti nel caso precedente e che ci si muove PARTENDO dagli ZERI ed ARRIVANDO ai POLI lungo gli R rami.

N.B. TUTTO L'ASSE REALE FA PARTE DEL LUOGO DELLE RADICI

COME LEGGERE IL GRAFICO

Dal grafico del Luogo delle Radici si evince facilmente il grado di instabilità del Sistema posto in retroazione unitaria al variare del guadagno K .

Ed esattamente il GRADO DI INSTABILITA' è dato dal numero di rami presenti nel semipiano complesso DESTRO al variare di K . (N.B. Grado di Instabilità NULLO $\Leftrightarrow$ STABILITA')

Ovviamente le intersezioni con l'asse immaginario rappresentano dei punti di transizione da stabilità ad instabilità o viceversa

FORMULARIO

I) CENTRO DEGLI ASINTOTI $\equiv (\delta_A, 0)$

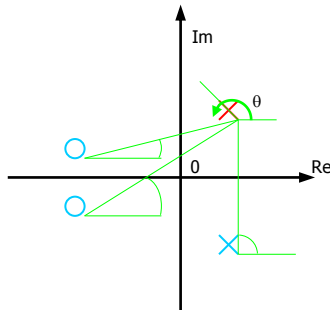
$$\frac{\sum_{I=1}^N P_I - \sum_{I=1}^M Z_I}{N - M} = \delta_A$$

II) PUNTI DI DIRAMAZIONE $\equiv (\delta_D, 0)$

$$\sum_{I=1}^N \frac{1}{\delta_D - P_I} = \sum_{I=1}^M \frac{1}{\delta_D - Z_I}$$

III) CONDIZIONE DI FASE

$$\sum_{I=1}^M \angle(S - Z_I) - \sum_{I=1}^N \angle(S - P_I) = \begin{cases} 2h\pi \pm \pi & K > 0 \\ 2h\pi & K < 0 \end{cases}$$



Fisso un polo (zero). Il termine di fase, relativo alla sommatoria, del polo (zero) scelto è l'incognita (θ) dell'equazione. Ripeto il discorso per tutti i poli (zeri) di cui voglio calcolare gli angoli.

IV) PULSAZIONE DI ATTRAVERSAMENTO ω_T

$$|F(j\omega_T)| \equiv 1$$

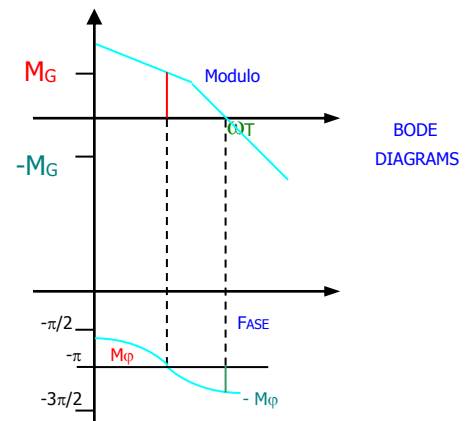
V) MARGINE DI FASE M_ϕ

$$M_\phi = \pi + \angle F(j\omega_T)$$

$M_\phi > 0 \Rightarrow \text{STABILITA'}$

VI) FORMULA DI TRUXAL

$$e_r(\infty) = \sum_{i=1}^m \frac{1}{z_i} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i}$$

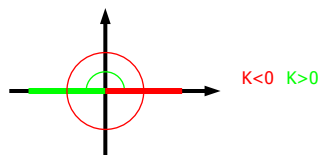


SCHEMI

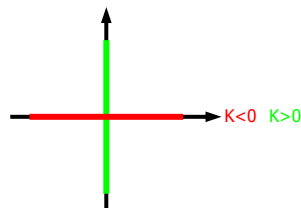
ANGOLI DEGLI ASINTOTI

$|N-M|=0$ Caso molto raro (non è realizzabile fisicamente) $\Rightarrow$ Nessun Asintoto

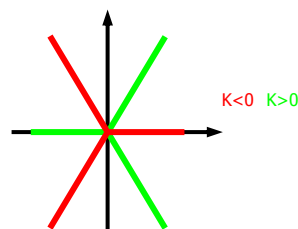
$$|N-M|=1 \Rightarrow \begin{cases} \theta_1 = \pi & K > 0 \\ \theta_I = 2\pi = 0 & K < 0 \end{cases}$$



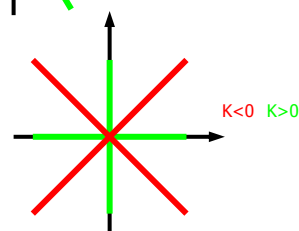
$$|N-M|=2 \Rightarrow \begin{cases} \theta_1 = \frac{\pi}{2} & \theta_2 = \frac{3\pi}{2} & K > 0 \\ \theta_I = 0 & \theta_{II} = \pi & K < 0 \end{cases}$$



$$|N-M|=3 \Rightarrow \begin{cases} \theta_1 = \frac{\pi}{3} & \theta_2 = \pi & \theta_3 = \frac{5\pi}{3} & K > 0 \\ \theta_I = 0 & \theta_{II} = \frac{2\pi}{3} & \theta_{III} = \frac{4\pi}{3} & K < 0 \end{cases}$$

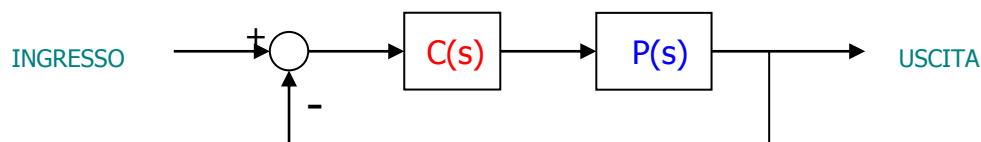


$$|N-M|=4 \Rightarrow \begin{cases} \theta_1 = \frac{\pi}{4} & \theta_2 = \frac{3\pi}{4} & \theta_3 = \frac{5\pi}{4} & \theta_4 = \frac{7\pi}{4} & K > 0 \\ \theta_I = 0 & \theta_{II} = \frac{\pi}{2} & \theta_{III} = \pi & \theta_{IV} = \frac{3\pi}{2} & K < 0 \end{cases}$$



SPECIFICHE DI PRECISIONE A REGIME

Sistema di Tipo ↓	Riferimento in ingresso →	GRADINO	RAMPA	RAMPA PARABOLICA
$h=0$		$e_U(\infty) = 1/(1+K_P)$	∞	∞
$h=1$		0	$e_R(\infty) = 1/K_V$	∞
$h=2$		0	0	$e_{RP}(\infty) = 1/K_A$



$C(s) = K/s^h$ è in funzione di K che è l'incognita. $F(s) = C(s) P(s)$

$K_P = \lim_{s \rightarrow 0} F(s)$

$K_V = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot F(s)$

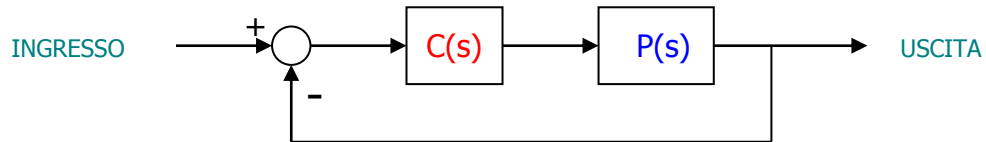
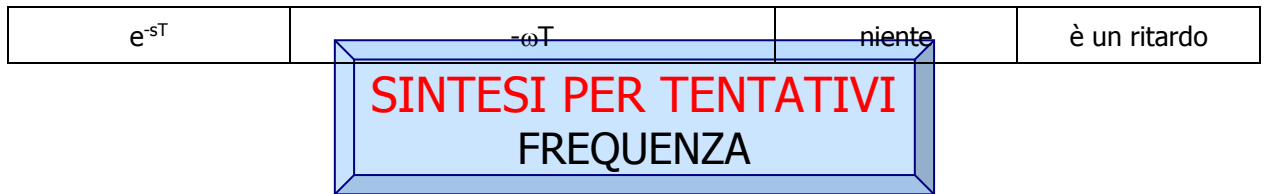
$K_A = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 \cdot F(s)$

dove $F(s) = C(s) \cdot P(s)$

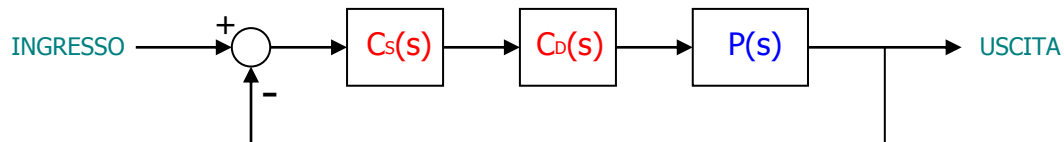
CALCOLO DELLE FASI

(Applicare il segno + in caso di zeri oppure - in caso di poli)

TIPO	FASE	AGGIUNGERE	QUANDO
s	$\pi/2$	niente	sempre
$s+\alpha$	$\arctg(\omega/\alpha)$	π	$\alpha < 0$
$s^2+\alpha s+\beta$	$\arctg[\alpha\omega/(\beta^2 - \omega^2)]$	π	$\omega^2 > \beta^2$
$s^2+\alpha$	0	π	$\omega^2 > \alpha$



Data la $P(s)$ e le specifiche richieste separo il Compensatore $C(s)$ in due blocchi: Compensatore STATICO $C_s(s)$ e Compensatore DINAMICO $C_d(s)$.



Dalle specifiche STATICHE (errori ai segnali canonici) determino il **Compensatore STATICO** nel modo seguente:

$e_u(\infty)=0 \Rightarrow$ Nella f.d.t. $C_s(s)P(s)$ deve essere presente almeno un POLO nell'ORIGINE
 $e_r(\infty)=0 \Rightarrow$ Nella f.d.t. $C_s(s)P(s)$ devono essere presenti almeno due POLI nell'ORIGINE
 $e_{rp}(\infty)=0 \Rightarrow$ Nella f.d.t. $C_s(s)P(s)$ devono essere presenti almeno tre POLI nell'ORIGINE

$e_u(\infty)<\alpha \Rightarrow$ Dobbiamo inserire un guadagno K al posto di $C_s(s)$

Questo guadagno K si calcola come segue:

$$K_P = \lim_{s \rightarrow 0} K P(s) = K P(0)$$

$$e_u(\infty) = 1 / (1 + K_P)$$

e quindi trovo la relazione tra K e α cercata:

$$\frac{1}{1 + (K \cdot P(0))} < \alpha \quad \text{da cui} \quad K \geq \frac{1 - \alpha}{\alpha \cdot P(0)}$$

$e_r(\infty)<\alpha \Rightarrow$ Nella f.d.t. $C_s(s)P(s)$ deve essere presente un POLO nell'ORIGINE e un guadagno che calcoleremo come segue:

$$K_V = \lim_{s \rightarrow 0} s K P(s) \quad \text{dove in } P(s) \text{ ho supposto esserci già il polo nell'origine}$$

$$e_r(\infty) = 1/K_V \Rightarrow e_r(\infty) < \alpha \Rightarrow K_V > 1/\alpha \Rightarrow K > 1/\alpha [\lim_{s \rightarrow 0} s P(s)]$$

$e_{rp}(\infty)<\alpha \Rightarrow$ Nella f.d.t. $C_s(s)P(s)$ devono essere presenti due POLI nell'ORIGINE e un guadagno che calcoleremo come segue:

$$K_A = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 K P(s) \quad \text{dove in } P(s) \text{ ho supposto esserci già i poli nell'origine}$$

$$e_{rp}(\infty) = 1/K_A \Rightarrow e_{rp}(\infty) < \alpha \Rightarrow K_A > 1/\alpha \Rightarrow K > 1/\alpha [\lim_{s \rightarrow 0} s^2 P(s)]$$

A questo punto traduco le specifiche DINAMICHE ($s\%$, t_s , $T_{A2\%}$, $T_{A5\%}$, B_P , ecc...), al fine di determinare il **Compensatore DINAMICO**, in termini di ξ e ω_n da cui si ricavano M_ϕ desiderato e ω_T desiderato.

Calcolo $|F(j\omega_{Td})|$ e $\angle[F(j\omega_{Td})]$ e valuto questi risultati come segue:

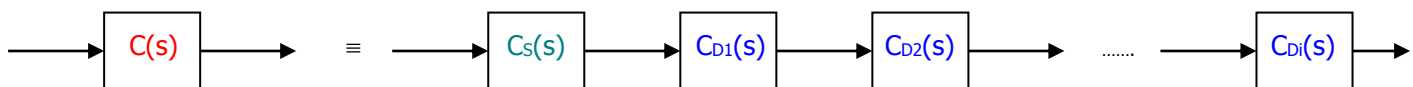
CASO 1 $|F(j\omega_{Td})| \cong 1$ e $\pi + \angle[F(j\omega_{Td})] \cong M_\phi \text{ desiderato} \Rightarrow$ Le specifiche sono soddisfatte!

CASO 2 $|F(j\omega_{Td})| > 1 \Rightarrow \omega_T \text{ di } F(s) > \omega_T \text{ desiderato} \Rightarrow$
 $\Rightarrow$ Devo utilizzare una rete ATTENUATRICE (zona $\omega_T \approx 50 \div 100 \Rightarrow$

- $\Rightarrow \tau = (50 \div 100) / \omega_{T \text{ des}}$ ed m opportuno.
- N.B. τ troppo grande $\Rightarrow$ sistema lento ; sistema veloce $\Rightarrow B_p$ larga $\Rightarrow$ possibili rumori (disturbi)
- CASO 3** $|F(j\omega_{Td})| < 1 \Rightarrow \omega_T \text{ di } F(s) < \omega_{T \text{ desiderato}} \Rightarrow$
 $\Rightarrow$ a) Applico un GUADAGNO > 1 (Modifico $C_S(s)$ ma in meglio!).
 $\Rightarrow$ b) Utilizzo una rete ANTICIPATRICE facendo attenzione alle fasi.
- CASO 4** $\pi + \angle[F(j\omega_{Td})] < M_{\varphi \text{ desiderato}} \Rightarrow M_{\varphi} \text{ di } F(s) < M_{\varphi \text{ desiderato}} \Rightarrow$
 $\Rightarrow$ Utilizzo una rete ANTICIPATRICE (zona $\omega\tau \approx 1$)
- CASO 5** $\pi + \angle[F(j\omega_{Td})] > M_{\varphi \text{ desiderato}} \Rightarrow M_{\varphi} \text{ di } F(s) > M_{\varphi \text{ desiderato}} \Rightarrow$ Meglio, sono in specifica!
- CASO 6** Si verificano contemporaneamente i casi 2 e 4 $\Rightarrow$ ANTICIPO con $\omega\tau \approx 1$ ed m grande
 Controllo i moduli
 Se occorre ATTENUO con $\omega\tau = 50 \div 100$
- CASO 7** Si verificano contemporaneamente i casi 3 e 4 $\Rightarrow$ ANTICIPO con $\omega\tau \approx 1$ ed m grande
 Controllo i moduli
 Applico un GUADAGNO > 1
- CASO 8** Si verificano contemporaneamente i casi 2 e 5 $\Rightarrow$ ATTENUO con $\omega\tau = 50 \div 100$
 Controllo le fasi
 ANTICIPO con $\omega\tau \approx 1$
- CASO 9** Si verificano contemporaneamente i casi $\Rightarrow$ Applico un GUADAGNO > 1

N.B. E' sconsigliato l'uso di criteri o sintesi basati su M_{φ} e M_G per sistemi a CATENA APERTA non a FASE MINIMA (con poli o zeri a parte reale positiva).

Il **COMPENSATORE GLOBALE** sarà dunque:

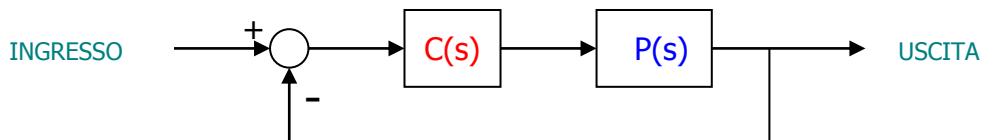


SINTESI PER TENTATIVI

LUOGO delle RADICI

Questo metodo di sintesi si basa sulla valutazione e la modifica dei poli della funzione a ciclo chiuso mediante rappresentazione grafica sul luogo delle radici.

Dato il nostro Plant ($P(s)$) e le specifiche da ottenere, si procede, per la determinazione del Compensatore ($C(s)$), come segue:

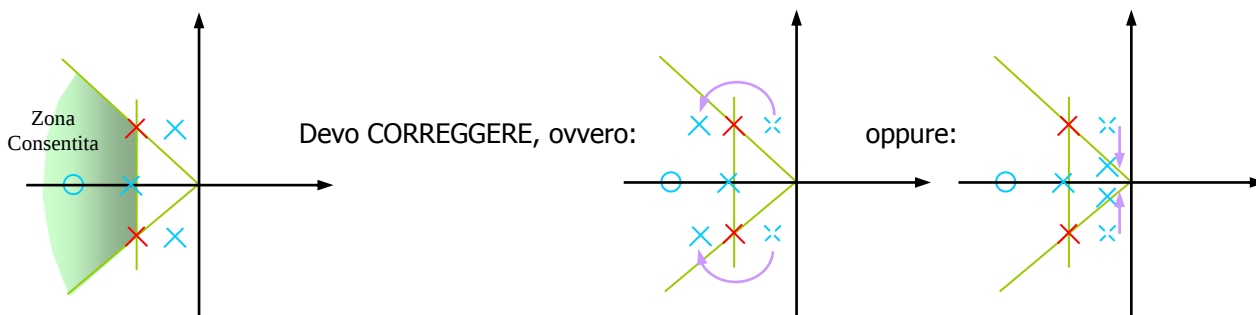


- 1) Rappresento poli e zeri del Plant sul piano complesso.
- 2) Calcolo i POLI DOMINANTI RICHIESTI DALLE SPECIFICHE, ovvero, dopo aver tradotto le specifiche dinamiche in ω_n e ξ calcolo:

$$P_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} \quad \text{che mi rappresentano i poli dominanti richiesti.}$$

(Affinché questi siano dominanti gli altri dovranno essere, se non sono accoppiati con zeri che ne annullino l'effetto, almeno 4 volte più a sinistra). Rappresento questi poli dominanti sul piano complesso.

- 3) Traccio il LUOGO delle RADICI della $F(s) = C(s)P(s)$ dove $C(s) = K/s^h$ con $h=0,1,2,\dots$ a seconda delle specifiche statiche (errori a regime).
- 4) A questo punto verifico se il luogo passa per i poli dominanti richiesti ed in caso contrario applico le reti correttrici.



ANTICIPATRICE : $R_a = \frac{s+z}{s+p}$ con $p > z$ cioè:

ATTENUATRICE : $R_A = \frac{s+z}{s+p}$ con $p < z$ cioè:

Esse hanno l'effetto di variare il centro degli asintoti, infatti:
$$\sigma_a = \frac{\sum_n p_n - p - \sum_m z_m + z}{n - m}$$

Queste reti corrispondono al Compensatore Dinamico $C_D(s)$. Impongo z in modo opportuno (in genere in corrispondenza dei poli dominanti e calcolo p mediante la condizione di fase rispetto ad uno dei due poli dominanti richiesti, nel senso che gli angoli da considerare nel calcolo saranno quelli formati tra la parallela all'asse reale e la congiungente il polo o lo zero considerato con il polo dominante richiesto preso in esame (indicato con la lettera A e segnato con colore diverso). Es:

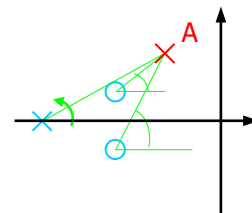
Naturalmente l'incognita nella formula della condizione di fase è l'angolo del nuovo polo p della rete anticipatrice. Determinato questo angolo (θ_p) tramite banale teorema di Pitagora calcolo il numero p (distanza dall'origine del polo).

- 5) Resta dunque da determinare il GUADAGNO del sistema ($K=?$)

La soluzione al problema è data dalla condizione di modulo:

$$K_{F(s)} = \frac{\prod_n |\bar{P}_n A|}{\prod_m |\bar{Z}_m A|}$$

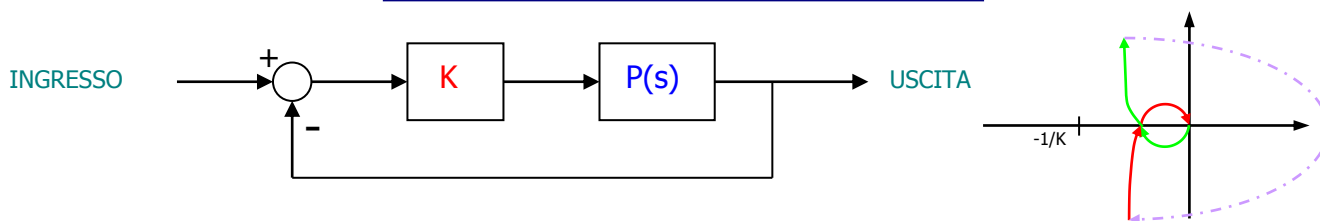
ovvero il rapporto tra i prodotti delle distanze dei poli da A e i prodotti delle distanze degli zeri da A.



Infine:

$$K_{Plant} \cdot K_{Cs} = K_{F(s)}$$

DIAGRAMMA DI NYQUIST



1. Dato il Plant ($P(s)$) calcolo $P(j\omega)$ e ne estrapolo le funzioni: **$\text{Re}\{P(j\omega)\}$, $\text{Im}\{P(j\omega)\}$, $|P(j\omega)|$ e $\angle P(j\omega)$.**
 2. Determino il CAMMINO DI NYQUIST (verso ORARIO) tenendo conto dei poli del Plant e determino il numero di POLI instabili in esso contenuti.
 3. Studio il SEGNO di $\text{Re}\{P(j\omega)\}$ e di $\text{Im}\{P(j\omega)\}$ e li rappresento graficamente.
- | | | | | |
|----|---|---|---|---|
| Re | - | - | - | → |
| Im | + | - | - | |
4. Costruisco una TABELLA per le funzioni calcolate nei PUNTI NOTEVOLI (0 , ∞ , punti saltati dal cammino di Nyquist, punti che annullano Re e Im)
 5. A questo punto sono pronto a tracciare il DIAGRAMMA:
 - A) Si parte da $\omega=0$ fino ad arrivare ad $\omega \rightarrow \infty$ sempre utilizzando le informazioni fornite dalla funzione $\angle P(j\omega)$.
 - B) Per $\omega < 0$ il diagramma è il simmetrico rispetto all'asse reale con il verso invertito.
 - C) Per quanto riguarda i versi, chiaramente, il diagramma è orientato da $\omega \rightarrow -\infty$ a $\omega \rightarrow +\infty$.
 6. CIRCONDAMENTI:
 - I) Ogni polo nell'origine determina un semicircondamento in senso ORARIO.
 - II) Ogni circondamento in ogni caso si traccia in senso orario e sono tutte semicirconferenze.
 - III) Se nel cammino di Nyquist sono contenuti P poli instabili allora $Z=N+P$, dove N= numero circondamenti in senso orario del punto $(-1,0)$ del diagramma e Z= GRADO DI INSTABILITA' del sistema. (N.B. un circondamento in senso antiorario $\Rightarrow N = -1$; $Z=0 \Rightarrow$ Sistema STABILE).

COME LEGGERE IL DIAGRAMMA DI NYQUIST

- METODO 1. Consiste nel determinare il numero di circondamenti (N) del punto $(-1/K, 0)$ al variare di K. (N.B. K non figura nelle formule di Modulo, Fase, Parte Reale e Parte Immaginaria).
- METODO 2. Questa volta si determina il numero di circondamenti (N) del punto $(-1,0)$ al variare di K. (N.B. K è presente nelle formule di Modulo, Fase, Parte Reale e Parte Immaginaria).

Per Calcolare le fasi del Plant vedere lo **SCHEMA PER IL CALCOLO DI $\angle P(j\omega)$**

SINTESI DIRETTA

Caso 1 : **P(s) CON GRADO (N° POLI – N° ZERI) ≤ 2** **POLI E ZERI CON PARTE REALE < 0**

Dato il Plant (P(s)) e le specifiche, trasformo queste ultime in termini di ξ e ω_n , tralasciando per il momento le specifiche statiche. A questo punto esprimo la funzione di trasferimento a ciclo chiuso (W(s)) come segue:

$$W(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \Rightarrow \text{essendo } W(s) = \frac{C(s)P(s)}{1 + C(s)P(s)} \Rightarrow C(s) = \frac{1}{P(s)} \cdot \frac{W(s)}{1 - W(s)} = \frac{1}{P(s)} \cdot \frac{\frac{\omega_n}{2\xi}}{s \cdot \left(\frac{s}{2\xi\omega_n} + 1 \right)}$$

Adesso verifico che il sistema soddisfi le specifiche statiche tramite l'utilizzo della formula di TRUXAL; in caso contrario provo a variare leggermente ξ e ω_n mantenendomi all'interno della zona consentita e verifico nuovamente.

Se anche in questo caso non fossero assolute le specifiche si procede come segue:

La mia nuova f.d.t. a ciclo chiuso sarà $W_{II}(s)$:

$$W''(s) = \frac{\omega_n'^2}{s^2 + 2\xi'\omega_n' s + \omega_n'^2} \cdot \frac{m \cdot (s + z)}{(s + mz)}$$

dove scelgo arbitrariamente m nell'intervallo]1,1.2] e calcolo z , ξ' ed ω_n' come segue:

$$S' \% = \frac{S \%_{\max} - m + 1}{m} \Rightarrow \xi' \quad \text{dall'altra specifica dinamica} \Rightarrow \omega_n' \quad \text{avendo } \xi' \text{ ed } \omega_n' \Rightarrow K_v' = \frac{\omega_n'}{2\xi'}$$

$$\text{e tramite la formula di TRUXAL} \Rightarrow \text{errore}_{\max} = \frac{1}{K_v''} = \frac{1}{K_v'} - \frac{m-1}{mz} \Rightarrow z$$

$$\text{e dunque il Compensatore cercato sarà: } C(s) = \frac{1}{P(s)} \cdot \frac{m \cdot \omega_n'^2 \cdot (s + z)}{s \cdot [s^2 + (mz + 2\xi'\omega_n')s + 2mz\xi'\omega_n' + (1-m)\omega_n'^2]}$$

Caso 2 : **P(s) CON GRADO (N° POLI – N° ZERI) ≥ 3** **POLI E ZERI CON PARTE REALE < 0**

Funziona esattamente come il caso 1 solo che devo aggiungere dei poli in maniera da permettere la realizzabilità del compensatore, ovvero devo garantire che il grado della W(s) deve essere maggiore o uguale al grado della P(s).

$$W(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_0} + 1 \right)^K} \quad \text{dove } \mathbf{K = n - m - 2 > 0} \text{ e } \omega_0 \approx \mathbf{5 \div 10} \xi \omega_n$$

Anche in questo caso se dovesse occorrere è opportuno l'utilizzo di reti correttrici il cui utilizzo sarà identico al caso

trattato in precedenza avendo l'accortezza di ricordare che $\frac{1}{K_v} = \frac{2\xi}{\omega_n} + \frac{K}{\omega_0}$.

CASO 3 :ALMENO UNO TRA POLI E ZERI CON PARTE REALE ≥ 0

In questo caso il lavoro da fare è doppio, cioè, dovrò prima stabilizzare il sistema e poi assolvere alle specifiche richieste. Per stabilizzare il sistema ($P(s)$) dovrò fare in modo che la mia f.d.t. a ciclo chiuso ($W(s)$) sia del tipo:

$$P(s) = \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} \Rightarrow W(s) = \frac{\prod_{i=1}^{m_s} (s - z_i) \cdot (c_{n_s} s^{n_s-1} + c_{n_s-1} s^{n_s-2} + \dots + c_1)}{\left(\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\xi s}{\omega_n} + 1 \right) \cdot \left(\frac{s}{\omega_0} + 1 \right)^x}$$

dove $x = n - m + m_s + n_s - 3$, (n_s =numero poli con $\text{Re}>0$; m_s =numero zeri con $\text{Re}>0$), chiaramente deve essere $x \geq 0$ e $\omega_0 = 5 \div 10$ volte $\xi \omega_n$

A questo punto dovrò imporre le condizioni di interpolazione, ovvero:

$W(p_s)=1$ e $W(z_s)=0$ per determinare i vari c_i della formula. Nel caso di poli con molteplicità $M \geq 2$ allora le condizioni di interpolazione si completano con :

$W(p_s)=1$ e $d/ds(W(p_s))=0$ ($M=2$)

$W(p_s)=1$ e $d/ds(W(p_s))=0$ $d^2/ds^2(W(p_s))=0$ ($M=3$)

...

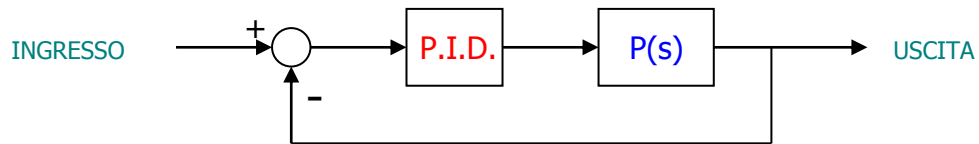
Per il calcolo dei c_i si può anche usare la funzione SENSITIVITA' $S(s) = \frac{1}{1 + C(s)P(s)}$

In questo caso le condizioni di interpolazione diventano: $S(p_i)=0$ e $S(z_i)=1$

N.B. Nel caso di polo nell'origine la condizione di interpolazione diviene $W(0)=1$

Avendo dunque la mia nuova $F(s)=C(s)P(s)$ pongo $F(s)=P'(s)$ e proseguo come dai casi 1 oppure 2 considerando come plant di partenza $P'(s)$.

REGOLATORI P.I.D.



In generale un Compensatore P.I.D. (Proporzionale Integrale Derivativo) ha la seguente forma:

$$C(s) = K \left(1 + \frac{1}{sT_I} + sT_D \right) = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s$$

Quindi, come il nome stesso suggerisce, un P.I.D. fornisce un contributo "Proporzionale", uno "Integrale" e uno "Derivativo". Nella pratica non sempre sono necessari tutti e tre i contributi, dunque potremo trovare un P.D. oppure un P.I. o addirittura soltanto un P.

A seconda dei contributi introdotti otterremo un effetto ANTICIPATIVO (contributo DERIVATIVO), ATTENUATIVO (contributo INTEGRATIVO) oppure entrambi (P.I.D.).

I regolatori P.I.D. possono essere tarati (determinazione dei parametri) in più modi:

METODO ANALITICO :

Utilizzando il metodo analitico le formule da usare sono:

$$K = \frac{1}{|P(j\omega_{T_{SPEC}})|} \cdot \cos(M_{\varphi_{SPEC}} - \pi - \angle P(j\omega_{T_{SPEC}}))$$

$$T_I = \frac{K \cdot P(0)}{K_{V_{spec}}}$$

$$T_D \omega_{T_{SPEC}} - \frac{1}{T_I \omega_{T_{SPEC}}} = \tan(M_{\varphi_{SPEC}} - \pi - \angle P(j\omega_{T_{SPEC}}))$$

METODO EMPIRICO :

1) ZIEGLER E NICHOLS I:

Per un plant del tipo $P(s) = \bar{K} \frac{e^{-Ls}}{1 + \tau s}$ avrò $\tan \alpha = \frac{\bar{K}}{\tau} = R$ e la TABELLA

REGOLATORE↓ / PARAMETRI →	K	T _I	T _D
P	1/RL	/	/
PI	0.9/RL	L/0.3	/
PID	1.2/RL	2L	L/2

2) ZIEGLER E NICHOLS II:

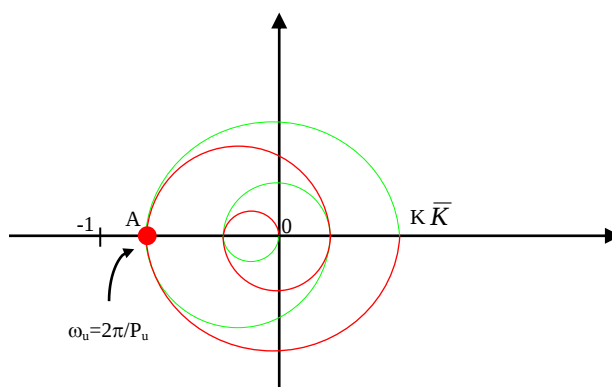
Sempre per lo stesso Plant di cui al punto 1) si traccia il diagramma di Nyquist applicando al Plant il solo contributo PROPORZIONALE (K).

Sul diagramma si fa aumentare K fino a determinare il punto A (punto all'estrema sinistra del diagramma intersecato con l'asse reale negativo) in corrispondenza del quale aumentando ancora K il sistema diverrebbe permanentemente instabile. Si calcolano quindi K_u (margine di guadagno del sistema iniziale) e P_u (Periodo di oscillazione alla frequenza ω_u individuata dal punto A) tali che:

$$P_u = \frac{2\pi}{\omega_u} \quad \text{e} \quad \overline{OA} \cdot K_u = 1$$

a questo punto mi servo della TABELLA:

REGOLATORE ↓ / PARAMETRI →	K	T_I	T_D
P	$0.5 K_u$	/	/
PI	$0.45 K_u$	$0.85 P_u$	/
PD	$0.5 K_u$	/	$0.2 P_u$
PID	$0.6 K_u$	$0.5 P_u$	$0.125 P_u$



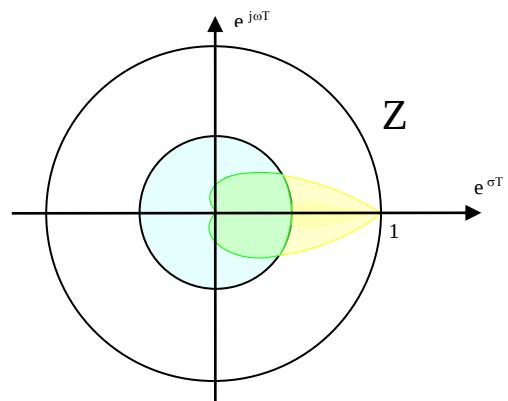
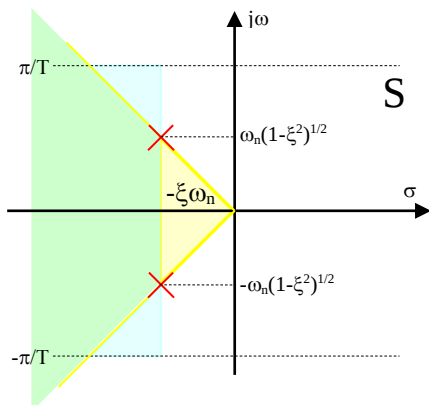
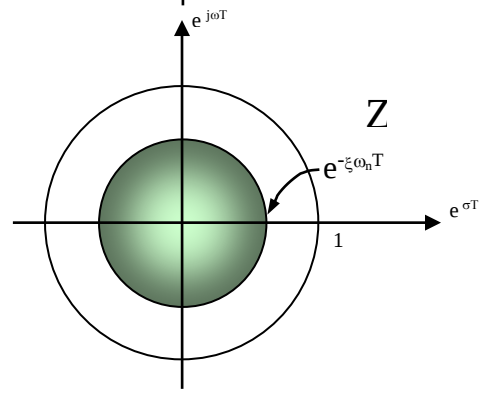
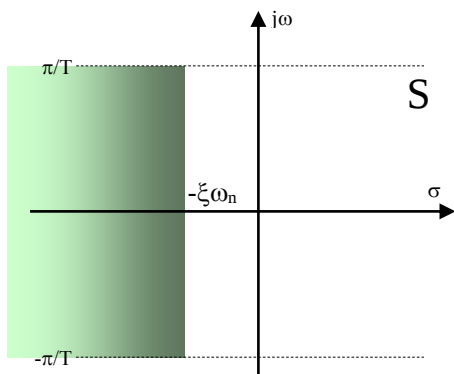
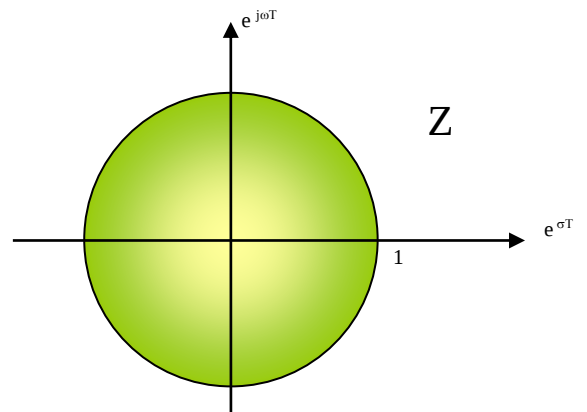
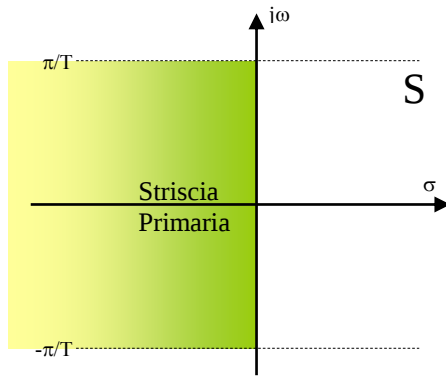
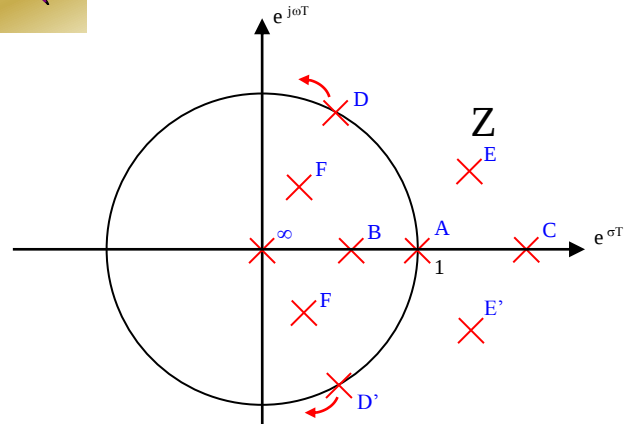
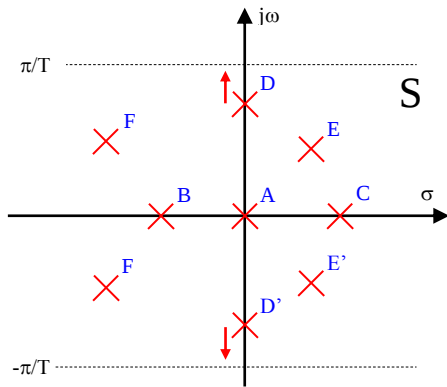
Mappatura Poli Zeri nel DISCRETO

CONTINUO

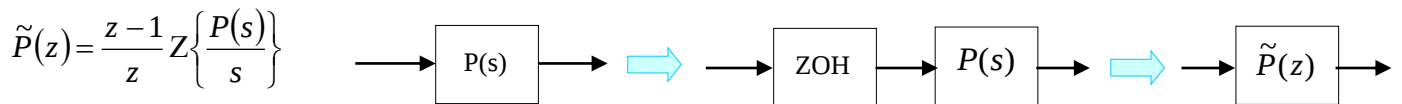
DISCRETO

$$\rightarrow Z = e^{sT} \rightarrow$$

$$\leftarrow S = (\ln Z)/T \leftarrow$$

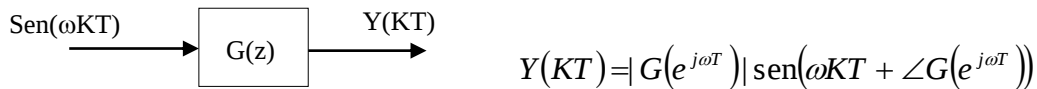


DISCRETO

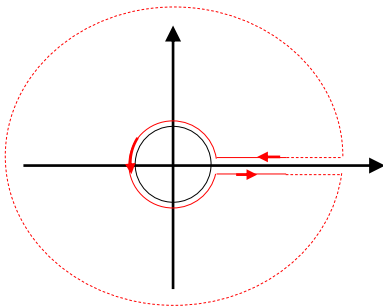


Il **Criterio di Routh** si può utilizzare solo per valutare per quali valori un polinomio ha radici a parte reale positiva o negativa. NON SI PUO' UTILIZZARE PER VALUTARE LA STABILITA'.

Nel caso di **ingresso sinusoidale**:



Il **Cammino di Nyquist** nel discreto sarà:



La tabella di **Precisione a regime** è identica al continuo, cambia il modo di calcolare K_p K_v K_a poiché il teorema del valore finale nel discreto si traduce così:

$$\lim_{K \rightarrow \infty} e(KT) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} e(z) \quad \text{e dunque}$$

$$K_p = F(1) \quad K_v = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} \frac{1}{T} F(z) \quad K_a = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z-1)^2}{z^2} \frac{1}{T^2} F(z)$$

I **Poli dominanti** di un sistema del 2° ordine saranno

$$z_{1,2} = e^{\left(-\xi \omega_n \pm j \omega_n \sqrt{1-\xi^2}\right)T} = e^{-\xi \omega_n T} \left[\cos\left(\omega_n T \sqrt{1-\xi^2}\right) \pm j \sin\left(\omega_n T \sqrt{1-\xi^2}\right) \right]$$

Scelta della **Frequenza di campionamento**:

$$T \cong \frac{t_s}{5} \cong \frac{2\pi}{10B_{P_{rad/s}}} \cong \frac{1}{10B_{P_{Hz}}} \cong \frac{1}{f_c} \quad \text{essendo} \quad B_p t_s \cong 3$$

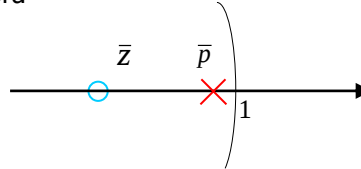
$$f_c \cong 10B_{P_{Hz}} \cong \frac{10}{2\pi} B_{P_{rad/s}} \cong \frac{10}{2\pi} \frac{1}{t_s} \cong \frac{1}{T}$$

SINTESI CON IL LUOGO NEL DISCRETO

N.B. NON SI DEVONO MAI EFFETTUARE CANCELLAZIONI DI POLI O ZERI CON MODULO ≥ 1

- 1) Trasformo le specifiche in termini di ξ e ω_n
- 2) Calcolo i poli dominanti richiesti $z_{1,2}$
- 3) Traccio il grafico del luogo sul piano z e utilizzando il grafico allegato valuto la zona consentita
- 4) Se il luogo non è interno alla zona consentita allora Utilizzo una o più reti correttrici:

$$R = K \frac{z - \bar{z}}{z - \bar{p}}$$



K lo fisso mediante la condizione di modulo:

Se A è il polo dominante di riferimento
$$K = \frac{1}{|G(A)|}$$

dove $G = \tilde{P}C$ è la f.d.t. a ciclo chiuso

e utilizzo la condizione di fase per la determinazione della restante incognita.

SINTESI PER TRASLAZIONE NEL DISCRETO

Consiste nello svolgere la sintesi nel continuo e poi traslare il compensatore ottenuto nel discreto. Questo metodo è utile anche per ottenere implementazioni digitali di compensatori tempo continui.

Esistono 3 metodi di traslazione:

- 1) Differenze in avanti $s \rightarrow \frac{z-1}{T}$
- 2) Differenze all'indietro $s \rightarrow \frac{z-1}{Tz}$
- 3) Tustin (bilineare) $s \rightarrow \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}$

Scelta del Tempo di Campionamento:

$$T = \frac{d^\circ}{\omega_t} \frac{2\pi}{180^\circ} \quad 3^\circ < d^\circ < 10^\circ \quad d^\circ \text{ è detto degrado di fase e } \omega_t \text{ è la pulsazione di attraversamento finale richiesta.}$$

Dunque calcolo $C(s)$ nel continuo mediante uno dei metodi già visti, calcolo T scegliendo opportunamente il degrado di fase, applico la traslazione nel discreto mediante 1 dei 3 metodi precedentemente visti.

TEMPO DI RISPOSTA FINITO

$$E(z) = \frac{Q(z)}{z^{L-1}} + e_0 \frac{z}{z-1} \quad \text{dove } E(z) \text{ rappresenta la funzione Errore ed } e_0 \text{ è l'errore a regime al gradino.}$$

$$Q(z) = \sum_{h=0}^{L-1} [e(hT) - e_0] z^{L-1-h} \quad \text{ricordando che: } E(z) = S(z)R(z) \quad \text{dove } S(z) \text{ è la funzione Sensitività e } R(z) \text{ è il riferimento}$$

$$R(z) = \frac{z}{z-1} \Rightarrow S(z) = \frac{z-1}{z^L} Q(z) + e_0 \quad \text{Questo implica 3 cose:}$$

- 1) Tutti i poli di $S(z)$ e quindi di $W(s)$ sono nell'origine
- 2) Saranno necessari L poli nell'origine (L è il campione a partire dal quale si avrà errore e_0 costante)
- 3) Se vogliamo $e_0=0$ allora $S(z)$ avrà uno zero in $z=1$

Dunque è come una **SINTESI DIRETTA**:

- 1) Scelgo $Q(z)$ polinomio di grado $(L-1)$
- 2) Calcolo $S(z)$ dalla formula sopra

$$3) \quad W(z) = 1 - S(z) \quad \text{dunque calcolo il compensatore:} \quad C(z) = \frac{1}{\tilde{P}(z)} \frac{W(z)}{1 - W(z)}$$

$$\text{Se volessi } e_0=0 \Rightarrow S(z) = \frac{z-1}{z^L} Q(z) \Rightarrow W(z) = \frac{z^L - (z-1)Q(z)}{z^L}$$

Naturalmente dovrò fare fronte a tutti i problemi della sintesi diretta, ovvero realizzabilità del compensatore e la NON cancellazione di poli e zeri instabili.

TEMPO DI RISPOSTA MINIMO

Sia x il grado di $\tilde{P}(z)$, allora per avere un tempo di risposta minimo la f.d.t. a ciclo chiuso sarà ad esempio:

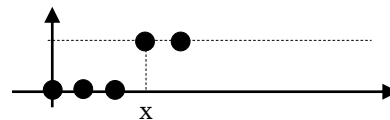
$$W(z) = \frac{1}{z^x} \quad \text{da cui} \quad \frac{W(z)}{1 - W(z)} = \frac{1}{z^x - 1} \quad \text{che è la f.d.t. a ciclo aperto e che ha tutti i poli disposti sulla}$$

$$\text{circonferenza unitaria equidistanziati. Dunque si avrà} \quad C(z) = \frac{1}{\tilde{P}(z)} \frac{1}{z^x - 1}$$

N.B. Nella $\tilde{P}(z)$ posso tollerare un solo polo in 1, ed essendo una sintesi diretta NON posso cancellare poli o zeri instabili.

Il TEMPO DI RISPOSTA MINIMO sarà $t_m = xT$ e la RISPOSTA AL GRADINO del sistema sarà:

$$Y(z) = \frac{1}{z^x} \frac{z}{z-1} = \begin{cases} 0 & \text{per } K < x \\ 1 & \text{per } K \geq x \end{cases}$$



Se il Plant $\tilde{P}(z)$ dovesse presentare degli **ZERI E/O POLI INSTABILI**

Chiamerò z_i tutti questi zeri instabili ($\Rightarrow |z_i| \geq 1$)
 p_i tutti questi poli instabili ($\Rightarrow |p_i| \geq 1$)

$$\text{Dovrò dunque imporre nei miei calcoli } W(z) = \frac{B(z)}{z^k} \quad \text{dove } k = x + \text{grado}(B(z));$$

il grado di $B(z)$ è pari al numero di poli e/o zeri instabili del plant con le relative molteplicità. Per determinare i coefficienti della $B(z)$ applicherò le condizioni di interpolazione: $W(1)=1$ $W(z_i)=0$ $W(p_i)=1$
 in caso di molteplicità si aggiungeranno le condizioni sull'annullamento delle derivate.

N.B. Se l'errore al gradino è nullo $p_i=1$ è sempre presente.

RISPOSTA PIATTA

$$U(z) = \frac{C(z)}{1 + C(z)\tilde{P}(z)} R(z) = \frac{Y(z)}{\tilde{P}(z)}$$

Se al denominatore di questa f.d.t. sono presenti poli che non stanno sull'origine il segnale in ingresso risulterà asintoticamente smorzato e dunque NON ci sarà risposta piatta. Pongo allora:

$$\tilde{P}(z) \equiv \frac{b_{n-1}z^{n-1} + b_{n-2}z^{n-2} + \Lambda + b_0}{(z^r + a_{r-1}z^{r-1} + \Lambda + a_1z + a_0)M(z)}$$

dove $M(z)$ è il polinomio contenente tutti i poli che vogliamo cancellare. Ricavo per il princ. Di identità dei polinomi i coefficienti a_r e b_n e costruisco il compensatore come segue:

$$C(z) = \frac{(d_s z^s + d_{s-1} z^{s-1} + \Lambda + d_1 z + d_0)M(z)}{(z^m + c_{m-1} z^{m-1} + \Lambda + c_1 z + c_0)(z-1)} \quad \text{N.B. se nel plant c'è già il polo in 1 qui non lo metto e quindi}$$

$$W(z) = \frac{(z^r + a_{r-1} z^{r-1} + \Lambda + a_0)(d_s z^s + d_{s-1} z^{s-1} + \Lambda + d_0)}{z^K} \quad \text{dove } K=n+s \quad \text{e} \quad K_{\min}=n+r$$

I coefficienti c_m e d_s si determinano dall'identità:

$$z^K = (d_s z^s + d_{s-1} z^{s-1} + \dots + d_0)(b_{n-1} z^{n-1} + \dots + b_0) + (z^m c_m + z^{m-1} c_{m-1} + \dots + c_0)(z^r + a_{r-1} z^{r-1} + \dots + a_0)(z-1)$$

Se il plant originale ha già 1 polo in $z=1$ qui NON lo metto.

Se il plant originale ha più di 1 polo in $z=1$, quelli in più vanno considerati tra quelli NON cancellabili.

SE IL PLANT ORIGINALE NON HA POLI INSTABILI ALLORA:

$$K = n \quad \text{poiché} \quad s = 0$$

In particolare in questo caso si ha:

$$\tilde{P}(z) \equiv \frac{b_{n-1} z^{n-1} + b_{n-2} z^{n-2} + \Lambda + b_0}{M(z)} \quad \text{e} \quad C(z) = \frac{d_0 M(z)}{(z^m + c_{m-1} z^{m-1} + \Lambda + c_1 z + c_0)(z-1)}$$

chiaramente anche qui se il plant ha già il polo in $z=1$ qui non lo metto.

I coefficienti saranno dati da:

$$\begin{cases} d_0 = \frac{1}{b_0 + b_1 + \Lambda + b_{n-1}} \\ b_0 d_0 - c_0 = 0 \\ b_1 d_0 + c_0 - c_1 = 0 \\ b_2 d_0 + c_1 - c_2 = 0 \\ \dots \\ b_{n-1} d_0 + c_{n-2} - 1 = 0 \end{cases}$$