# Capitolo 1

# Materiali

## 1.1 $\mathbb{R}^3$: Struttura lineare

Il simbolo $\mathbb{R}^3$ è l'insieme ordinato di tre numeri reali; ovvero

$$\mathbb{R}^3 = \{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}.$$

Se $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$, allora $X = Y$ se solamente se $x_1 = y_1,\ x_2 = y_2,\ x_3 = y_3$. Dati $X, Y \in \mathbb{R}^3$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ si pone:

a) $X + Y = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{bmatrix}$;

b) $\lambda X = \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \lambda x_3 \end{bmatrix}$,

ovvero somma e moltiplicazione per scalare sono definite componente per componente. La regola della somma si interpreta geometricamente come la regola del parallelogramma.

La somma e moltiplicazioni per scalari godono di importanti proprietà.

**Proposizione 1.2.** *Dati $X, Y, Z \in \mathbb{R}^3$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ allora*

*a) $X + (Y + Z) = (X + Y) + Z$: proprierà associativa della somma;*

*b)* $X + Y = Y + X$*: proprietà commutativa della somma;*

*c)* *posto* $0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$*, allora* $0 + X = X + 0 = X$*;*

*d)* *se* $X \in \mathbb{R}^3$*, allora* $X + (-1)X = 0$*;* $-X := (-1)X$ *è detto opposto di* $X$*;*

*e)* $(\lambda + \mu)X = \lambda X + \mu X$*;*

*f)* $\lambda(X + Y) = \lambda X + \lambda Y$*;*

*g)* $(\lambda\mu)X = \lambda(\mu X) = \mu(\lambda X)$*.*

Notazione: $X - Y := X + (-1)Y$.

**Definizione 1.3.**

- *Dati* $X_1, \dots X_k \in \mathbb{R}^3$ *si dice combinazione lineare di* $X_1, \dots, X_k$ *ogni elemento* $Z \in \mathbb{R}^3$ *per cui esistano* $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ *tali che* $Z = \lambda_1 X_1 + \cdots + \lambda_k X_k$*. I numeri reali* $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ *si chiamano i coefficienti della combinazione lineare.*

- $X_1, \dots X_k \in \mathbb{R}^3$ *si dicono linermente dipendenti se esistono* $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ *non tutti nulli, tali che*
$$\lambda_1 X_1 + \cdots + \lambda_k X_k = 0;$$
$X_1, \dots X_k \in \mathbb{R}^3$ *si dicono linermente indipendenti se non sono linearmente dipendenti, ovvero se, comunque scelti* $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ *non tutti nulli, si ha*
$$\lambda_1 X_1 + \cdots + \lambda_k X_k \neq 0;$$
*ovvero*
$$\lambda_1 X_1 + \cdots + \lambda_k X_k = 0;$$
*se e solamente se* $\lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0$*.*

**Esempio 1.4.** *Siano* $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$*,* $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$*,* $e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$*. È facile verificare che* $(e_1, e_2, e_3)$ *sono linearmente indipendenti e che ogni vettore* $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ *è combinazione lineare di* $e_1, e_2, e_3$*. Infatti*
$$X = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3.$$

Una semplice ma importante relazione fra combinazione lineare e dipendenza lineare è data dalla seguente proposizione.

**Proposizione 1.5.** $X_1, \ldots X_k \in \mathbb{R}^3$ *sono linearmente dipendenti se e solo se uno di essi è combinazione lineare degli altri.*

*Dimostrazione.* Sia $\lambda_1 X_1 + \cdots + \lambda_k X_k = 0$ con $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ non tutti nulli. Supponiamo che $\lambda_j \neq 0$. Allora

$$X_j = -\lambda_j^{-1}(\lambda_1 X_1 + \cdots + \lambda_{j-1} X_{j-1} + \lambda_{j+1} X_{j+1} + \cdots \lambda_k X_k).$$

Viceversa se

$$X_j = \lambda_1 X_1 + \cdots + \lambda_{j-1} X_{j-1} + \lambda_{j+1} X_{j+1} + \cdots \lambda_k X_k,$$

Allora

$$\lambda_1 X_1 + \cdots + \lambda_{j-1} X_{j-1} - X_j + \lambda_{j+1} X_{j+1} + \cdots \lambda_k X_k = 0.$$

□

**Osservazione 1.6.**

- $X \in \mathbb{R}^3$ *è linearmente indipendente se e solamente se* $X \neq 0$.
- *Due vettori di* $\mathbb{R}^3$ *sono linearmente dipendenti se e solamente se sono uno multiplo dell'altro;*
- $0$, $X_1, \ldots, X_k$ *sono linearmente dipendenti;*
- *Se* $\mathcal{B}$ *è un insieme di elementi di* $\mathbb{R}^3$ *linearmente indipendenti, allora ogni sottoinsieme di* $\mathcal{B}$ *è costituito da elementi linearmente indipendenti;*
- *se* $\mathcal{B}$ *è un insieme costituito di elementi di* $\mathbb{R}^3$ *linearmente dipendenti, allora ogni sovrainsieme di* $\mathcal{B}$ *è costituito da elementi linearmente dipendenti.*

**Definizione 1.7.** *Lo spazio generato dai vettori* $X_1, \ldots, X_k \in \mathbb{R}^3$ *è l'insieme di tutti vettori che si ottengono come combinazione lineari di* $X_1, \ldots, X_k$*:*

$$\mathcal{L}(X_1, \ldots, X_k) := \{\lambda_1 X_1 + \cdots + \lambda_k X_k \mid \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}\}$$

È facile provare che se $v, w \in \mathcal{L}(X_1, \ldots, X_k)$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, allora $\lambda v + \mu w \in \mathcal{L}(X_1, \ldots, X_k)$. La proposizione 1.5 può essere riletta nella seguente maniera.

**Proposizione 1.8.** *I vettori* $X_1, \ldots, X_k \in \mathbb{R}^3$ *sono linearmente dipendenti se e solamente se esiste* $j \in (1, \ldots, k)$ *tale che*

$$X_j \in \mathcal{L}(X_1, \ldots, X_{j-1}, X_{j+1}, \ldots, X_k)$$

## 1.9 $\mathbb{R}^3$: struttura metrica

Consideriamo una nuova operazione con elementi di $\mathbb{R}^3$. Dati $X, Y \in \mathbb{R}^3$ con $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ e $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$ si pone

$$\langle X, Y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3.$$

$\langle X, Y \rangle$ è detto prodotto scalare standard.

**Proposizione 1.10.** *Se $X, Y, Z \in \mathbb{R}^3$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, allora*

*(a)* $\langle X, X \rangle \geq 0$ *con uguaglianza se e solamente se* $X = 0$*;*

*(b)* $\langle \lambda X + \mu Y, Z \rangle = \lambda \langle X, Z \rangle + \mu \langle Y, Z \rangle$*;*

*(c)* $\langle X, Y \rangle = \langle Y, X \rangle$*;*

*(d)* $\langle Z, \lambda X + \mu Y \rangle = \lambda \langle Z, X \rangle + \mu \langle Z, Y \rangle$*.*

Sia $X$ un vettore. Chiameremo *norma* o *lunghezza* di $X$ il numero reale $\| X \| = \sqrt{\langle X, X \rangle}$. Dunque se $X \neq 0$, allora $\| X \| > 0$. Chiameremo *distanza* fra due vettori $X, Y$ il numero non negativo $\| X - Y \|$. Quindi la lunghezza di un vettore è la distanza dall'origine 0.

Interpretazione geometrica del prodotto scalare. Dati $X, Y \in \mathbb{R}^3$ non nulli, cosideriamo il vettore $X + Y$ che corrisponde alla somma fatta con la regola del parallelogramma. Per il teorema di Carnot $\| X + Y \|^2 = \| X \|^2 + \| Y \|^2 - 2 \| X \| \| Y \| \cos \psi$, dove $\psi$ è l'angolo opposto a $X + Y$. In particolare, se indichiamo con $\theta$ l'angolo fra $X, Y$, allora $\theta + \psi = \pi$. Sviluppando i calcoli si ottiene

$$\langle X, Y \rangle = \cos(\theta) \| X \| \| Y \|$$

**Corollario 1.11.**

*a)* $X, Y \in \mathbb{R}^3$ *formano un angolo acuto (rispettivamente ottuso) se e solamente se* $\langle X, Y \rangle > 0$ *(rispettivamente* $\langle X, Y \rangle < 0$*);*

*b) (Disuguaglianza di Cauchy-Schwartz)*

$$|\langle X, Y \rangle \leq \| X \| \| Y \|,$$

*e l'uguaglianza vale se e solamente se* $X = \lambda Y$*.*

**Definizione 1.12.** *Diremo che due vettori $X, Y \in \mathbb{R}^3$ sono ortogonali se il loro prodotto scalare è nullo.*

**Proposizione 1.13.** *Siano $X_1, \dots X_k$ vettori di $\mathbb{R}^3$ non nulli e a due a due ortogonali. Allora $X_1, \dots X_k$ sono linearmente indipendenti.*

*Dimostrazione.* Sia $\alpha_1 X_1 + \cdots + \alpha_k X_k = 0$ una combinazione lineare banale. Vogliamo dimostare che i coefficienti della combinazione lineare sono tutti nulli; ovvero i vettori $X_1, \dots, X_k$ sono linearmente indipendenti. Poiché $\alpha_1 X_1 + \cdots + \alpha_k X_k = 0$, si ha

$$\begin{aligned} 0 &= \langle X_i, \alpha_1 X_1 + \cdots + \alpha_k X_k \rangle \\ &= \alpha_1 \langle X_i, X_1 \rangle + \cdots + \alpha_k \langle X_i, X_k \rangle \\ &= \alpha_i \langle X_i, X_i \rangle \text{ (essendo } X_1, \dots, X_k \text{ ortogonali a due a due)} \end{aligned}$$

per $i = 1, \dots, k$. Quindi, essendo $X_i \neq 0$, i coefficienti $\alpha_i$ sono tutti nulli concludendo la dimostrazione. □

Sia $S$ un sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$. Indicheremo con $S^\perp$ l'insieme di tutti i vettori di $\mathbb{R}^3$ ortogonali a tutti i vettori di $S$: ovvero

$$S^\perp := \{X \in \mathbb{R}^3 : \langle X, s \rangle = 0 \ \forall s \in S\}.$$

È facile provare che se $v, w \in S^\perp$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, allora $\lambda v + \mu w \in S^\perp$.

**Proposizione 1.14.** *Sia $S = \mathcal{L}(v_1, \dots, v_k)$. Allora*

$$S^\perp = \{v \in \mathbb{R}^3 : \langle v, v_1 \rangle = \cdots = \langle v, v_k \rangle = 0\}$$

*Dimostrazione.* Sia $S' = \{v \in \mathbb{R}^3 : \langle v, v_1 \rangle = \cdots = \langle v, v_k \rangle = 0\}$. Vogliamo dimostrare che $S^\perp = S'$. Poiché $S^\perp \subset S'$ è sufficiente dimostare che $S' \subset S^\perp$. Sia $w \in S'$. Vogliamo dimostrare che

$$\langle w, s \rangle = 0, \ \forall s \in S.$$

Se $s \in \mathcal{L}(v_1, \dots, v_k)$, allora esistono $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ tali che

$$s = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k$$

Allora

$$\begin{aligned} \langle w, s \rangle &= \langle w, \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k \rangle \\ &= \alpha_1 \langle w, v_1 \rangle + \cdots + \alpha_k \langle w, v_k \rangle \\ &= 0 \text{ (essendo } w \in S') \end{aligned}$$

da cui segue che $w \in S^\perp$. □

**Teorema 1.15.** *Siano $X, Y \in \mathbb{R}^3$. Allora $\| X \|^2 + \| Y \|^2 = \| X + Y \|^2$ se e solamente se $X, Y$ sono ortogonali.*

Siano $v, w \in \mathbb{R}^3$ vettori di $\mathbb{R}^3$, $w \neq 0$. Diremo *proiezione ortogonale* di $v$ su $w$ il vettore

$$\mathrm{pr}_w(v) = \frac{\langle v, w \rangle}{\| w \|^2} w.$$

Si osservi che se $v, w$ sono ortogonali, allora $pr_w(v) = 0$.

## 1.16 $\mathbb{R}^3$: prodotto vettoriale

Siano $X, Y \in \mathbb{R}^3$ con $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ e $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$. Definiamo il loro prodotto vettoriale $X \times Y$ come il vettore

$$X \times Y = (x_2 y_3 - x_3 y_2, -y_3 x_1 + x_3 y_1, x_1 y_2 - y_1 x_2)$$

**Proposizione 1.17.** *Siano $X, Y, Z \in \mathbb{R}^3$ e $\lambda, \mu \in$ R. Allora*

- *$X \times Y = -Y \times X$, i.e., il prodotto vettoriale è antisimmetrico;*
- *$(\lambda X + \mu Y) \times Z = \lambda(X \times Z) + \mu(Y \times Z)$, i.e., il prodotto vettoriale è lineare rispetto al primo membro;*
- *$Z \times (\lambda X + \mu Y) = \lambda(Z \times X) + \mu(Z \times Y)$, i.e., il prodotto vettoriale è lineare rispetto al secondo membro;*
- *$X \times Y$ è ortogonale sia a $X$ che a $Y$;*
- *$X \times Y = 0$ se e solamente se $X = \lambda Y$;*
- *$\| X \times Y \| = \| X \| \| Y \| \, |\sin \theta|$, dove $\theta$ è l'angolo fra $X$ e $Y$. Quindi la norma del prodotto vettoriale è l'area del parallelogramma di lati $X$ e $Y$ ;*

*Dimostrazione.* Sia $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ e $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$, allora

$$\begin{aligned}
\| X \times Y \|^2 =& (x_2y_3 - x_3y_2)^2 + (-y_3x_1 + x_3y_1)^2 + (x_1y_2 - y_1x_2)^2 \\
=& (x_2y_3)^2 + (x_3y_2)^2 + (y_3x_1)^2 + (x_3y_1)^2 + (x_1y_2)^2 + (y_1x_2)^2 \\
& -2\big(x_2y_3x_3y_2 + y_3x_1x_3y_1 + x_1y_2y_1x_2\big) \\
=& x_1^2(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) - x_1^2y_1^2 + x_2^2(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) - x_2^2y_2^2 \\
& + x_3^2(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) - x_3^2y_3^2 - 2\big(x_2y_3x_3y_2 + y_3x_1x_3y_1 + x_1y_2y_1x_2\big) \\
=& \| X \|^2 \| Y \|^2 - \big((x_1y_1)(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3) + (x_2y_2)((x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3) \\
& + (x_3y_3)(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)\big) \\
=& \| X \|^2 \| Y \|^2 - \langle X, Y \rangle^2 \\
=& \| X \|^2 \| Y \|^2 \, (1 - \cos^2(\theta)) = \| X \|^2 \| Y \|^2 \sin^2\theta.
\end{aligned}$$

□

## 1.18 Rette e piani

Possiamo pensare ad una retta nello spazio come ad una particolare traiettora di un punto che si muove, sempre secondo una certa direzione (e verso). Quindi, se pensiamo al parametro t come al tempo, i punti di una retta sono descritti da una equazione parametrica

$$r : X = P + tA,$$

dove $t \in \mathbb{R}$ è il parametro, $P$ è un punto delle retta ed infine $A$ è un vettore non nullo, chiamato vettore direttore, che ne indica la direzione. Come insieme

$$r = \{X \in \mathbb{R}^3 : X = P + tA, t \in \mathbb{R}\}.$$

Una retta ha molte possibili equazioni parametriche. Possiamo scegliere un punto $P$ qualsiasi delle retta $r$ ed il vettore direttore può cambiare lunghezza e verso. Dato un punto $P$, le rette che passano per $P$ sono tutte e sole quelle date da equazioni parametriche

$$X = P + tA,$$

dove $A \in \mathbb{R}^3$ non nullo. L'insieme delle rette passanti per $P$ si chiama *stella di rette* di centro P. Per due punti distinti $P_1$ e $P_2$ passa una ed una sola retta. Una equazione paramatrica sarà del tipo

$$r = P_1 + t(P_1 - P_2).$$

Siano $r_1 = P_1 + tA_1$ ed $r_2 = P_2 + tA_2$ due rette nello spazio. Le rette $r_1$ e $r_2$ sono *parallele* se e solamente se hanno la stessa direzione, ovvero se e solamente se esiste $k \in \mathbb{R}$ tale che $A_1 = kA_2$, ovvero se e solamente se $A_1$ e $A_2$ sono linermente dipendenti. Se $r_1$ ed $r_2$, oltre ad essere parallele, hanno anche un punto in comune, allora esse sono *coincidenti*. Quindi, due rette $r_1 = P_1 + tA_1$ ed $r_2 = P_2 + tA_2$ sono *coincidenti* se e solo se $P_1 \in r_2$ e $r_1$ ed $r_2$ sono parallele. Le rette $r_1$ e $r_2$ sono *incidenti* se si intersecano in un punto. Infine, le rette si dicono *sghembe* se non si intersecano e non sono parallele. Quindi $r_1$ e $r_2$ sono sghembe se e solamente se non si intersecano ed i vettori direttori sono linearmente indipendenti. Infine $r_1$ e $r_2$ si dicono *ortogonali* se i loro vettori direttori sono ortogonali.

Possiamo pensare ad un piano come all'insieme ortogonale ad una direzione fissata. Sia $n = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \neq 0$. Il piano passante per l'origine ed ortogonale alla direzione $n$ è

$$n^{\perp} = \{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \langle X, n \rangle = 0\} = \{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \ ax + by + cz = 0\}.$$

Il vettore $n$ si chiama *vettore normale al piano*. Il piano passante per il punto $P$ e ortogonale alla direzione $n$ è invece descritto dall'insieme

$$\pi := \{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \langle X - P, n \rangle = 0\} = \{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : ax + by + cz = d\},$$

dove $-d = \langle P, n \rangle$. In generale le equazioni cartesiane del piano nello spazio, è definita da una equazione del tipo

$$\pi : ax + by + cz + d = 0,$$

chiamata equazione cartesiana. Il piano $\pi$ passa per l'origine se e solamente se $d = 0$. Osserviamo inoltre che il piano $\pi$ con vettore normale $n$ passante per $P$ non è altro che il piano per l'origine ortogonale a $n$ traslato per il vettore $P$. Ogni piano può essere pensato come il traslato di un unico piano passante per l'origine con lo stesso vettore normale.

Siano $\pi_1 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ e $\pi_2 : a_2x + b_2y + c_3z + d_4 = 0$ due piani. Indichiamo con $n_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix}$ e $n_2 = \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix}$ i loro vettori normali.

Allora: $\pi_1$ e $\pi_2$ sono due due piani *coincidenti* se e solamente se esiste un numero reale non nullo $k$ tale che

$$n_1 = kn_2 \text{ (linearmente dipendenti) e } d_1 = kd_2;$$

$\pi_1$ e $\pi_2$ sono due piani paralleli se solamente se $n_1$ ed $n_2$ sono vettori linearmente dipendenti se e solamente se esiste $k \neq 0$ tale che $n_1 = kn_2$; $\pi_1$ e $\pi_2$ sono *incidenti* se si intersecano lungo una retta se e solamente se $n_1$ e $n_2$ sono vettori linearmente indipendenti. Inoltre, diremo che $\pi_1$ e $\pi_2$ sono *ortogonali* se i loro vettori normali sono vettori ortogonali.

**Osservazione 1.19.**

*a) Esistono infiniti piani passanti per due punti;*

*b) Esiste un unico piano passante per tre punti non allineati. Ricordiamo che $P_1$, $P_2$ e $P_3$ vettori di $\mathbb{R}^3$ si dicono allineati se $P_2 - P_1$ e $P_3 - P_1$ sono linearmente dipendenti; cioé se e solamente se appartengono ad una stessa retta.*

Sia $r : P + tA$ una retta. Se $P = \begin{bmatrix} x_o \\ y_o \\ z_0 \end{bmatrix}$ e $A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ allora

$$\begin{cases} x = x_o + ta_1 \\ y = y_o + ta_2 \\ z = z_o + ta_3 \end{cases}$$

Se $a_1$ fosse differente da zero, allora potremmo ricavare $t$

$$t = \frac{x - x_o}{a_1},$$

e sostituendo nelle altre due, si ottengono le equazioni cartesiani della retta:

$$r = \{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : y - y_o = \frac{a_2(x - x_o)}{a_1}, z - z_o = \frac{a_3(x - x_o)}{a_1}, \}.$$

Analogamente se $a_2 \neq 0$, allora

$$r = \{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x - x_o = \frac{a_1(y - y_o)}{a_2}, z - z_o = \frac{a_3(y - y_o)}{a_2}, \}$$

ed se $a_3 \neq 0$, allora

$$r = \{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : y - y_o = \frac{a_2(z - z_o)}{a_3}, y - y_o = \frac{a_3(z - z_o)}{a_1}, \}.$$

Questo corrisponde a vedere la retta come insieme delle soluzioni di un sistema lineare, ovvero come intersezione di due piani. Si noti che una stessa retta ha infinite possibili equazioni cartesiane, nonché ci sono infinite coppie di piani che, intersecandosi, individuano la stessa retta. Vice-versa due piani non paralleli si intersecano lungo una retta. Se la retta $r$ è data dalle equazioni cartesiane

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

allora determinare le equazioni parametriche equivale a risolvere un sistema di 2 equazioni in 3 incognite. Un vettore direttore può essere ottenuto calcolando il prodotto vettoriale dei i vettori normali ai due piani:

$$A = n \wedge n',$$

L'insieme dei piani passanti per la retta $r$ si chiama *fascio di piani* di asse $r$. Se la retta $r$ ha equazioni cartesiane

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases},$$

allora un piano $\pi$ appartiene al fascio di piani di asse $r$ se e solamete se esistano $\lambda$ e $\mu$, non entrambi nulli, tali che $\pi$ ha equazione cartesiana

$$\lambda(ax + by + cz + d) + \mu(a'x + b'y + c'z + d')$$

Due rette $r_1$ ed $r_2$ si dicono *complanari* se esiste un piano $\pi$ le contiene entrambe. E' possibile dimostrare che questo piano esiste sempre tranne nel caso in cui le rette siano sghembe.

Consideriamo la mutua posizione di una retta ed un piano nello spazio. Sia $r : X = P + tA$ e $\pi : ax + by + cz + d = 0$. Indichiamo con $n = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ vettore normale al piano. Una retta ed un piano possono essere: *incidenti* se si intersecano in un punto; la retta è contenuta nel piano, se e solamente se $P \in \pi$ e $A$ è ortogonale ad $n$; la retta $r$ è parallela a $\pi$ se e solamente se

$A$ ed $n$ sono ortogonali, ovvero esiste un retta parallela alla retta data che è contenuta nel piano. Inoltre diremo che $r$ è *ortogonale* a $\pi$ se $A$ è ortogonale al vettore normale al piano $n$.

Infine, vogliamo determinare le equazioni parametriche di un piano $\pi : ax + by + cz + d = 0$. Poiché il vettore $n = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ è non nullo, allora se:

- se $a \neq 0$, allora $\pi = \begin{bmatrix} -d/a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -b/a \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -c/a \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$;
- se $b \neq 0$, allora $\pi = \begin{bmatrix} 0 \\ -d/b \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -a/b \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ -c/b \\ 1 \end{bmatrix}$;
- se $c \neq 0$, allora $\pi = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -d/c \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -a/c \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -b/c \end{bmatrix}$;

Quindi $X = P + tv + sw$, dove $v, w$ sono linearmente indipendenti. Viceversa, se $\pi = P + tv + sw$, $\forall s, t \in \mathbb{R}$, con $v$ e $w$ sono linearmente indipendenti, allora $\pi$ ha equazioni cartesiani:

$$\pi : ax + by + cx + d = 0,$$

dove $n = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = v \times w$ e $d = -\langle P, n \rangle$.

## 1.20 $\mathbb{R}^n$: Struttura lineare

Il simbolo $\mathbb{R}^n$ è l'insieme delle colonne ordinate di $n$ numeri; ovvero $\mathbb{R}^n = \{ \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$. Se $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$, allora $X = Y$ se solamente se $x_1 = y_1, \dots,\ x_n = y_n$. Dati $X, Y \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ si pone:

a) $X + Y = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix}$;

b) $\lambda X = \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{bmatrix}$,

ovvero somma e moltiplicazione per scalare sono definite componente per componente. La somma e moltiplicazioni per scalari godono di importanti proprietà.

**Proposizione 1.21.** *Dati $X, Y, Z \in \mathbb{R}^n$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ allora*

*a)* $X + (Y + Z) = (X + Y) + Z$*: proprierà associativa della somma;*

*b)* $X + Y = Y + X$*: proprietà commutativa della somma;*

*c) posto* $0 = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, *allora* $0 + X = X + 0 = X$*;*

*d) se* $X \in \mathbb{R}^n$*, allora* $X + (-1)X = 0$*;* $-X := (-1)X$ *è detto opposto di* $X$*;*

*e)* $(\lambda + \mu)X = \lambda X + \mu X$*;*

*f)* $\lambda(X + Y) = \lambda X + \lambda Y$*;*

*g)* $(\lambda\mu)X = \lambda(\mu X) = \mu(\lambda X)$*.*

Notazione: porremo $X - Y := X + (-1)Y$.

**Definizione 1.22.**

- *Dati* $X_1, \dots X_k \in \mathbb{R}^n$ *si dice combinazione lineare di* $X_1, \dots, X_k$ *ogni elemento* $Z \in \mathbb{R}^n$ *per cui esistano* $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ *tali che* $Z = \lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_k X_k$*. I numeri reali* $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ *si chiamano i coefficienti della combinazione lineare.*

- $X_1, \dots X_k \in \mathbb{R}^n$ *si dicono linearmente dipendenti se esistono* $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ *non tutti nulli, tali che*

$$\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_k X_k = 0;$$

  $X_1, \dots X_k \in \mathbb{R}^n$ *si dicono linermente indipendenti se non sono linearmente dipendenti, ovvero se, comunque scelti* $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ *non tutti nulli, si ha*

$$\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_k X_k \neq 0;$$

*ovvero*

$$\lambda_1 X_1 + \cdots + \lambda_k X_k = 0;$$

*se e solamente se* $\lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0$.

**Esempio 1.23.** *Siano* $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \cdots, e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$. *È facile verificare che* $(e_1, \ldots, e_n)$ *sono linearmente indipendenti e che ogni vettore* $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ *è combinazione lineare di* $e_1, \ldots, e_n$. *Infatti*

$$X = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n.$$

Una semplice ma importante relazione fra combinazione lineare e dipendenza lineare è data dalla seguente proposizione.

**Proposizione 1.24.** $X_1, \ldots X_k \in \mathbb{R}^n$ *sono linearmente dipendenti se e solo se uno di essi è combinazione lineare degli altri.*

*Dimostrazione.* Sia $\lambda_1 X_1 + \cdots + \lambda_k X_k = 0$ con $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ non tutti nulli. Supponiamo che $\lambda_j \neq 0$. Allora

$$X_j = -\lambda_j^{-1}(\lambda_1 X_1 + \cdots + \lambda_{j-1} X_{j-1} + \lambda_{j+1} X_{j+1} + \cdots \lambda_k X_k).$$

Viceversa se

$$X_j = \lambda_1 X_1 + \cdots + \lambda_{j-1} X_{j-1} + \lambda_{j+1} X_{j+1} + \cdots \lambda_k X_k,$$

Allora

$$\lambda_1 X_1 + \cdots + \lambda_{j-1} X_{j-1} - X_j + \lambda_{j+1} X_{j+1} + \cdots \lambda_k X_k = 0.$$

□

**Osservazione 1.25.**

- $X \in \mathbb{R}^n$ *è linearmente indipendente se e solamente se* $X \neq 0$.
- *Due vettori di* $\mathbb{R}^n$ *sono linearmente dipendenti se e solamente se sono uno multiplo dell'altro;*
- $0, X_1, \ldots, X_k$ *sono linearmente dipendenti;*

- *Se $\mathcal{B}$ è un insieme di elementi di $\mathbb{R}^n$ linearmente indipendenti, allora ogni sottoinsieme di $\mathcal{B}$ è costituito da elementi linearmente indipendenti;*

- *se $\mathcal{B}$ è un insieme costituito di elementi di $\mathbb{R}^n$ linearmente dipendenti, allora ogni sovrainsieme di $\mathcal{B}$ è costituito da elementi linearmente dipendenti.*

**Definizione 1.26.** *Lo spazio generato dai vettori $X_1, \ldots, X_k \in \mathbb{R}^n$ è l'insieme di tutti vettori che si ottengono come combinazione lineari di $X_1, \ldots, X_k$:*

$$\mathcal{L}(X_1, \ldots, X_k) := \{\lambda_1 X_1 + \cdots + \lambda_k X_k \mid \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}\}$$

È facile provare che se $v, w \in \mathcal{L}(X_1, \ldots, X_k)$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, allora $\lambda v + \mu w \in \mathcal{L}(X_1, \ldots, X_k)$.

**Proposizione 1.27.** *I vettori $X_1, \ldots, X_k \in \mathbb{R}^n$ sono linearmente dipendenti se e solamente se esiste $j \in (1, \ldots, k)$ tale che*

$$X_j \in \mathcal{L}(X_1, \ldots, X_{j-1}, X_{j+1}, \ldots, X_k)$$

## 1.28 $\mathbb{R}^n$: struttura metrica

Consideriamo una nuova operazione con elementi di $\mathbb{R}^n$. Dati $X, Y \in \mathbb{R}^n$ con $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ e $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ si pone

$$\langle X, Y \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n.$$

$\langle X, Y \rangle$ è detto prodotto scalare standard.

**Proposizione 1.29.** *Se $X, Y, Z \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, allora*

*(a)* $\langle X, X \rangle \geq 0$ *con uguaglianza se e solamente se* $X = 0$*;*

*(b)* $\langle \lambda X + \mu Y, Z \rangle = \lambda \langle X, Z \rangle + \mu \langle Y, Z \rangle$*;*

*(c)* $\langle X, Y \rangle = \langle Y, X \rangle$*;*

*(d)* $\langle Z, \lambda X + \mu Y \rangle = \lambda \langle Z, X \rangle + \mu \langle Z, Y \rangle$*.*

Sia $X$ un vettore. Chiameremo *norma* o *lunghezza* di $X$ il numero reale $\| X \| = \sqrt{\langle X, X\rangle}$. Dunque se $X \neq 0$, allora $\| X \| > 0$. Chimaremo *distanza* fra due vettori $X, Y$ il numero non negativo $\| X - Y \|$. Quindi la lunghezza di un vettore è la distanza dall'origine 0.

Siano $X, Y \in \mathbb{R}^n$. Allora $\langle X + tY, X + tY\rangle \geq 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Sviluppando i calcoli otteniamo

$$\langle X, X\rangle + 2t\langle X, Y\rangle + t^2\langle Y, Y\rangle \geq 0$$

da cui segue

$$\Delta/4 = \langle X, Y\rangle^2 - \| X \|^2 \| Y \|^2 \leq 0.$$

Inoltre se $\Delta/4 = 0$, allora esiste $t_o \in \mathbb{R}$ tale che $\langle X + t_oY, X + t_oY\rangle = 0$; ovvero, per la proposizione 1.29 [$(a)$], $X = -t_oY$.

**Proposizione 1.30.** *(Disuguaglianza di Cauchy-Schwartz)*

$$|\langle X, Y\rangle \leq \| X \| \| Y \|,$$

*e l'uguaglianza vale se e solamente se* $X = \lambda Y$.

**Definizione 1.31.** *Sianp* $X, Y$ *due vettori non nulli. Definiamo l'angolo fra* $X$ *e* $Y$ *come l'unico valore* $\theta \in [0, \pi]$ *tale che*

$$\cos\theta = \frac{\langle X, Y\rangle}{\| X \| \| Y \|}.$$

Diremo che due vettori sono ortogonali se il loro prodotto scalare è nullo. Inoltre l'angolo fra $X$ e $Y$ è acuto (rispettivamente ottuso) se e solamente se $\langle X, Y\rangle > 0$ (rispettivamente $\langle X, Y\rangle < 0$).

**Proposizione 1.32.** *Siano* $X_1, \ldots X_k$ *vettori di* $\mathbb{R}^n$ *non nulli e a due a due ortogonali. Allora* $X_1, \ldots X_k$ *sono linearmente indipendenti.*

*Dimostrazione.* Sia $\alpha_1X_1 + \cdots + \alpha_kX_k = 0$ una combinazione lineare banale. Vogliamo dimostare che i coefficienti della combinazione lineare sono tutti nulli; ovvero i vettori $X_1, \ldots, X_k$ sono linearmente indipendenti. Poiché $\alpha_1X_1 + \cdots + \alpha_kX_k = 0$, si ha

$$\begin{aligned} 0 &= \langle X_i, \alpha_1X_1 + \cdots + \alpha_kX_k\rangle \\ &= \alpha_1\langle X_i, X_1\rangle + \cdots + \alpha_k\langle X_i, X_k\rangle \\ &= \alpha_i\langle X_i, X_i\rangle \text{ (essendo } X_1, \ldots, X_k \text{ ortogonali a due a due)} \end{aligned}$$

per $i = 1, \ldots, k$. Quindi, essendo $X_i \neq 0$, i coefficienti $\alpha_i$ sono tutti nulli concludendo la dimostrazione. □

Sia $S$ un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$. Indicheremo con $S^\perp$ l'insieme di tutti i vettori di $\mathbb{R}^n$ ortogonali a tutti i vettori di $S$: ovvero

$$S^\perp := \{X \in \mathbb{R}^n : \langle X, s\rangle = 0 \ \forall s \in S\}.$$

È facile provare che se $v, w \in S^\perp$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, allora $\lambda v + \mu w \in S^\perp$.

**Proposizione 1.33.** *Sia $S = \mathcal{L}(v_1, \dots, v_k)$. Allora*

$$S^\perp = \{v \in \mathbb{R}^n : \langle v, v_1\rangle = \cdots = \langle v, v_k\rangle = 0\}$$

*Dimostrazione.* Sia $S' = \{v \in \mathbb{R}^n : \langle v, v_1\rangle = \cdots = \langle v, v_k\rangle = 0\}$. Vogliamo dimostrare che $S^\perp = S'$. Poiché $S^\perp \subset S'$ è sufficiente dimostare che $S' \subset S^\perp$. Sia $w \in S'$. Vogliamo dimostrare che

$$\langle w, s\rangle = 0, \ \forall s \in S.$$

Se $s \in \mathcal{L}(v_1, \dots, v_k)$, allora esistono $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ tali che

$$s = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k$$

Allora

$$\begin{aligned}\langle w, s\rangle &= \langle w, \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k\rangle \\ &= \alpha_1\langle w, v_1\rangle + \cdots + \alpha_k\langle w, v_k\rangle \\ &= 0 \text{ (essendo } w \in S')\end{aligned}$$

da cui segue che $w \in S^\perp$. □

**Teorema 1.34.** *Siano $X, Y \in \mathbb{R}^n$. Allora $\| X \|^2 + \| Y \|^2 = \| X + Y \|^2$ se e solamente se $X, Y$ sono ortogonali.*

Siano $v, w \in \mathbb{R}^n$, $w \neq 0$. Diremo *proiezione ortogonale* di $v$ su $w$ il vettore

$$\mathrm{pr}_w(v) = \frac{\langle v, w\rangle}{\| w \|^2} w.$$

## 1.35 $\mathbb{C}^n$: struttura metrica e lineare

Il simbolo $\mathbb{C}^n$ è l'insieme delle colonne ordinate di $n$ numeri complessi; ovvero $\mathbb{C}^n = \{\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} x_1, \dots, x_n \in \mathbb{C}\}$. Se $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$, allora $X = Y$ se solamente se $x_1 = y_1, \dots, \ x_n = y_n$. Dati $X, Y \in \mathbb{C}^n$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ si pone:

a) $X+Y=\begin{bmatrix} x_1+y_1 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{bmatrix}$;

b) $\lambda X=\begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{bmatrix}$,

ovvero somma e moltiplicazione per scalare sono definite componente per componente. La somma e moltiplicazioni per scalari godono di importanti proprietà.

**Proposizione 1.36.** *Dati $X, Y, Z \in \mathbb{C}^n$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ allora*

*a)* $X+(Y+Z)=(X+Y)+Z$*: proprierà associativa della somma;*

*b)* $X+Y=Y+X$*: proprietà commutativa della somma;*

*c) posto* $0=\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$*, allora* $0+X=X+0=X$*;*

*d) se* $X \in \mathbb{R}^3$*, allora* $X+(-1)X=0$*;* $-X:=(-1)X$ *è detto opposto di* $X$*;*

*e)* $(\lambda+\mu)X=\lambda X+\mu X$*;*

*f)* $\lambda(X+Y)=\lambda X+\lambda Y$*;*

*g)* $(\lambda\mu)X=\lambda(\mu X)=\mu(\lambda X)$*.*

Notazione: porremo $X-Y:=X+(-1)Y$.

**Definizione 1.37.**

- *Dati* $X_1, \dots X_k \in \mathbb{C}^n$ *si dice combinazione lineare di* $X_1, \dots, X_k$ *ogni elemento* $Z \in \mathbb{C}^n$ *per cui esistano* $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{C}$ *tali che* $Z=\lambda_1 X_1+\cdots+\lambda_k X_k$*. I numeri reali* $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ *si chiamano i coefficienti della combinazione lineare.*

- $X_1, \dots X_k \in \mathbb{C}^n$ *si dicono linearmente dipendenti se esistono* $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ *non tutti nulli, tali che*

$$\lambda_1 X_1+\cdots+\lambda_k X_k=0;$$

*$X_1, \dots X_k \in \mathbb{C}^n$ si dicono linermente indipendenti se non sono linearmente dipendenti, ovvero se, comunque scelti $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ non tutti nulli, si ha*

$$\lambda_1 X_1 + \cdots + \lambda_k X_k \neq 0;$$

*ovvero*

$$\lambda_1 X_1 + \cdots + \lambda_k X_k = 0;$$

*se e solamente se $\lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0$.*

**Esempio 1.38.** *Siano $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \cdots, e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$. È facile verificare che $(e_1, \dots, e_n)$ sono linearmente indipendenti e che ogni vettore $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^n$ è combinazione lineare di $e_1, \dots, e_n$. Infatti*

$$X = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n.$$

Una semplice ma importante relazione fra combinazione lineare e dipendenza lineare è data dalla seguente proposizione.

**Proposizione 1.39.** *$X_1, \dots X_k \in \mathbb{C}^n$ sono linearmente dipendenti se e solo se uno di essi è combinazione lineare degli altri.*

*Dimostrazione.* Sia $\lambda_1 X_1 + \cdots + \lambda_k X_k = 0$ con $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ non tutti nulli. Supponiamo che $\lambda_j \neq 0$. Allora

$$X_j = -\lambda_j^{-1}(\lambda_1 X_1 + \cdots + \lambda_{j-1} X_{j-1} + \lambda_{j+1} X_{j+1} + \cdots \lambda_k X_k).$$

Viceversa se

$$X_j = \lambda_1 X_1 + \cdots + \lambda_{j-1} X_{j-1} + \lambda_{j+1} X_{j+1} + \cdots \lambda_k X_k,$$

Allora

$$\lambda_1 X_1 + \cdots + \lambda_{j-1} X_{j-1} - X_j + \lambda_{j+1} X_{j+1} + \cdots \lambda_k X_k = 0.$$

□

**Osservazione 1.40.**

- *$X \in \mathbb{C}^n$ è linearmente indipendente se e solamente se $X \neq 0$.*

- *Due vettori di $\mathbb{C}^n$ sono linearmente dipendenti se e solamente se sono uno multiplo dell'altro;*
- $0, X_1, \dots, X_k$ *sono linearmente dipendenti;*
- *Se $\mathcal{B}$ è un insieme di elementi di $\mathbb{R}^n$ linearmente indipendenti, allora ogni sottoinsieme di $\mathcal{B}$ è costituito da elementi linearmente indipendenti;*
- *se $\mathcal{B}$ è un insieme costituito di elementi di $\mathbb{C}^n$ linearmente dipendenti, allora ogni sovrainsieme di $\mathcal{B}$ è costituito da elementi linearmente dipendenti.*

**Definizione 1.41.** *Lo spazio generato dai vettori $X_1, \dots, X_k \in \mathbb{C}^n$ è l'insieme di tutti vettori che si ottengono come combinazione lineari di $X_1, \dots, X_k$:*

$$\mathcal{L}(X_1, \dots, X_k) := \{\lambda_1 X_1 + \cdots + \lambda_k X_k \mid \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{C}\}$$

È facile provare che se $v, w \in \mathcal{L}(X_1, \dots, X_k)$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, allora $\lambda v + \mu w \in \mathcal{L}(X_1, \dots, X_k)$.

**Proposizione 1.42.** *I vettori $X_1, \dots, X_k \in \mathbb{C}^n$ sono linearmente dipendenti se e solamente se esiste $j \in (1, \dots, k)$ tale che*

$$X_j \in \mathcal{L}(X_1, \dots, X_{j-1}, X_{j+1}, \dots, X_k)$$

In $\mathbb{C}^n$ possiamo definire il prodotto *Hermitiano canonico*:

$$(Z = \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}, W = \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}) \mapsto \langle Z, W \rangle = z_1 \overline{w_1} + \cdots + z_n \overline{w_n}$$

**Proposizione 1.43.** *Siano $Z, W, U \in \mathbb{C}^n$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Allora*

*a)* $\langle Z, W \rangle = \overline{\langle W, Z \rangle}$. $\langle Z, Z \rangle \geq 0$ *e l'uguaglianza vale se e solamente se* $Z = 0$*;*

*b)* $\langle Z + W, U \rangle = \langle Z, U \rangle + \langle W, U \rangle$*;*

*c)* $\langle U, Z + W \rangle = \langle U, Z \rangle + \langle U, W \rangle$*;*

*d)* $\langle \lambda Z, W \rangle = \lambda \langle Z, W \rangle$*;*

*e)* $\langle Z, \lambda W \rangle = \overline{\lambda} \langle Z, W \rangle$.

Sia $X$ un vettore. Chiameremo *norma* o *lunghezza* di $X$ il numero reale $\| X \|= \sqrt{\langle X, X\rangle}$. Dunque se $X \neq 0$, allora $\| X \|> 0$. Chiamaremo *distanza* fra due vettori $X, Y$ il numero non negativo $\| X - Y \|$. Quindi la lunghezza di un vettore è la distanza dall'origine 0. Inoltre vale la seguente disuguaglianza.

**Teorema 1.44** (Disuguaglianza di Cauchy-Schwartz)**.**

$$|\langle Z, W\rangle| \leq \| Z \| \| W \|,$$

*dove* $\| Z \|:= \sqrt{\langle Z, Z\rangle}$, *e l'uguaglianza vale se e solamente se* $Z$ *e* $W$ *sono proporzionali.*

*Dimostrazione.* Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Se $Z = 0$, allora la disuguaglianza è banalmente verificata. Supponiamo che $Z \neq 0$. Allora

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle \alpha Z + \beta W, \alpha Z + \beta W\rangle \\ &\leq |\alpha|^2 \langle Z, Z\rangle + |\beta|^2 \langle W, W\rangle + \alpha\overline{\beta}\langle Z, W\rangle + \overline{\alpha}\beta\langle W, V\rangle \\ &. \end{aligned}$$

Se poniamo $\alpha = -\langle W, Z\rangle$ e $\beta = \langle Z, Z\rangle$, otteniamo

$$|\langle Z, W\rangle|^2 \langle Z, Z\rangle + \langle Z, Z\rangle^2 \langle W, W\rangle - 2\langle Z, Z\rangle |\langle Z, W\rangle|^2 \geq 0,$$

ovvero, dividendo per $\langle Z, Z\rangle$, si ha

$$|\langle Z, W\rangle|^2 \leq \langle Z, Z\rangle \langle W, W\rangle.$$

□

**Definizione 1.45.** *Siano* $X, Y \in \mathbb{C}^n$. *Diremo che* $X$ *e* $Y$ *sono vettori ortgonali se* $\langle X, Y\rangle = 0$.

**Proposizione 1.46.** *Siano* $X_1, \dots X_k \in \mathbb{C}^n$ *non nulli e ortogonali a due a due. Allora i vettori* $X_1, \dots, X_k$ *sono linearmente indipendenti.*

Sia $S$ un sottoinsieme di $\mathbb{C}^n$. Indicheremo con $S^\perp$ l'insieme di tutti i vettori di $\mathbb{C}^n$ ortogonali a tutti i vettori di $S$: ovvero

$$S^\perp := \{X \in \mathbb{C}^n : \langle X, s\rangle = 0 \ \forall s \in S\}.$$

È facile provare che se $v, w \in S^\perp$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, allora $\lambda v + \mu w \in S^\perp$.

**Proposizione 1.47.** *Sia* $S = \mathcal{L}(v_1, \dots, v_k)$. *Allora*

$$S^\perp = \{v \in \mathbb{C}^n : \langle v, v_1 \rangle = \cdots = \langle v, v_k \rangle = 0\}$$

*Dimostrazione.* Sia $S' = \{v \in \mathbb{C}^n : \langle v, v_1 \rangle = \cdots = \langle v, v_k \rangle = 0\}$. Vogliamo dimostrare che $S^\perp = S'$. Poiché $S^\perp \subset S'$ è sufficiente dimostare che $S' \subset S^\perp$. Sia $w \in S'$. Vogliamo dimostrare che

$$\langle w, s \rangle = 0, \ \forall s \in S.$$

Se $s \in \mathcal{L}(v_1, \dots, v_k)$, allora esistono $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{C}$ tali che

$$s = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k$$

Allora

$$\begin{aligned} \langle w, s \rangle &= \langle w, \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k \rangle \\ &= \overline{\alpha}_1 \langle w, v_1 \rangle + \cdots + \overline{\alpha}_k \langle w, v_k \rangle \\ &= 0 \text{ (essendo } w \in S') \end{aligned}$$

da cui segue che $w \in S^\perp$. $\square$

# Capitolo 2

# Matrici

## 2.1 Matrici

**Definizione 2.2.** *Una matrice, reale o complessa, di formato $m \times n$ è una tabella rettangolare di numeri reali oppure complessi con $m$ righe e $n$ colonne. Quindi $mn$ elementi del tipo:*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}},$$

*dove $a_{ij} \in \mathbb{R}$ oppure $a_{ij} \in \mathbb{C}$.*

Due matrici $A$ e $B$ sono uguali se e solamente se hanno lo stesso formato e vale $a_{ij} = b_{ij}$ per ogni $1 \leq i \leq m$, e $1 \leq j \leq n$. L'insieme delle matrici reali di formato $m \times n$, rispettivamente complesse, sarà indicato con $M_{m\times n}(\mathbb{R})$, rispettivamente $M_{m\times n}(\mathbb{C})$. Si osservi inoltre che $M_{m\times 1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^m$ e $M_{m\times 1}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^m$ rispettivamente. Sia $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ dove $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oppure $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Allora

$$A^1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \ldots, A^n = \begin{bmatrix} a_{n1} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

sono le colonne di $A$; analogamente

$$A_1 = [a_{11}, \cdots, a_{1n}], \ \ldots \ , A_m = [a_{m1}, \ldots, a_{mn}],$$

sono le righe di $A$. Si osservi che $A^j \in \mathbb{K}^m$. Possimo quindi pensare ad una matrice come $A = (A^1, \ldots, A^n)$ oppure come $A = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix}$. Inoltre se

$n = m$, allora gli elementi di $M_{n\times n}(\mathbb{K})$ si dicono matrici quatrate di ordine $n$.

### 2.2.1 Struttura Lineare

Siano $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ e sia $\lambda \in \mathbb{K}$. Possiamo definire la somma e la moltiplicazione per scalare come segue:

$$A + B := (a + b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$$

$$\lambda A := (\lambda a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$$

**Proposizione 2.3.** *Dati $A, B, C \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ allora*

*a)* $A + (B + C) = (A + B) + C$*: proprierà associativa della somma;*

*b)* $A + B = B + A$*: proprietà commutativa della somma;*

*c) posto* $0 = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} = (0_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ *, allora* $0 + A = A + 0 = A$*;*

*d) se* $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$*, allora* $A+(-1)A = 0$*;* $-A := (-1)A$ *è detto opposto di* $A$*;*

*e)* $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$*;*

*f)* $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$*;*

*g)* $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A) = \mu(\lambda A)$*.*

Notazione: $A - B := A + (-1)B$. La trasposta di una matrice $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ è una matrice $A^t \in M_{n\times m}(\mathbb{K})$ così definita:

$$A^t = (a_{ji})_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq i \leq m}}$$

$A^t$ si ottiene a partire da $A$ scambiando le righe con le colonne; rispettivamente le colonne per le righe: ovvero

$$(A^t)^k = (A_k)^t;$$

$$(A^t)_m = (A^m)^t$$

**Proposizione 2.4.** *Siano $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ e sia $\lambda \in \mathbb{K}$. Allora* *a)* $(A+B)^t = A^t + B^t$ *;*

*b)* $(\lambda A)^t = \lambda A^t$*;*

*c)* $(A^t)^t = A$*.*

Concentriamoci sulle matrici quadrate a *coefficienti reali.* Una matrice $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ si dice *simmetrica* se $A = A^t$; *antisimmetrica* se $A = -A^t$. Se $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$ gli elementi $a_{11}, \cdots, a_{nn}$ si dicono gli elementi sulla *diagonale principale.* Una matrice $A$ si dice *diagonale* se tutti i coefficienti fuori dalla diagonale principale sono nulli: ovvero $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$ e $a_{ij} = 0$ se $i \neq j$. La *matrice identità di ordine* $n$, $\mathrm{Id}_n$, è la matrice diagonale che ha tutti gli elementi uguali ad 1 sulla diagonale principale. Si ossservi che le matrici diagonali sono simmetriche e che $A^t$ ha la stessa diagonale principale di $A$. Quindi gli elementi sulla diagonale principale di una matrice antisimmetrica sono tutti nulli. Una matrice $A$ si dice *triangolare superiore*, rispettivamente *triangolare inferiore*, se tutti gli elementi sotto la diagonale principale sono nulli, rispettivamente sopra la diagonale principale: ovvero

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} ,$$

con $a_{ij} = 0$ se $i > j$, rispettivamente $i < j$. Si osservi che sommando matrici diagonali si ottiene ancora un matrice diagonale; moltiplicando per uno scalare una matrice diagonale si ottiene ancora una matrice diagonale. Quindi l'insieme delle matrici diagonali è chiuso rispetto al prodotto per scalare e la somma; lo stesso vale per l'insieme delle matrici triangolari superiori, rispettivamente inferiori, per l'insieme delle matrici simmetriche, rispettivamente antisimmetriche.

La traccia di una matrice quadrata $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ è lo scalare $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii} \in \mathbb{K}$.

**Proposizione 2.5.** *Siano* $A, B$ *matrici quadrate di ordine* $n$ *e sia* $\lambda \in \mathbb{K}$. *Allora*

*a)* $\mathrm{Tr}(A+B) = \mathrm{Tr}(B+A)$*;*

*b)* $\mathrm{Tr}(\lambda A) = \lambda \mathrm{Tr}(A)$*;*

*c)* $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(A^t)$*;*

### 2.5.1 Prodotto di matrici

Date matrici $A \in M_{m\times p}(\mathbb{K})$ e $B \in M_{p\times n}(\mathbb{K})$, dove $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oppure $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, è possibile eseguire il prodotto $AB \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ chiamato prodotto righe per colonna, se il numero delle colonne di $A$ è uguale al numero delle righe di $B$.

$$M_{m\times p}(\mathbb{K}) \times M_{p\times n}(\mathbb{K}) \longrightarrow M_{m\times n}(\mathbb{K}).$$

Se

$$A = (a_{ij})_{\substack{1\,\leq\, j\,\leq\, m\\ 1\,\leq\, j\,\leq\, p}}$$

e

$$B = (b_{ij})_{\substack{1\,\leq\, i\,\leq\, p\\ 1\,\leq\, j\,\leq\, m}}$$

allora

$$AB = C = (c_{ij})_{\substack{1\,\leq\, i\,\leq\, m\\ 1\,\leq\, j\,\leq\, n}}\ ,$$

dove $c_{ij} = \sum_{m=1}^{p} a_{im}b_{mj}$. Si osservi che $c_{ij} = \langle (A_i)^t, B^j\rangle$. Le colonne della matrice $AB$ sono $(AB)^k = AB^k$ mentre le righe $(AB)_k = A_kB$. Può succedere che $AB$ sia definita mentre $BA$ non sia definita; come possano essere tabelle di dimensioni differenti. Per esempio se $A \in M_{n\times m}(\mathbb{K})$ e $B \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, con $n \neq m$, allora $AB$ e $BA$ non sono confrontabili. Se consideriamo solo matrici quadrate dello stesso ordine allora il prodotto righe per colonne produce matrici dello stesso ordine; tuttavia è facile verificare che in generale il prodotto non è commutativo: ovvero esistono matrici $A, B$ tali che $AB \neq BA$. Inoltre è possibile che $AB = 0$ benché $A$ e $B$ non siano nulle.

Se $A$ è una matrice quadrata di ordine $n$ e $p$ un numero naturale, allora possiamo definire $A^p$ come il prodotto di $A$ $p$ volte, ovvero $\underbrace{A\cdots A}_{p}$ se $p \neq 0$; altrimenti $A^0 = \mathrm{Id}_{n\times n}$

**Esempio 2.6.** $A = \begin{bmatrix} 0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}$. *Allora* $AB = \begin{bmatrix} 0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$, $BA = \begin{bmatrix} 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ *e* $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$

Per il prodotto di matrici valgono le seguenti proprietà.

**Proposizione 2.7.** *Sia* $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, $B, C \in M_{n\times p}$, $D \in M_{p\times q}$ *e* $\lambda \in \mathbb{K}$. *Allora*

*a)* $A\,\mathrm{Id}_n = A$ *e* $\mathrm{Id}_nB = B$;

*b)* $A(BC) = (AB)C$;

*c)* $A(B + C) = AB + AC$;

*d)* $(B + C)D = BD + CD$;

*e)* $A(\lambda B) = (\lambda A)B = \lambda(AB)$;

*f)* $(AB)^t = B^t A^t$.

**Proposizione 2.8.** *Sia* $A \in M_{m\times p}(\mathbb{K})$ *e* $B \in M_{p\times m}(\mathbb{K})$. *Allora* $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.

*Dimostrazione.*

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(AB) &= \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{p} a_{kj}b_{jk} = \sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{m} b_{kj}a_{jk} \\ &= \mathrm{Tr}(BA).\end{aligned}$$

□

### 2.8.1 $M_{m\times n}(\mathbb{R})$: Struttura metrica

Siano $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Definiamo $\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}(AB^t)$.

**Proposizione 2.9.** *Se* $A, B, C \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ *e* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, *allora*

*(a)* $\langle A, A\rangle \geq 0$ *con uguaglianza se e solamente se* $A = 0$;

*(b)* $\langle \lambda A + \mu B, C\rangle = \lambda\langle A, C\rangle + \mu\langle B, C\rangle$;

*(c)* $\langle A, B\rangle = \langle B, A\rangle$;

*(d)* $\langle C, \lambda A + \mu B\rangle = \lambda\langle C, A\rangle + \mu\langle C, B\rangle$.

Esattamente come nel caso di $\mathbb{R}^m$ possiamo dimostrare la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz:

$$|\mathrm{Tr}(AB^t)| \leq \sqrt{\mathrm{Tr}(AA^t)}\sqrt{\mathrm{Tr}(BB^t)}$$

e l'uguaglianza vale solo se $A = \lambda B$. Sia $A$ un matrice di $m\times n$. Chiameremo *norma* o *lunghezza* di $A$ il numero reale $\| A \| = \sqrt{\langle A, A\rangle}$. Dunque se $A \neq 0$, allora $\| A \| > 0$. Chiamaremo *distanza* fra le due matrici $A, B$ il numero non negativo $\| A - B \|$. Quindi la lunghezza di una matrice è la distanza dall'origine 0.

**Definizione 2.10.** *Sianp $A, B$ due matrici non nulle. Definiamo l'angolo fra $A$ e $B$ come l'unico valore $\theta \in [0, \pi]$ tale che*

$$\cos\theta = \frac{\langle A, B\rangle}{\| A \| \| B \|}.$$

Diremo che due matrici sono ortogonali se il loro prodotto scalare è nullo. Inoltre l'angolo fra $A$ e $B$ è acuto (rispettivamente ottuso) se e solamente se $\langle A, B\rangle > 0$ (rispettivamente $\langle A, B\rangle < 0$).

## 2.11 Matrici invertibili

**Definizione 2.12.** *Una matrice $A$ quadrata di ordine $n$ si dice invertibile se esiste un matrice $B$ quadrata di ordine $n$ tale che $AB = BA = \mathrm{Id}_n$.*

**Proposizione 2.13.**

*a) esistono matrici diverse da zero che non sono invertibili;*

*b) se $A$ è invertibile esiste una unica $B$ tale che $AB = BA = \mathrm{Id}_n$. $B$ si dice l'inversa di $A$ e si pone $B = A^{-1}$;*

*c) $(A^{-1})^{-1} = A$*

*d) se $A$, $B$ sono matrici invertibili, tali sono $AB$ e $BA$ e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, $(BA)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$.*

*e) se $A$ è invertibile, allora $A^t$ è invertibile e la sua iversa è $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.*

*Dimostrazione.* Sia $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Allora $A^2 = 0$. Se esistesse $B$ tale che $AB = \mathrm{Id}_n$, allora

$$0 = A^2B = A(AB) = A,$$

assurdo. Le altre proprietà sono di facile verifica. $\square$

**Osservazione 2.14.** *Si può dimostrare che se $A, B$ sono matrici quadrate tale che $AB = \mathrm{Id}_n$, allora $A$ è invertibile e $B$ è l'inversa di $A$.*

La proposizione anteriore afferma che il prodotto di matrici invertibili è invertibile. Quindi l'insieme $GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) : A \text{ è invertibile } \}$ rispettivamente $GL(n, \mathbb{C}) = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) : A \text{ è invertibile}\}$ è *gruppo non commutativo*, detto gruppo lineare generale.

**Definizione 2.15.** *Sia $A, B$ due matrici quadrate di ordine $n$. Diremo che $A$ e $B$ sono simili se esiste $P$ matrice invertibile tale che $A = P^{-1}BP$.*

È immediato verificare che la similitudine è una relazione di equivalenza e che due matrici simili hanno la stessa traccia. Il viceversa non è vero; esistono matrici che hanno la stessa traccia ma non sono simili. Per esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \ \mathrm{Id}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

hanno la stessa traccia ma non sono simili poiché, in generale, vale $P^{-1}\mathrm{Id}_n P = \mathrm{Id}_n$.

**Definizione 2.16.** *Una matrice $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ quadrata di ordine $n$ a coefficienti reali si dice* ortogonale *se $A^t = A^{-1}$: ovvero $AA^t = A^tA = \mathrm{Id}_n$*

Se $A = (A^1, \dots, A^n)$, allora $A$ è ortogonale se e solamente se i vettori $A^k \in \mathbb{R}^n$ *sono a due a due ortogonali e di norma* 1. Infatti $A^tA = (c_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$, $c_{ij} = \langle A^i, A^j \rangle = \delta_{ij}$. Quindi se $i \neq j$, allora $\langle A^i, A^j \rangle = 0$ mentre se $i = j$ otteniamo $\langle A^i, A^i \rangle = \parallel A^i \parallel^2 = 1$. Inoltre il prodotto di matrici ortogonali è ancora ortogonale; come la matrice inversa di una matrice ortogonale è una matrice ortogonale.

## 2.17 Determinante

Ad ogni matrice quadrata $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$, dove $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oppure $\mathbb{C}$, possiamo associare un scalare, chiamato il *determinante di $A$*, definito come segue: se $A = (a) \in M_{1\times 1}(\mathbb{K})$, allora $\det(A) = a$. Supponiamo di averlo definito per matrici di ordine $n-1$. Definiamo

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} a_{j1} \det(A_{j1}) \in \mathbb{K},$$

dove $A_{j1}$ è una matrice di ordine $n-1 \times n-1$ che si ottiene da $A$ eliminando la 1 colonna e la $j-$esima riga. Questa formula è detta lo sviluppo di Laplace secondo la prima colonna. È facile verificare che il determinante di una matrice triangolare superiore è il prodotto degli elementi sulla diagonale principale.

**Proprietà**

1 $\det(A) = \det(A^t)$;

2 $A = (A^1, \dots, A^n)$. Allora $\det(A^1, \dots, \lambda A^i, \dots, A^n) = \lambda \det(A^1, \dots, A^n)$, per ogni $1 \leq i \leq n$ e per ogni $\lambda \in \mathbb{K}$, i.e., det è omogeneo su ogni colonna;

3 $\det(A^1, \dots, A^i{+}B^i, \dots, A^n) = \det(A^1, \dots, A^n){+}\det((A^1, \dots, B^i, \dots, A^n)$, per ogni $1 \leq i \leq n$, i.e., è additivo su ogni colonna;

4 $\det(A) = 0$ se due colonne sono uguali;

5 dalla [2] segue che $\det(A) = 0$ se ha una colonna fatta tutta da zeri;

6 [3] e [4] implicano che il determinante di una matrice cambia di segno se si scambiano due colonne qualunque;

7 [3] e [2] implicano che il valore del determinante non cambia sommando ad una colonna un multiplo di un altra colonna. Ovvero, se $A = (A^1, \dots, A^n)$ allora $\det(A) = \det(A^1, \dots, A^i + \lambda A^j, \dots, A^n)$.

**Osservazione 2.18.**

- *da [1] segue che il determinante di una matrice triangolare inferiore è il prodotto degli elementi sulla diagonale principale,*
- $\det(\mathrm{Id}_n) = 1$*;*
- $[1], \dots, [7]$ *valgano anche per le righe;*
- *il determinante si può sviluppare secondo un qualsiasi riga oppure colonna. Ovvero, rispetto alla $k-$esima colonna*

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+k} a_{jk} \det(A_{jk}),$$

*oppure rispetto alla $k-$esima riga*

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+k} a_{kj} \det(A_{kj}),$$

**Teorema 2.19** (Binet)**.** $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

**Corollario 2.20.** *Se $A$ è una matrice ortogonale, allora* $|\det(A)| = 1$

*Dimostrazione.* Sia $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ una matrice ortogonale. Allora $AA^t = 1$. Applicando il teorema di Binet, otteniamo

$$1 = \det(A)\det(A^t) = [\det(A)]^2,$$

poiché $\det(A) = \det(A^t)$, da cui segue la tesi. □

**Corollario 2.21.** *Una matrice $A$ è invertibile se e solamente se* $\det(A) \neq 0$. *Inoltre* $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

*Dimostrazione.* Se $A$ è invertibile, allora esiste $A^{-1}$ tale che $AA^{-1} = \mathrm{Id}_n$. Applicando la formula di Binet si ottiene che

$$\det(A)\det(A^{-1}) = 1,$$

da cui segue $\det(A) \neq 0$ e $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$. Viceversa, supponiamo che $\det(A) \neq 0$. Definiamo la matrice $B$ come

$$b_{ij} = (-1)^{i+j}\det(A_{ji})/\det(A),$$

dove $A_{ji}$ è la matrice che ottengo da $A$ elinindao la $j$-esima riga e le $i$-esima colonna. Vogliamo dimostrare che $AB = BA = \mathrm{Id}_n$.

$$(AB)_{\alpha\beta} = \sum_{m=1}^{n}(-1)^{\beta+m}a_{\alpha m}\det(A_{\beta m})/det(A),$$

se $\alpha \neq \beta$ il termine

$$\sum_{m=1}^{n}(-1)^{\beta+m}a_{\alpha m}\det(A_{\beta m})$$

coincide con lo sviluppo di laplace secondo la $\alpha-$esima riga della matrice

$$\begin{bmatrix} A^1 \\ \vdots \\ A_\alpha \\ \vdots \\ A_\alpha \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}$$

le cui $\alpha$-esime e $\beta$-esime righe coincidono con $A^\alpha$. Quindi $b_{\alpha\beta} = 0$ se $\alpha \neq \beta$. Invece, se $\alpha = \beta$, allora

$$\sum_{m=1}^{n} (-1)^{\alpha+m} a_{\alpha m} \det(A_{\alpha m})$$

è esattamente lo sviluppo di Laplace rispetto alla $\alpha$-esima riga. Quindi

$$(AB)_{\alpha\alpha} = \sum_{m=1}^{n} (-1)^{\alpha+m} a_{\alpha m} \det(A_{\alpha m}) / \det(A) = \det(A) / \det(A) = 1.$$

Analogamente si dimostra che $BA = \mathrm{Id}_n$. $\square$

### 2.21.1 Matrici complesse

$A \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$. Se $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$, definiamo:

$$\overline{A} = (\overline{a}_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}},$$

$$A^* = (\overline{a}_{ji})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} = (\overline{A})^t = \overline{(A^t)}$$

**Proposizione 2.22.** *Siano $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$, $C \in M_{n\times q}(\mathbb{C})$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Allora*

*a)* $(A + B)^* = A^* + B^*$;

*b)* $(\lambda A) = \overline{\lambda} A^*$;

*c)* $(A^*)^* = A$;

*d)* $(AC)^* = C^* A^*$.

*Inoltre se $A$ è una matrice quadrata, allora se $A$ è invertibile anche $A^*$ è invertibile ed $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.*

È facile verificare che $\det(\overline{A}) = \overline{\det(A)}$. Quindi una matrice complessa $A$ è invertibile se e solamente se $\overline{A}$ è invertibile.

**Definizione 2.23.** *Una matrice $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ è chiamata: hermitiana (autoggiunta) se $A^* = A$; antihermitiana (antiautoggiunta) se $A^* = -A$; unitaria se $AA^* = A^*A = Id_n$.*

**Proposizione 2.24.** *Sia $A$ una matrice unitaria. Allora* $|\det(A)| = 1$.

*Dimostrazione.*

$$1 = \det(A)\det(A^*) = \det(A)\overline{\det(A)} = |\det(A)|^2$$

□

Se $A = (A^1, \dots, A^n) \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$, allora $A$ è unitaria se e solamente se le colonne $A^1, \dots, A^n$ sono vettori non nulli, ortogonali a due a due e di norma unitaria rispetto al prodotto Hermitiano canonico.

## 2.25 Rango di matrici

Sia $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ dove $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oppure $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Un minore di ordine $p$ di $A$ è una matrice di $p \times p$ che si ottiene cancellando $m-p$ righe e $n-p$ colonne dalla matrice $A$. Diremo che il *rango per minori* $rg(A) = r$ se

a) $\exists$ un minore di $A$ di ordine $r$ determinante $\neq 0$;

b) tutti i minori di ordine $r+1$ sono nulli;

Si osservi che $rg(A) \leq \min(m, n)$. Sia $A'$ una matrice quadrata di $A$ ottenuta cancellando $m-p$ righe e $n-p$ colonne dalla matrice $A$. Se ad $A'$ aggiungiamo un altra riga ed un altra colonna di $A$ diremo che stiamo orlando $A'$.

**Teorema 2.26** (orlati)**.** *Il rango per minori della matrice $A$ è uguale ad $r$ se e solamente se esiste una sottomatrice $A'$ di ordine $r$ non singolare e tutte le sottomatrici di $A$ di ordine $r+1$, che si ottengono orlando $A'$ hanno determinante nullo.*

**Corollario 2.27.** *$A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ è non singolare, i.e., $\det(A) \neq 0$ se e solamente se $rg(A) = n$.*

**Teorema 2.28.** *Sia $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ dove $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oppure $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Il rango per minori di $A$ coincide con il numero massimo delle sue colonne (righe) linearmente indipendenti. In particolare $rg(A) = rg(A^t)$.*

# Capitolo 3

# Matrici e sistemi lineari

## 3.1 Sistemi lineari

Studiando i sistemi lineari, i problemi principali che vogliamo risolvere sono: quando un sistema ammette soluzioni; se lo ammette, quante sono; come si trovano. In questa sezione con $\mathbb{K}$ intendiamo $\mathbb{R}$ oppure $\mathbb{C}$. La forma generale di un sistema di $m$ equazioni in $n$-incognite:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right. \tag{3.1}$$

I termini $b_1, \ldots b_m$ sono i termini noti, $(a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ i coefficienti del sistema, $x_1, \ldots x_n$ le incognite, o variabili, del sistema lineare. Se tutti i termnini noti sono uguali a zero, il sistema si dice omogeneo.

**Definizione 3.2.** *Una soluzione del sistema (3.1 ) è una $n-$pla di numeri $v_1, \ldots v_n$ che sostituiti ordinatamente alle incognite $x_1, \ldots, x_n$ soddisfano le equazioni del sistema.*

Scriviamo un sistema lineare in forma matriciale. Sia

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}, \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Allora il sistema lineare ha la forma

$$AX = b, \tag{3.2}$$

dove $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ è chiamata *matrice incompleta* oppure *matrice dei coefficienti*, $b$ vettore dei termini noti ed infine $X$ vettore delle incognite. La matrice $(A|b) \in M_{m\times n+1}(\mathbb{K})$ che si ottiene aggiungendo ad $A$ il vettore dei termini noti, si chiama la *matrice completa*. In questo linguaggio, l'insieme delle soluzioni

$$Sol(A|b) = \{X \in \mathbb{K}^n : \ AX = b\}.$$

Un sistema lineare $AX = b$ si dice *compatibile* se $Sol(A|b) \neq \emptyset$; incompatibile altrimenti.

**Osservazione 3.3.**

- *Un sistema lineare omogeneo è sempre compatibile o risolubile poiché ammette sempre come soluzione il vettore nullo* $0 \in \mathbb{K}^n$*.*
- *Sia* $A = (A^1, \dots A^n)$ *la matrice incompleta. Se* $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$*, allora* $AX = x_1A^1 + \cdots + x_nA^n$*. Quindi il sistema* $AX = b$ *è compatibile se e solamente se* $b \in \mathcal{L}(A^1, \dots, A^n)$*.*

Dato un sistema lineare $AX = b$, possiamo associargli un sistema lineare omogeneo: $AX = 0$.

**Teorema 3.4** (teorema di struttura)**.** *Sia* $AX = b$ *un sistema lineare compatibile. Sia* $X_o$ *una soluzione particolare del sistema* $AX = b$*. Allora ogni altra soluzione del sistema lineare* $AX = b$ *è della forma* $X_o + W$*, dove* $W$ *è una soluzione del sistema lineare omogeneo associato* $AX = 0$*. Quindi*

$$Sol(A|b) = \{X_o + X, \ X \in Sol(A|0)\}.$$

*Dimostrazione.* Indichiamo con $E = \{X_o + X, \ X \in Sol(A|0)\}$. Vogliamo dimostrare che $E = Sol(A|b)$. Sia $Y \in sol(A|b)$. Allora $A(Y - X_o) = AX - AX_o = b - b = 0$, ovvero $Y - X_o$ è soluzione del sistema lineare omogeneo ssociato da cui segue che $Y - X_o \in Sol(A|0)$, cioé $Y = X_o + X$ per un certo $X \in Sol(A|0)$. Quindi $Sol(A|b) \subset E$. Viceversa, consideriamo un elemento di $E$: il quale sarà della forma $X_o + W$ dove $W$ è una soluzione del sistema lineare omogeneo associato. Allora

$$A(X_o + W) = AX_o + AW = b + 0 = b,$$

da cui segue che $E \subset Sol(A|0)$. Quindi $Sol(A|b) = \{X_o + X, \ X \in Sol(A|0)\}$. □

Dati due sistemi lineari $AX = b$ e $A'X = c$, diremo che hanno lo stesso ordine se $A, A' \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$.

**Definizione 3.5.** *Due sistemi lineari dello steso ordine si dicono* equivalenti *se hanno le stesse soluzioni.*

**Lemma 3.6.** *Sia $AX = c$ un sistema lineare contente le equazioni*

$$\begin{array}{c} a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = a \\ b_1x_1 + \cdots + b_nx_n = b \end{array} .$$

*Sia $BX = \tilde{c}$ il sistema lineare ottenuto sostituendo in $AX = b$ l'equazione*

$$h(a_1x_1 + \cdots a_nx_n) + k(b_1x_1 + \cdots b_nx_n) = ha + kb$$

*all'equzione*

$$b_1x_1 + \cdots + b_nx_n = b \ ,$$

*dove $h, k \in \mathbb{K}$ con $k \neq 0$. Allora i sistemi $AX = c$ e $BX = \tilde{c}$ sono equivalenti.*

**Definizione 3.7.** *Dato un matrice $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ si chiamano operazioni elementari di riga:*

*a) scambiare di posto due righe;*

*b) sommare ad una riga un multiplo di un altra;*

*c) moltiplicare una riga per uno scalare non nullo.*

**Corollario 3.8.** *Sia $AX = b$ un sistema lineare ed indichiamo con $(A|b)$ la matrice completa. L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare non cambia quando si effettuano operazioni elementari sulla matrice completa.*

### 3.8.1 Sistemi triangolari superiori

Sia $AX = b$ un sistema lineare con $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$. Diremo che $AX = b$ è un sistema triangolare superiore se la matrice $A$ è triangolare superiore.

**Proposizione 3.9.** *Un sistema triangolare superiore ammette una ed una sola soluzione se e solamente se tutti gli elementi sulla diagonale principale sono non nulli.*

*Dimostrazione.* Dimostreremo solo che se il sistema è triangolare superiore ed gli elementi sulla diagonale principale sono tutti non nulli, allora il sistema ammette una ed una soluzione. Supponiamo che $AX = b$ sia un sistema triangolare superiore. L'ultima equazione è

$$a_{nn}x_n = b_n,$$

la quale ammette come unica soluzione $x_n = b_n/a_{nn}$. Consideriamo la penultima equazione:

$$a_{n-1n-1}x_{n-1} + a_{n-1n}x_n = b_{n-1},$$

che ammette una ed una soluzione

$$\begin{aligned} x_{n-1} &= b_{n-1}/a_{n-1n-1} - a_{n-1\,n}/a_{n-1n-1}x_n \\ &= b_{n-1}/a_{n-1n-1} - a_{n-1n}/a_{n-1n-1}b_n/a_{nn} \end{aligned}$$

e così via. Si noti che la dimostrazione fornisce un metodo per calcolare le soluzioni, che è chiamato la *risoluzione all'indietro*, di un sistema triangolare superiore.

**Osservazione 3.10.** *Se $AX = b$ è un sistema lineare triangolare superiore e gli elementi sulla diagonale principale non sono tutti nulli, allora il sistema è incompatibile oppure ammette infinite soluzioni.*

□

### 3.10.1 Sistemi ridotti a scala

Una matrice di ordine $m \times n$ siffatta

$$\left[\begin{array}{cccccccccccccc}
0 & \cdots & 0 & s_{1j_1} & * & * & \cdots & \cdots & * & \cdots & \cdots & \cdots & * & * \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & s_{2j_2} & * & * & * & \cdots & \cdots & \cdots & * & * \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & s_{3j_3} & * & * & \cdots & \cdots & \cdots & * \\
\vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & * \\
\vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \ddots & \cdots & \cdots & * & * \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & s_{rj_r} & \cdots & \cdots & * \\
\hline
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & & & & & & & & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
\vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & & 0
\end{array}\right]$$

si dice un matrice ridotta a scala. I numeri $s_{1j_1}, \ldots, s_{r,j_r}$ sono non nulli e si chiamano *perni, pivot, elementi di testa.*

**Esempio 3.11.**

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{5\times 6}(\mathbb{R})$$

*I perni sono:* $s_{12} = 1$*,* $s_{24} = 1$ *ed* $s_{3,5} = 4$*.*

Se $S \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ una matrice ridotta a scala, allora $rg(S) = r$ ovvero al numero delle righe differenti da zero o equivalentemente al numero di perni. Infatti avendo solo le prime $r$ righe differenti da zero, allora $rg(S) \leq r$. Adesso, vogliamo dimostrare che le colonne $S^{j_1}, \ldots, S^{j_r}$ sono linearmente indipendenti. Sia $\alpha_1 S^{j_1} + \cdots + \alpha_r S^{j_r} = 0$ una combinazione lineare che mi da il vettore nullo. La matrice completa associata al sistema lineare omogeneo $\alpha_1 S^{j_1} + \cdots + \alpha_r S^{j_r} = 0$ è della forma

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} s_{1j_1} & * & \cdots & \cdots & * & 0 \\ 0 & s_{2j_2} & * & \cdots & * & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & s_{rj_r} & 0 \\ \hline 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Si osservi che il primo blocco $r \times r$ è una matrice triangolare superiore i cui elementi sulla diagonale sono tutti non nulli e che le ultime $m - r$ equazioni sono soddisfatte da cui segue che il sistema ammette una ed una sola soluzione; ovvero quella banale e le colonne $S^{j_1}, \ldots, S^{j_r}$ sono linearmente indipendenti. Quindi il $r \leq rg(S) \leq r$ da cui segue che $rg(S) = r$.

**Proposizione 3.12.** *Sia* $S \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ *una matrice ridotta a scala. Allora* $rg(S) =$ *numero di righe differenti da zero o equivalentemente al numero di perni di* $S$*.*

**Definizione 3.13.** *Un sistema* $SX = c$ *si dice ridotto a scala se la matrice* $S$ *è ridotta a scala.*

**Proposizione 3.14.** $SX = c$ *un sistema ridotto a scala, dove* $S \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$*, con* $rg(S) = r$*, ovvero la matrice ridotta a scala* $S$ *ha* $r$ *righe non nulle. Il* *sistema $SX = c$ è compatibile se e solamente se le ultime $m = r$, oppure le ultime $m - r$ coordinante del vettore $c$ sono nulle se e solamente se $(S|c)$ è ridotta a scala, se e solamente se $rg(S) = rg(S|c)$. Inoltre, le soluzioni, se esistano, dipendono da $n - r$ parametri.*

*Dimostrazione.* La condizione che le $m - r$ coordinante del vettore $c$ siano nulle è sicuramente necessaria. Dobbiamo dimostrare che questa condizione è anche sufficiente. Supponiamo che le ultime $m - r$ coordinate siano nulle. Allora la matrice completa è così siffatta.

$$\left[\begin{array}{cccccccccccccc|c}
0 & \cdots & 0 & s_{1j_1} & * & * & \cdots & \cdots & * & \cdots & \cdots & \cdots & * & * & c_1 \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & s_{2j_2} & * & * & * & \cdots & \cdots & \cdots & * & * & c_2 \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & s_{3j_3} & * & * & \cdots & \cdots & \cdots & * & c_3 \\
\vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & * & \vdots \\
\vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \ddots & \cdots & \cdots & * & * & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & s_{rj_r} & \cdots & \cdots & * & c_r \\
\hline
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & & & & & & & & & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
\vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & & & 0
\end{array}\right]$$

L'elemento $s_{rj_r}$ è differente di zero. Quindi possiamo scrivere la variabile

$$x_{j_r} = s_{rj_r}^{-1}\left(c_r - s_{rj_r+1}x_{j_r+1} - \cdots - s_{rn}x_n\right)$$

in funzione delle variabili $x_{j_r+1}, \ldots, x_n$. Analogamente,

$$x_{j_{r-1}} = s_{r-1j_{r-1}}^{-1}(c_{r-1} - s_{r-1j_{r-1}+1}x_{j_{r-1}+1} - \cdots - s_{r-1n}x_n)$$

e sostituendo ad $x_{j_r}$ il valore precedente, possiamo scrivere $x_{j_{r-1}}$ in funzione delle variabili $x_{j_{r-1}+1}, \ldots x_{j_r-1}, x_{j_r+1}, \ldots, x_n$; e così via. □

Questo metodo si chiama *il metodo della risoluzione all'indietro* il quale permette di determinare le variabili corrispondenti agli elementi di testa, $x_{j_1}, \ldots, x_{j_r}$, che chiameremo *variabili basiche* in funzione delle altre, che chiameremo *variabili libere*. Questo significa che le soluzioni dipendono da esattamente $n - r$ parametri, ovvero che una volta assegnato un valore alle variabili libere, le variabili basiche sono univocamente determinate.

**Teorema 3.15.** *Ogni matrice $A$ può essere ridotta in forma a scala mediante operazioni elementari sulle righe.*

*Dimostrazione.* Sia $A = (A^1, \dots, A^n)$.
**Passo 1**
sia $1 \leq j_1 \leq n$ il più piccolo intero affinché $A^{j_1} \neq 0$.
**Passo 2**
Se $a_{1j_1} \neq 0$ bene. Altrimenti scambio due righe in modo che $a_{1j_1} \neq 0$. Quindi la matrice $A$, dopo le precedenti operazioni elementari, ha la seguente forma:

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1j_1} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{mj_k} & \cdots \end{bmatrix}$$

Il mio obbiettivo è quello di arrivare ad una matrice i cui elementi sulla colonna $A^{j_1}$ sono tutti nulli tranne il primo. Quindi, se alla $k$-riga $A_k$, $k \geq 2$, gli sottraggo $-a_{kj_1}/a_{1,j_1}A_1$, ottengo, attraverso operazioni elementari sulle righe, la matrice:

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 - a_{2j_k}/a_{1j_1}A_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ A_m - a_{mj_1}/a_{1j_1}A_1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & \cdots & 0 & a_{1j_1} & * & \cdots & \cdots & * \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{2,j_1+1} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{mj_1+1} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{array}\right]$$

Quindi

$$A = \left[\begin{array}{cccc|ccc} 0 & \cdots & 0 & a_{1j_1} & * & \cdots & * \\ \hline \vdots & & \vdots & 0 & & & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & B & \\ \vdots & \cdots & 0 & 0 & & & \end{array}\right]$$

dove $B \in M_{m-1\times(n-(j_1+1))}(\mathbb{R})$. Se $B = 0$ oppure $A \in M_{1\times n}(\mathbb{R})$, allora ho finito. Altrimenti ripeto lo stesso procedimento per la matrice $B$. Dopo un numero finito di passi, arriviamo ad una matrice le cui ultime righe sono nulle; oppure in cui l'ultimo elemento di testa appartiene all'ultima riga. In entrambi i casi abbiamo ridotto a scala la matrice di partenza $A$. □

**Proposizione 3.16.** *Il rango di una matrice non cambia se si effetuano operazioni elementari sulle righe (colonne).*

**Corollario 3.17.** *Sia $A$ una matrice ed $S$ una sua riduzione a scala. Allora $rg(A) = rg(S)$, ovvero è uguale al numero di elementi di testa di una sua riduzione a scala; è uguale al numero di righe non nulle di una sua riduzione a scala.*

**Teorema 3.18** (Rouché-Capelli)**.** *Sia $AX = b$, un sistema lineare con $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$. Il sistema è compatibile se e solamente se $rg(A) = rg(A|b)$. In tal caso, le soluzioni dipendono da $n - rg(A)$ parametri*

*Dimostrazione.* Sia $(A|b)$ la matrice completa. Effettuamo operazioni elementari sulla matrice $(A|b)$ per ridurre $A$ a scala. Quindi otteniamo una matrice $(S|c)$ dove $S$ è ridotto a scala ed il sistema lineare $SX = c$ è un sistema lineare ridotto a scala equivalente al sistema $AX = b$. Quindi $SX = c$ è compatibile se solamente se le $rg(A) = r(S) = rg(S|b) = rg(A|b)$. La secondo parte del Teorema segue dal procedimento della risoluzione all'indietro. $\square$

**Osservazione 3.19.** *In generale* $rg(A|b) = \begin{cases} rg(A) \\ rg(A) + 1 \end{cases}$

**Corollario 3.20.** *Sia $AX = 0$ un sistema lineare omogeno con $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$. Il sistema $AX = 0$ ammette soluzioni non banali, se e solamente se $rg(A) < n$. In particolare se $m < n$, allora il sistema lineare $AX = 0$ ammette soluzioni non banali; se $m = n$, essendo $rg(A) = n$ se e solamente se $\det(A) \neq 0$, allora $AX = 0$ ammette soluzioni non banali se e solamente se $A$ è non singolare.*

### 3.20.1 Metodi di Calcolo

Siano $X_1, \ldots, X_k \in \mathbb{K}^n$ e siano $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{K}$. Allora

$$\alpha_1 X_1 + \cdots + \alpha_k X_k = 0,$$

se e solamente se

$$A \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{bmatrix} = 0,$$

dove $A$ è un matrice di ordine $n \times k$ le cui colonne sono $A = (X_1, \ldots, X_k)$, poiché

$$\alpha_1 X_1 + \cdots + \alpha_k X_k = A \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{bmatrix}.$$

Quindi $X_1, \dots X_k$ sono linearmente dipendenti se e solamente se il sistema $AX = 0$ ammette soluzioni non banali, se e solamente se $rg(A) < k$. Analogamente i vettori $X_1, \dots, X_k$ sono linearmente indipendenti se e solamente se il sistema $AX = 0$ ammette come soluzione solo quella banale, se e solamente se $rg(A) = k$.

Siano $X_1, \dots X_k \in \mathbb{K}^n$ e sia $Z \in \mathbb{K}^n$. Il vettore $Z$ è combinazione lineare di $X_1, \dots, X_k$, se e solamente se esistono $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ tali che

$$\alpha_1 X_1 + \cdots + \alpha_k X_k = Z,$$

se e solamente se il sistema lineare

$$AX = Z,$$

dove $A = (X_1, \dots, X_k)$, è compatibile, ovvero se e solamente se $rg(A) = rg(A|Z)$. Allora $\mathcal{L}(X_1, \dots X_k) = \mathbb{K}^n$ se e solamente se il rango matrice della matrice $(X_1, \dots, X_k)$ è uguale a $n$. Quindi $X_1, \dots X_n$ generano tutto lo spazio $\mathbb{K}^n$ se e solamente se $\det(X_1, \dots, X_n) \neq 0$. La stessa condizione vale per la lineare indipendenza, ovvero $X_1, \dots, X_n \in \mathbb{K}^n$ sono linearmente indipendenti se e solamente se sono un sistema di generatori.

### 3.20.2 Mutua posizione di rette e piani

Siano $r_1 : X = P_1 + tA_1$ e $r_2 : X = P_2 + tA_2$. $r_1$ ed $r_2$. Le due rette hanno punti in comune se esistono $s_1, t_1 \in \mathbb{R}$ tali che

$$P_1 + t_1 A_1 = P_2 + s_1 A_2,$$

se e solamente se

$$P_1 - P_2 = t_1 A_1 + s_1 A_2 = (A_1, A_2) \begin{bmatrix} t_1 \\ s_1 \end{bmatrix},$$

ovvero se e solamente se il sistema la cui matrice incompleta è $A = (A_1, A_2)$ è compatibile. Applicando Rouché-Capelli, otteniamo i seguenti casi:

a) $rg(A) = 1$, allora se $rg(A|P_1 - P_2) = 1$ le due rette sono coincidenti; se $rg(A|P - 1 - P_2) = 2$ le due rette sono parallele;

b) $rg(A) = 2$, allora se $rg(A|P_1 - P_2) = 2$, allora le due rette sono incidenti; se $rg(A|P_1 - P_2) = 3$, allora le due rette sono sghembe.

**Corollario 3.21.** *Le due rette $r$ ed $s$ sono sghembe se e solamente se*

$$\det(A_1, A_2, P_1 - P_2) \neq 0.$$

Consideriamo le due rette in forma cartesiana:

$$r = \begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z + = d' \end{cases},$$

$$s = \begin{cases} a''x + b''y + c''z = d'' \\ a'''x + b'''y + c'''z + = d''' \end{cases}$$

Se indichiamo con

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \\ a''' & b''' & c''' \end{pmatrix} \in M_{4\times 3}(\mathbb{R})$$

e con $h = \begin{bmatrix} d \\ d' \\ d'' \\ d''' \end{bmatrix}$, allora i punti di $r \cap s$ soddisfano il sistema lineare

$$AX = h,$$

dove $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$. Applicando Rouché-Capelli, otteniamo

a) $rg(A) = 2$. Se $rg(A|h) = 2$ il sistema è compatibile e le due rette sono coincidenti; se $rg(A|h) = 3$, allora il sistema è incompatibile e le due rette sono parallele;

b) $rg(A) = 3$. Se $rg(A|h) = 3$ il sistema è compatibile e le due rette sono incidenti; se $rg(A|h) = 4$, allora il sistema è incompatibile e le due rette sono sghembe;

**Corollario 3.22.** *Le due rette $r$ ed $s$ sono sghembe se e solamente se*

$$\det(A|h) \neq 0.$$

Consideriamo il caso di rette e piani. Siano

$$\pi : ax + by + cz = d$$

un piano nello spazio e

$$r = \begin{cases} a'x + b'y + c'z = d' \\ a''x + b''y + c''z = d'' \end{cases},$$

una retta nello spazio. $P \in r \cap \pi$ se e solamente se il sistema

$$AX = h$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$$

e

$$h = \begin{bmatrix} d \\ d' \\ d'' \end{bmatrix},$$

è compatibile. Applicando Rouché-Capelli, otteniamo:

a) $rg(A) = 2$. Se $rg(A|h) = 2$, allora il sistema è compatibile e la retta è contenuta nel piano; se $rg(A|h) = 3$, allora le retta è parallela al piano;

b) $rg(A) = 3$, allora anche $rg(A|h) = 3$ e quindi il piano $\pi$ e la retta $r$ sono incidenti.

**Corollario 3.23.** *la retta $r$ ed il piano $\pi$ sono incidenti se e solamente se* $\det(A) \neq 0$

# Capitolo 4

# Spazi vettoriali

## 4.1 Spazi Vettoriali

**Definizione 4.2.** *Uno spazio vettoriale $V$ su un campo $\mathbb{K}$ è un insieme su cui sono definite due operazioni: una di somma e un prodotto per scalare*

$$V \times V \longrightarrow V \qquad \mathbb{K} \times V \longrightarrow V$$

$$(v, w) \mapsto v + w \qquad (\lambda, v) \mapsto \lambda v,$$

*che soddifano alle seguenti proprietà: se $u, v, w \in V$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$, allora*

*a)* $u + (v + w) = (u + v) + w$;

*b)* $v + w = w + w$;

*c)* $\exists 0 \in V$ *such that* $0 + v = v + 0 = v$;

*d)* $\forall v \in V$, $\exists v' \in V$ *such that* $v + v' = v' + v = 0$;

*e)* $\lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w$;

*f)* $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$;

*g)* $\lambda(\mu v) = \mu(\lambda v) = (\lambda\mu)v$;

*h)* $1v = v$, *per ogni* $v \in V$;

*Gli elementi di $V$ si chiamano vettori.*

**Proposizione 4.3.**

- $\exists! 0 \in V$ *such that* $v + 0 = 0 + v = v$;

- $\forall v \in V \exists! v' \in V : v + v' = v' + v = 0$. $v' = (-1)v$ *e denoteremo* $v - w = v + (-1)w$;

**Esempio 4.4.**

- $\mathbb{R}^n$, $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ *sono spazi vettoriali su* $\mathbb{R}$;
- $\mathbb{C}^n, M_{m\times n}(\mathbb{C})$ *sono spazi vettoriali su* $\mathbb{C}$;
- $V = \{f : X \longrightarrow \mathbb{R}\}$. $(f+g)(t) = f(t) + g(t)$ *e* $(\lambda f)(t) = \lambda f(t)$;
- $\mathbb{R}[t]$ $(\mathbb{C}[t])$ *l'insieme dei polinomi a coefficienti reali (complessi) con le operazioni di somma e moltiplicazione per scalare definite come al punto precedente formano uno spazio vettoriale su* $\mathbb{R}$ *(rispettivamente su* $\mathbb{C}$*);*
- $\mathbb{R}_n[t]$ $(\mathbb{C}_n[t])$ *l'insieme dei polinomi di grado minore o uguale ad* $n$ *a coefficienti reali (complessi) con le operazioni di somma e moltiplicazione per scalare definite per i polonimi formano uno spazio vettoriale su* $\mathbb{R}$ *(rispettivamente su* $\mathbb{C}$*);*

## 4.5 Spazi e sottospazi vettoriali

Sia $V$ uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$. Per noi $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oppure $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

**Definizione 4.6.** *Un sottoinsieme* $W \subset V$ *si dice un sottospazio vettoriale di* $V$ *se*

- $\forall v, w \in W$, *allora* $v + w \in W$;
- $\lambda \in \mathbb{K}$ *e* $w \in W$, *allora* $\lambda w \in W$.

**Osservazione 4.7.** *Se* $W$ *è un sottospazio vettoriale di* $V$, *allora* $0 \in W$.

**Proposizione 4.8.** *Sia* $AX = 0$ *un sistema lineare omogeneo con* $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$. *Allora* $Sol(A|0) = \{X \in \mathbb{K}^n : AX = 0\}$ *è uno sottospazio vettoriale di* $\mathbb{K}^n$.

*Dimostrazione.* Sia $X, Y \in Sol(A|0)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Allora:

$$A(X+Y) = AX + AY = 0 + 0 = 0$$

e

$$A(\lambda X) = \lambda AX = \lambda 0 = 0.$$

$\square$

**Corollario 4.9.** *$Sol(A|b)$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^n$ se e solamente se $b = 0$.*

*Dimostrazione.* Se $b = 0$, allora abbiamo appena dimostrato che $Sol(A|0)$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^n$. Viceversa se $Sol(A|b)$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^n$, allora $0 \in Sol(A|0)$ da cui segue che $A0 = 0 = b$. $\square$

**Esempio 4.10.**

- *le matrici simmetriche, antisimmetriche, diagonali, triangolari superiori (inferiori), sono sottospazi vettoriali delle matrici quadrate;*
- *le matrici hermitiane e antihermitiane sono spazi vettoriali reali;*
- *$\mathbb{K}_n[t]$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}[t]$; in generale $\mathbb{K}_n[t]$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}_m[t]$ se $n \leq m$.*

**Definizione 4.11.** *Siano $v_1, \ldots, v_k \in V$. Si dice combinazione lineare di $v_1, \ldots, v_n \in V$ ogni elemento $w \in V$ esprimibile nella forma*

$$w = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_k v_k.$$

*I numeri $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ si dicono i coefficienti della combinazione lineare. L'insieme di tutte le combinazioni lineari di $v_1, \ldots, v_k$ verrà indicato con*

$$\mathcal{L}(v_1, \ldots, v_k) := \{\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k : \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{K}\}.$$

**Proposizione 4.12.** *$\mathcal{L}(v_1, \ldots, v_k)$ è un sottospazio vettoriale di $V$.*

*Dimostrazione.* Dobbiamo dimostrare che se $v, w \in \mathcal{L}(v_1, \ldots, v_k)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, allora $v + w \in \mathcal{L}(v_1, \ldots, v_k)$ e $\lambda v \in \mathcal{L}(v_1, \ldots, v_k)$. Se $v, w \in \mathcal{L}(v_1, \ldots, v_k)$, allora esistono $\alpha_1, \ldots \alpha_k$, rispettivamente $\beta_1, \ldots, \beta_k$, tali che $v = \alpha_1 v_1 + \ldots \alpha_k v_k$, rispettivamente $w = \beta_1 v_1 + \cdots \beta_k v_k$. Allora

$$v + w = (\alpha_1 + \beta_1)v_1 + \cdots + (\alpha_k + \beta_k)v_k \in \mathcal{L}(v_1, \ldots, v_k)$$

e

$$\lambda v = \lambda\alpha_1 v_1 + \cdots + \lambda\alpha_k v_k \in \mathcal{L}(v_1, \ldots, v_k).$$

$\square$

**Osservazione 4.13.** *Sia $W$ un sottospazio vettoriale di $V$ e siano $w_1, \ldots w_k \in W$. $W$ è chiuso rispetto alla somma e la moltiplicazione per scalare, ovvero*

$$\mathcal{L}(w_1, \ldots, w_k) \subset W.$$

**Definizione 4.14.** *Siano* $v_1, \dots v_k \in V$*. Diremo che:*

*a)* $v_1, \dots, v_k$ *sono* linearmente dipendenti *se esistono* $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ *non tutti nulli tali che*

$$\alpha_1 v_1 + \cdots \alpha_k v_k = 0;$$

*b)* $v_1, \dots, v_n$ linearmente indipendenti *se non sono linearmente dipendenti, ovvero se*

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k = 0,$$

*allora necessariamente* $\alpha_1 = \cdots \alpha_k = 0$*;*

*c)* $v_1, \dots, v_k$ *sono un* sistema di generatori *se* $\mathcal{L}(v_1, \dots, v_k) = V$ *e* $V$ *si dice* finitamente generato

**Osservazione 4.15.**

- *Sia* $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$*. Se* $v_1, \dots v_n$ *sono linearmente indipendenti, allora ogni sottoinsieme di* $\mathcal{B}$ *è costituito da vettori linearmente indipendenti. Se* $\mathcal{B}$ *è un insieme formato da vettori linearmente dipendenti, allora ogni sovrainsieme di* $\mathcal{B}$ *è costituito da vettori linearmente dipendenti;*

- *se* $w_1, \dots w_s \in \mathcal{L}(v_1, \dots, v_n)$*, allora* $\mathcal{L}(w_1, \dots, w_s) \subset \mathcal{L}(v_1, \dots, v_n)$*.*

**Proposizione 4.16.** *Siano* $v_1, \dots, v_n$ *vettori di* $V$*. I vettori* $v_1, \dots v_n$ *sono linearmente dipendenti se e solamente se uno di essi si scrive come combinazione lineare degli altri, ovvero, esiste* $1 \leq j \leq n$ *tale che*

$$v_j \in \mathcal{L}(v_1, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_n).$$

*Inoltre*

$$\mathcal{L}(v_1, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_n) = \mathcal{L}(v_1, \dots, v_n).$$

*Dimostrazione.* Sia $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k = 0$ con $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ non tutti nulli. Supponiamo che $\lambda_j \neq 0$. Allora

$$v_j = -\lambda_j^{-1}(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_{j-1} v_{j-1} + \lambda_{j+1} v_{j+1} + \cdots \lambda_k v_k).$$

Viceversa se

$$v_j = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_{j-1} v_{j-1} + \lambda_{j+1} v_{j+1} + \cdots \lambda_k v_k,$$

Allora

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_{j-1} v_{j-1} - v_j + \lambda_{j+1} v_{j+1} + \cdots \lambda_k v_k = 0.$$

□

**Definizione 4.17.** *Un insieme $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ si dice una base di $V$ se sono linearmente indipendenti ed un sistema di generatori.*

**Proposizione 4.18.** *Sia $V$ uno spazio vettoriale e sia $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base di $V$. Allora ogni vettore $v \in V$ si può scrivere in maniera unica come combinazione lineare dei vettori $v_1, \dots v_n$. Viceversa se ogni elemento si scrive in maniera unica come combinazione lineare di $v_1, \dots v_n$, allora $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ è una base di $V$.*

*Dimostrazione.* Sia $v \in V$. $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ è un sistema di generatori, allora esistono $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tale che

$$v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n.$$

Quindi dobbiamo dimostrare che tale combinazione lineare è unica. Supponiamo che

$$v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n.$$

Allora

$$0 = (\lambda_1 - \alpha_1) v_1 + \cdots + (\lambda_n - \alpha_n) v_n.$$

Essendo $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ linearmente indipendenti, ne segue che

$$\alpha_1 = \lambda_1, \dots, \alpha_k = \lambda_k.$$

Viceversa, se ogni elemento si scrive come combinazione lineare di $v_1, \dots v_n$, allora

$$\mathcal{L}(v_1, \dots, v_n) = V,$$

ovvero $v_1, \dots, v_n$ sono un sistema di generatori. Dall'unicità delle combinazione lineare si deduce che

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0,$$

allora necessariamente $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$, ovvero i vettori $v_1, \dots v_n$ sono anche linearmente indipendenti. □

**Definizione 4.19.** *Sia $v \in V$ e sia $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base di $V$. Le coordinate di $v$ rispetto a $\mathcal{B}$ sono gli unici scalari $x_1, \dots, x_n$ tali che*

$$v = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n.$$

*Indicheremo con* $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^n$ *le coordinate di $v$ rispetto a $\mathcal{B}$.*

**Osservazione 4.20.**

- $[v+w]_{\mathcal{B}} = [v]_{\mathcal{B}} + [w]_{\mathcal{B}}$;
- $[\lambda v]_{\mathcal{B}} = \lambda [v]_{\mathcal{B}}$.

*e l'applicazione*

$$\mathcal{F}_{\mathcal{B}} : V \longrightarrow \mathbb{K}^n \qquad v \mapsto [v]_{\mathcal{B}}$$

*è iniettiva e suriettiva. In particolare abbiamo:*

- $w_1, \dots, w_k \in V$ *sono linearmente dipendenti (indipendenti, generatori) se e solamente se* $[w_1]_{\mathcal{B}}, \dots, [w_k]_{\mathcal{B}} \in \mathbb{K}^n$ *sono linearmente dipendenti (indipendenti, generatori)*
- *Sia* $W = \mathcal{L}(w_1, \dots, w_k)$. *Allora* $W' = \mathcal{F}_{\mathcal{B}}(W)$ *è un sottospazio vettoriale di* $\mathbb{K}^n$ *e* $W' = \mathcal{L}(\mathcal{F}_{\mathcal{B}}(w_1), \dots, \mathcal{F}_{\mathcal{B}}(w_k))$.

### 4.20.1 Basi di spazio vettoriali

L'obbiettivo di questa sezione è quello di dimostrare che uno spazio vettoriale generato da un numero finito di elementi, ammette basi e che due basi qualsiasi hanno lo stesso numero di elementi.

**Lemma 4.21** (Steinitz)**.** *Sia* $V$ *uno spazio vettoriale su* $\mathbb{K}$ *generato da* $n$ *vettori,* $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$. *Siano* $\mathcal{C} = \{w_1, \dots, w_m\}$ *con* $m > n$. *Allora* $\mathcal{C} = \{w_1, \dots, w_m\}$ *è costituito da vettori linearmente dipendenti. In altre parole se* $V$ *è generato da* $n$ *elementi, ogni insieme di vettori linearmente indipendenti è formato da al più* $n$ *elementi.*

*Dimostrazione.* Vogliamo dimostrare che esistono $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ non tutti nulli tali che

$$\alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_m w_m = 0.$$

Lo spazio vettoriale $V = \mathcal{L}(v_1, \dots, v_n)$ da cui segue che ogni $w_i$ si scrive come combinazione lineare di $v_1, \dots, v_n$, ovvero

$$w_j = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} v_k.$$

Quindi $\alpha_1 w_1 + \cdots \alpha_m w_m = 0$ equivale a

$$0 = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{jk} \alpha_j v_j = \sum_{j=1}^{n} \big( \sum_{k=1}^{n} a_{jk} \alpha_j \big) v_j.$$

Consideriamo il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}\alpha_j = 0 \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj}\alpha_j = 0 \end{cases}$$

È un sistema di $m$ equazioni in $n$ incognite, con $n < m$. Per il Teorema di Rouché-Capelli il sistema ammette soluzioni non banali, ovvero i vettori $\mathcal{C} = \{w_1, \dots, w_m\}$ sono linearmente dipendenti. □

**Corollario 4.22.** *Sia $V$ uno spazio vettoriale e $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ un sistema di generatori di $V$. Se $\mathcal{C} = \{w_1, \dots, w_m\}$ sono vettori linearmente indipendenti, allora $m \leq n$.*

**Corollario 4.23.** *Se $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ è una base di $V$, allora ogni altra base di $V$ ha lo stesso numero di elementi.*

*Dimostrazione.* Sia $\mathcal{C} = \{w_1, \dots, w_m\}$ un altra base di $V$. In particolare sono linearmente indipendenti. Applicando il corollario anteriore ottengo che $m \leq n$. Scambinado il ruolo delle due basi, si prova che $n \leq m$. Quindi $n = m$. □

**Definizione 4.24.** *Sia $V$ uno spazio vettoriale generato da un numero finito di elementi. Il numero dei vettori di una base si dice dimensione di $V$ ed è anche il numero massimo di vettori di $V$ linearmente indipendenti.*

**Corollario 4.25.** *Sia $V$ uno spazio vettoriale di dimensione $n$. Sia $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ un insieme formata da $n$ vettori di $V$. Le seguenti condizioni sono equivalenti:*

*a)* $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ *è costituito da vettori linearmente indipendenti;*

*b)* $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ *formano un sistema di generatori;*

*c)* $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ *è una base di $V$.*

*Dimostrazione.* $(a) \Rightarrow (b)$. Sia $v \in V$. Poiché $n$ è il numero di massimo di vettori linearmente indipendeti, allora $v, v_1, \dots, v_n$ sono linearmente dipendenti. Quindi esistono $\alpha, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ non

$$\alpha v + \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0.$$

Se $\alpha = 0$, allora i vettori $v_1, \dots, v_n$ sarebbero linearmente dipendenti. Quindi, $\alpha \neq 0$ e $v = -\frac{\lambda_1}{\alpha} v_1 - \cdots - \frac{\lambda_n}{\alpha} v_n$, ovvero $v \in \mathcal{L}(v_1, \dots, v_n)$.

$(b) \Rightarrow (c)$. Se i vettori $v_1, \ldots, v_n$ non fossero linearmente indipendenti, allora esisterebbe una base formata da al massimo $n-1$ elementi. Assurdo. $(c) \Rightarrow (a)$ è immediata dalla definizione di base. $\square$

**Corollario 4.26.** *Sia $W = \mathcal{L}(v_1, \ldots, v_n) \subset V$. Allora esistono $1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq n$, tali che: $v_{j_1}, \ldots, v_{j_k}$ sono linearmente indipendenti e generano $W$, ovvero $W = \mathcal{L}(v_{j_1}, \ldots, v_{j_k})$; $\{v_{j_1}, \ldots, v_{j_k}\}$ è un sottoinsieme massimale di vettori linearmente indipendenti di $W$. In particolare $\{v_{j_1}, \ldots, v_{j_k}\}$ è un sottoinsieme massimale di vettori linearmente indipendenti di $\{v_1, \ldots, v_n\}$ e $\dim V = k$, ovvero la dimensione di $V$ è uguale al numero massimo di vettori linearmente indipendenti dell'insieme $\{v_1, \ldots v_n\}$.*

*Dimostrazione.* La dimostrazione sarà fatta per induzione su $n$. Se $n = 1$, il risultato è verificato. Supponiamo che sia vero per $n$ e dimostriamolo per $n+1$. Se $v_1, \ldots, v_{n+1}$ sono linearmente indipendenti, allora $\dim V = n+1$ e $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_{n+1}\}$ è una base di $V$. Altrimenti i vettori $v_1, \ldots v_{n+1}$ sarebbero linearmente dipendenti, e quindi uno di essi sarebbe combinazione lineare degli altri. Quindi $V$ sarebbe lo spazio generato da $n$ vettori e per ipotesi induttiva, esistono $1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq n+1$ tali che

$$V = \mathcal{L}(v_{j_1}, \ldots, v_{j_k}).$$

Per il lemma di Steinitz i vettori $v_{j_1}, \ldots, v_{j_k}$ sono un sottoinsieme massimale di vettori linearmente indipendenti di $V$ e quindi anche dell'insieme formato dai vettori $\{v_1, \ldots, v_{n+1}\}$. $\square$

**Esempio 4.27.**

*a)* *i vettori* $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$ *formano una base di* $\mathbb{R}^n$. *Quindi* $\dim \mathbb{R}^n = n$;

*b)* *i vettori* $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$ *formano una base di* $\mathbb{C}^n$. *Quindi* $\dim \mathbb{C}^n = n$;

*c)* *Sia $E_{ij} \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ la matrice i cui elementi sono tutti nulli tranne l'elemento $a_{ij} = 1$. È facile provare che $\mathcal{B} = \{E_{ij}, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ è una base di $M_{m \times n}(\mathbb{K})$. Quindi $\dim M_{m \times n}(\mathbb{K}) = mn$.*

*d) i polinomi* $\{1, t, \dots, t^n\}$ *formano una base di* $\mathbb{K}_n[t]$*. Quindi* $\dim \mathbb{K}_n[t] = n+1$.

**Lemma 4.28.** *Siano* $v_1, \dots v_n$ *vettori linearmente indipedenti di* $V$ *e sia* $v \in V$*. I vettori* $v, v_1, \dots v_n$ *sono linearmente indipendenti se e solamente se* $v$ *non appartiene a* $\mathcal{L}(v_1, \dots, v_n)$*.*

*Dimostrazione.* Supponiamo che $v, v_1, \dots v_n$ sono linearmente indipendenti. Per la Proposizione 4.16 $v$ non appartiene a $\mathcal{L}(v_1, \dots, v_n)$ poiché altrimenti i vettori $v, v_1, \dots, v_n$ sarebbero linearmente dipendenti. Viceversa, supponiamo che $v$ non appartenga a $\mathcal{L}(v_1, \dots, v_n)$ e sia $\alpha v + \beta_1 v_1 + \cdots \beta_n v_n = 0$ una combinazione lineare uguale al vettore nullo. Se $\alpha$ fosse differente da zero, allora

$$v = -(\beta_1/\alpha)v_1 - \cdots - (\beta_n/\alpha)v_n,$$

ovvero $v \in \mathcal{L}(v_1, \dots, v_n)$ che non è possibile per ipotesi. Quindi necessariamente $\alpha = 0$ . Se $\alpha = 0$, allora necessariamente $\beta_1 = \cdots = \beta_n = 0$ poiché i vettori $v_1, \dots, v_n$ sono linearmente indipendenti. □

**Teorema 4.29** (Teorema di completamento a base)**.** *Sia* $V$ *uno spazio vettoriale su* $\mathbb{K}$*. Sia* $\mathcal{C} = \{w_1, \dots, w_m\}$ *un insieme formato da vettori linearmente indipendenti e sia* $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ *una base di* $V$*. Allora esistono* $n - m$ *vettori di* $\mathcal{B}$ *che insieme a* $\mathcal{C} = \{w_1, \dots, w_m\}$ *formano una base di* $V$*.*

*Dimostrazione.* Per il lemma di Steinitz, $m \leq n$. Essendo $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base di $V$, allora $w_1, \dots w_m \in \mathcal{L}(v_1, \dots, v_n)$ e quindi

$$\mathcal{L}(w_1, \dots w_m) \subset \mathcal{L}(v_1, \dots v_n).$$

Se $\mathcal{L}(w_1, \dots w_m) = \mathcal{L}(v_1, \dots v_n)$, allora $\{w_1, \dots, w_m\}$ sarebbe una base di $V$, essendo indipendenti ed un sistema di generatori, da cui segue che $m = n$ ed il Teorema sarebbe dimostrato. Se $\mathcal{L}(w_1, \dots w_m) \subsetneq \mathcal{L}(v_1, \dots v_n)$, allora necessariamente esisterebbe un $1 \leq j_1 \leq n$ tale che $v_{j_1}$ non appartiene al sottospazio vettoriale $\mathcal{L}(w_1, \dots, w_m)$ ed per il lemma 4.28, i vettori $v_{j_1}, w_1, \dots, w_m$ sarebbero linearmente indipendenti. Se

$$\mathcal{L}(v_{j_1}, w_1, \dots, w_m) = \mathcal{L}(v_1, \dots v_n),$$

allora $m + 1 = n$ ed il Teorema sarebbe stato dimostrato. Altrimenti esisterebbe $1 \leq j_2 \leq n$, $j_2 \neq j_1$, tale che $v_{j_2}$ non apparterrebbe $\mathcal{L}(v_{j_1}, w_1 \dots w_m)$ e quindi i vettori $v_{j_2}, v_{j_1}, w_1, \dots w_m$ sarebbero linearmente indipendenti. Se

$$\mathcal{L}(v_{j_1}, v_{j_2}, w_1, \dots w_m) = \mathcal{L}(v_1, \dots v_n),$$

allora per il Lemma di Steinitz $m+2 = n$ ed il Teorema sarebbe dimostrato. Altrimenti posso iterare questo procedimento per un numero finito di volte: esattamente $n - m$ volte, concludendo la dimostrazione del Teorema. $\square$

**Corollario 4.30.** *Sia $V$ uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ e sia $W$ un sottospazio di $V$. Allora $\dim W \leq \dim V$. Inoltre $\dim W = \dim V$ se e solamente se $V = W$.*

*Dimostrazione.* Sia $\mathcal{C} = \{w_1, \ldots, w_m\}$ una base di $W$ e sia $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base di $V$. Per lemma di Steiniz $m \leq n$ ed per il teorema del completamente esistono $n - m$ vettori di $\mathcal{B}$ che aggiunti a $\mathcal{C} = \{w_1, \ldots, w_m\}$ formano una base di $W$. Quindi $\dim W \leq \dim V$ e l'uguaglianza vale se e solamente se $\mathcal{C} = \{w_1, \ldots, w_m\}$ è un base di $V$; ovvero se e solamente se $m = n$ e $V = \mathcal{L}(v_1, \ldots, v_n) = W$. $\square$

### 4.30.1 Tecniche di Calcolo

Consideriamo $V = \mathbb{K}^n$ dove $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ oppure $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Siano $X_1, \ldots X_k$ vettori di $\mathbb{K}^n$. Allora:

a) $X_1, \ldots, X_k$ sono linearmente indipendenti $\iff rg(X_1, \ldots, X_k) = k$. In particolare $X_1, \ldots, X_n$ sono linearmente indipendenti (formano una base) se e solamente se $\det(X_1, \ldots, X_n) \neq 0$.

b) Siano $X_1, \ldots X_k \in \mathbb{K}^n$ lineramente indipendenti. Noi sappiamo che possiamo completare i vettori $X_1, \ldots X_k$ ad una base di $V$. Una possibilità è quella di aggiungere $n - k$ vettori $Y_{k+1}, \ldots, Y_n$ tali che

$$\det(X_1, \ldots, X_k, Y_{k+1}, \ldots, Y_n) \neq 0.$$

Un altra possiblità potrebbe essere la seguente. Sia $\mathcal{C} = \{e_1, \ldots e_n\}$ la base canonica di $\mathbb{K}^n$; ovvero Consideriamo la matrice

$$A = (X_1, \ldots X_k, e_1, \ldots, e_n) \in M_{n \times (n+k)}(\mathbb{K}).$$

Si osservi che $rg(A) = n$. Infatti $rg(A) \leq n$ poiché la matrice $A$ ha $n$ righe. Se guardo le colonne osservo che $rg(A) \geq n$ poiché i vettori $e_1, \ldots, e_n$ sono linearmente indipendenti. Quindi $rg(A) = n$. Possiamo ridurre la matrice $A$ a scala ed ottenere un matrice ridotta a scala $S = (S^1, \ldots, S^k, B^1, \ldots, B^n)$. Si considerino le colonne corrispondenti ai perni: $S^1, \ldots, S^k, B^{j_1}, \ldots, B^{j_{n-k}}$. Si noti che le prime $k$ colonne contengono dei perni poiché i vettori, $X_1, \ldots, X_k$ sono linearmente indipendenti. Allora i vettori $X_1, \ldots X_k, e_{j_1}, \ldots e_{j_{n-k}}$ formano un base di $V$.

c) sia $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base di $\mathbb{K}^n$. Vogliamo calcolare le coordinate di un vettore $v$ rispetto alla base $\mathcal{B}$. Ricordiamo che le coordinate di $v$ rispetto a $\mathcal{B}$ sono gli unici scalari $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ tale che

$$v = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n = (v_1, \dots, v_n) \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

ovvero $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ è l'unica soluzione del sistema lineare $AX = v$ dove la matrice dei coefficienti $A = (v_1, \dots, v_n) \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$.

d) Sia $W \subset \mathbb{K}^n$ un sottospazio vettoriale generato dai vettori $w_1, \dots w_k$, ovvero $W = \mathcal{L}(w_1, \dots, w_k)$. Sia $w = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$. Il vettore $w \in W$ se e solamente se esistono degli scalari $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ tali che

$$\alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_k w_k = w \iff (w_1, \dots, w_k) \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{bmatrix} = w,$$

quindi se e solamente se il sistema lineare $AX = w$ ammette soluzioni, dove $A = (w_1, \dots, w_k) \in M_{n \times k}(\mathbb{K})$. Applicando il Teorema di Rouché-Capelli, si ha che $w \in \mathcal{L}(w_1, \dots, w_k)$ se e solamente se $rg(A|w) = rg(A)$. Effettuo delle operazioni elementari sulle righe della matrice $(A|w)$ per ridurre a scala $A$ ed ottengo una matrice $(S|c)$ che individua un sistema lineare ridotto a sclala equivalente al sistema lineare $AX = w$. Il sistema $(S|c)$ è compatibile se e solamente se le ultime $n - rg(A)$ coordinate di $c$ sono nulle: ovvero

$$c_{k+1} = 0, \dots, c_n = 0,$$

le quali sono equazioni lineari in $x_1, \dots, x_n$. Queste equazioni lineari sono chiamate le *equazioni cartesiane* di $W$: infatti definiscono $W$ come l'insieme dei vettori $w \in V$ tali che soddisfano alle equazioni $c_{k+1} = 0, \dots, c_n = 0$,. Le equazioni cartesiane non sono uniche .

e) Sia $W = Sol(A|0)$, dove $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$. Allora $\dim W = n - rg(A)$; questo fatto lo dimostreremo più avanti. Per trovare una base devo risolvere il sistema lineare $AX = 0$ utilizzando il metodo della risoluzione all'indietro.

f) Sia $W = \mathcal{L}(X_1, \dots, X_k)$ dove $X_1, \dots X_k \in \mathbb{K}^n$. Allora $\dim W = rg((X_1, \dots, X_k))$. Per determinare una base posso ridurre la matrice $A = (X_1, \dots, X_k) \in M_{m\times k}(\mathbb{K})$ a scala $S \in M_{m\times k}(\mathbb{K})$. Siano $1 \leq j_1 < \ldots < j_k \leq n$ gli interi tali che $S^{j_1}, \dots, S^{j_k}$ sono le colonne che corrispondono ai perni di $S$. Allora

$$W = \mathcal{L}(X_{j_1}, \dots, X_{j_k}),$$

e $(X_{j_1}, \dots, X_{j_k})$ è una base di $W$.

g) Sia $v \in V$ e sia $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base di $\mathbb{K}^n$. Le coordinate di $v$ rispetto a $\mathcal{B}$, i.e., $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, sono degli scalari che soddisfano

$$x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n = v,$$

ovvero, se indico con $A = (v_1, \dots, v_n)$ (la matrice le cui colonne sono i vettori della base $\mathcal{B}$), le coordinate $[v]_{\mathcal{B}}$ sono le uniche soluzioni del sistema lineare

$$AX = v.$$

Sia $V$ uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ e sia $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base di $V$. Possiamo definire una applicazione biunivoca $\mathcal{F}_{\mathcal{B}} : V \longrightarrow \mathbb{K}^n$ che associa a $v$ le sue coordinate di $v$ rispetto a $\mathcal{B}$:

$$\mathcal{F}_{\mathcal{B}} : V \longrightarrow \mathbb{K}^n \qquad v \mapsto [v]_{\mathcal{B}}.$$

Questa applicazione preserva le rispettive strutture lineari di $V$ e $\mathbb{K}^n$ poiché:

- $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}(v + w) = [v + w]_{\mathcal{B}} = [v]_{\mathcal{B}} + [w]_{\mathcal{B}} = \mathcal{F}_{\mathcal{B}}(v) + \mathcal{F}_{\mathcal{B}}(w)$;
- $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}(\lambda v) = [\lambda v]_{\mathcal{B}} = \lambda [v]_{\mathcal{B}} = \lambda \mathcal{F}_{\mathcal{B}}(v)$;

Poiché $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}(v_i) = e_i$ si ha

$$(\mathcal{F}_{\mathcal{B}})^{-1}\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}\right) = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n.$$

Siano $w_1, \dots, w_k \in V$. Allora:

a) $w_1, \dots, w_k \in V$ sono linearmente indipendenti se e solamente se i vettori $[w_1]_{\mathcal{B}}, \dots, [w_k]_{\mathcal{B}} \in \mathbb{K}^n$ sono linearmente indipendenti se e solamente se la matrice $([w_1]_{\mathcal{B}}, \dots, [w_k]_{\mathcal{B}}) \in M_{n\times k}(\mathbb{K})$ ha rango $k$;

b) $w_1, \dots, w_k \in V$ sono linearmente dipendenti se e solamente se i vettori $[w_1]_{\mathcal{B}}, \dots, [w_k]_{\mathcal{B}} \in \mathbb{K}^n$ sono linearmente dipendenti se e solamente se la matrice $([w_1]_{\mathcal{B}}, \dots, [w_k]_{\mathcal{B}}) \in M_{n\times k}(\mathbb{K})$ ha rango minore di $k$;

c) $w_1, \dots, w_k \in V$ formano una base di $V$ se e solamente se $k = n$ ed i vettori $[w_1]_{\mathcal{B}}, \dots, [w_n]_{\mathcal{B}}$ formano una base di $\mathbb{K}^n$ se e solamente se la matrice $([w_1]_{\mathcal{B}}, \dots, [w_n]_{\mathcal{B}}) \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ ha rango $n$ se e solamente se $\det([w_1]_{\mathcal{B}}, \dots, [w_n]_{\mathcal{B}}) \neq 0$ ;

d) siano $w_1, \dots, w_k$ vettori linearmente indipendenti di $V$. Vogliamo completarli a base di $V$. Siano $[w_1]_{\mathcal{B}}, \dots, [w_k]_{\mathcal{B}} \in \mathbb{K}^n$. Possiamo completarli a base in $\mathbb{K}^n$ come al punto $(b)$, ovvero esistono $e_{j_1}, \dots e_{j_{n-k}} \in \mathbb{K}^n$ tali che $[w_1], \dots, [w_k]_{\mathcal{B}}, e_{j_1}, \dots e_{j_{n-k}}$ formano una base di $\mathbb{K}^n$. Allora i vettori $w_1, \dots, w_k, \mathcal{F}_{\mathcal{B}}^{-1}(e_{j_1}), \dots \mathcal{F}_{\mathcal{B}}^{-1}(e_{j_{n-k}})$ formano una base di $V$. Si noti che se $e_{j_1}, \dots e_{j_{n-k}}$ sono i vettori della base canonica che hanno tutte le coordinate zero tranne la coordinata $j_s$ che è uguale a 1, allora $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}^{-1}(e_{j_s}) = v_s$, da cui segue che la base trovata è:

$$w_1, \dots, w_k, v_{j_1}, \dots v_{j_{n-k}}$$

e) Vogliamo calcolare una base di $W = \mathcal{L}(w_1, \dots, w_k)$. Sia

$$W' = \mathcal{L}([w_1]_{\mathcal{B}}, \dots, [w_k]_{\mathcal{B}}).$$

La dimensione di $W = rg(([w_1]_{\mathcal{B}}, \dots, [w_k]_{\mathcal{B}})) \in M_{n\times k}(\mathbb{K})$. Per calcolare una base posso calcolare una base di $W'$ come al punto $(e)$; ovvero esistono $1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq n$ tale che $W' = \mathcal{L}([w_{j_1}]_{\mathcal{B}}, \dots, [w_{j_k}]_{\mathcal{B}})$ ed i vettori $[w_{j_1}]_{\mathcal{B}}, \dots, [w_{j_k}]_{\mathcal{B}})$ sono linearmente indipendenti. Quindi $W = \mathcal{L}(w_{j_1}, \dots, w_{j_k})$ ed i vettori $([w_{j_1}]_{\mathcal{B}}, \dots, [w_{j_k}]_{\mathcal{B}})$ formano una base di $W$.

f) sia $\mathcal{C} = \{w_1, \dots, w_n\}$ una base di $V$. Per calcolare le coordinate di un vettore $v$ rispetto a $\mathcal{C}$ è sufficiente calcolare le coordinate del vettore $[v]_{\mathcal{B}}$ rispetto alla base $\mathcal{C}' = ([w_1]_{\mathcal{B}}, \dots, [w_n]_{\mathcal{B}})$. Quindi le coordinate di $v$ rispetto a $\mathcal{C}$ sono l'unica soluzione del sistema lineare

$$AX = [v]_{\mathcal{B}},$$

dove $A = ([w_1]_{\mathcal{B}}, \dots, [w_n]_{\mathcal{B}})$.

## 4.31 Formula di Grassman

Sia $V$ uno spazio vettoriale e siano $U, W \subset V$ sottospazi vettoriali di $V$. $U \cap W$ è un sottospazio vettoriale. In generale $U \cup W$ non è un sottospazio vettoriale ma possiamo considerare lo spazio vettoriale generato da $U \cup W$, ovvero il più piccolo sottospazio vettoriale di $V$ che contiene sia $U$ che $W$. Tale sottospazio è il sottospazio vettoriale $U+W := \{u+w : u \in U \ w \in W\}$. È facile verificare che $U + W$ è un sottospazio vettoriale che contiene $U$ e $W$ ed è effettivamente il più piccolo sottospazio vettoriale di $V$ che contiene sia $U$ che $W$.

**Lemma 4.32.** *Sia $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ un sistema di generatori di $U$ e $\mathcal{C} = \{w_1, \dots, w_m\}$ un sistema di generatori di $W$. Allora $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ è un sistema di generatori di $U + W$.*

*Dimostrazione.* Un generico elemento di $U + W$ è della forma $u + w$ per un certo $u \in U$ e $w \in W$. Quindi esistono $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+m}$ tale che

$$u = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n \text{ e } w = \alpha_{n+1} w_1 + \cdots + \alpha_{n+m} w_m.$$

Quindi

$$u + w = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n + \alpha_{n+1} w_1 + \cdots + \alpha_{n+m} w_m.$$

$\square$

**Teorema 4.33** (Formula di Grassman)**.**

$$\dim(U + W) + \dim(U \cap W) = \dim U + \dim W$$

*Dimostrazione.* Sia $\{s_1, \dots, s_k\}$ una base di $U \cap W$. Possiamo estenderla ad una base di $U$, $\{s_1, \dots, s_k, u_1, \dots, u_p\}$ ed ad una base di $W$, $\{s_1, \dots, s_k, w_1, \dots, w_q\}$. In particolare $\dim(U \cap W) = k$, $\dim U = k + p$ ed infine $\dim W = k + q$. Vogliamo dimostrare che

$$\{s_1, \dots, s_k, u_1, \dots, u_p, w_1, \dots, w_q\},$$

formano una base di $U + W$. Per il lemma anteriore sono un sistema di generatori. Quindi dobbiamo dimostare che sono linearmente indipendenti. Sia

$$\underbrace{\alpha_1 s_1 + \cdots + \alpha_k s_k}_{h} + \underbrace{\beta_1 u_1 + \cdots + \beta_k u_p}_{u} + \underbrace{\gamma_1 w_1 + \cdots + \gamma_k w_q}_{w} = 0.$$

Allora $w, u \in U \cap W$. Quindi esistono $\lambda_1, \dots \lambda_k$ rispettivamente $\mu_1, \dots, \mu_k$ tali che

$$u = \lambda_1 s_1 + \cdots \lambda_k s_k = \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_k u_p$$

rispettivamente

$$w = \mu_1 s_1 + \cdots \mu_k s_k = \gamma_1 w_1 + \cdots + \gamma_q w_q,$$

ovvero

$$\lambda_1 s_1 + \cdots + \lambda_k s_k - \beta_1 u_1 - \cdots - \beta_k u_p = 0,$$

rispettivamente

$$\mu_1 s_1 + \cdots + \mu_k s_k - \gamma_1 w_1 - \cdots - \gamma_q w_q = 0.$$

Poiché $\{s_1, \dots, s_k, u_1, \dots, u_p\}$, rispettivamente $\{s_1, \dots, s_k, w_1, \dots, w_q\}$, è una base di $U$, rispettivamente di $W$, ne segue che

$$\beta_1 = \cdots = \beta_p = 0 \text{ (rispettivamente } \gamma_1 = \cdots = \gamma_q = 0).$$

Quindi $u = w = 0$ e

$$\alpha_1 s_1 + \cdots + \alpha_k s_k = 0.$$

I vettori $s_1, \dots, s_k$ sono linearmente indipendenti. Quindi $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0$. Quindi se

$$\alpha_1 s_1 + \cdots + \alpha_k s_k + \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_k u_p + \gamma_1 w_1 + \cdots + \gamma_k w_q = 0,$$

allora $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = \beta_1 = \cdots = \beta_p = \gamma_1 = \cdots = \gamma_q = 0$, ovvero i vettori $s_1, \dots, s_k, u_1, \dots, u_p, w_1, \dots, w_q$ sono linearmente indipendenti ed essendo anche un sistema di generatori del sottospazio $U + W$, formano una base di $U + W$. Quindi

$$\dim(U+W) = k+p+q = (k+p)+(k+q)-k = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W).$$

$\square$

**Definizione 4.34.** *Sia $V$ uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$. Siano $U$ e $W$ due sottospazi vettoriali di $V$. Diremo che $V$ è somma diretta di $U$ e $W$ se:*

- $U \cap W = \{0\}$*;*
- $U + W = V$*.*

**Corollario 4.35.** *$V$ è somma diretta di $U$ e $W$ se e solamente se $U \cap W = \{0\}$ e $\dim V = \dim U + \dim W$.*

### 4.35.1 Metodi di Calcolo

Siano $U = \mathcal{L}(X_1, \ldots, X_k)$ e $W = \mathcal{L}(Y_1, \ldots, Y_s)$ sottospazi di $\mathbb{K}^n$. Per trovare una base di $U + W$ basta studiare la matrice $A = (X_1, \ldots, X_k, Y_1, \ldots, Y_s)$. Infatti $rg(A) = \dim(U + W)$ e se indico con $S$ una sua riduzione a scala e con $S^{j_1}, \ldots, S^{j_k}$, dove $1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq n$, le colonne corrispondenti ai perni, le colonne di $A$: $A^{j_1}, \ldots, A^{j_k}$ formano una base di $U + W$.

Per calcolare l'intersezione posso calcolare le equazioni cartesiane di $U$ e $W$ rispettivamente. L'insieme dei vettori di $\mathbb{K}^n$ che soddisfa alle equazioni carteisane di $U$ e $W$ sono esattamenete i vettori che costituiscono l'intersezione.

Se $U = \mathcal{L}(u_1, \ldots, u_p)$ e $W = \mathcal{L}(w_1, \ldots, w_q)$ sono sottospazi di $V$ e $\mathcal{B}$ una sua base allora: $\dim U = rg(([u_1]_\mathcal{B}, \ldots, [u_p]_\mathcal{B})$; $\dim W = rg(([w_1]_\mathcal{B}, \ldots, [w_q]_\mathcal{B})$; $\dim U + W = rg(([u_1]_\mathcal{B}, \ldots, [u_p]_\mathcal{B}, [w_1]_\mathcal{B}, \ldots, [w_q]_\mathcal{B}))$. La dimensione di $U \cap W$ può essere ricavata usando la formula di Grassmann.

# Capitolo 5

# Applicazioni lineari

## 5.1 Applicazioni lineari

**Definizione 5.2.** *Siano $V, W$ spazi vettoriali su $\mathbb{K}$. Una applicazione $T : V \longrightarrow W$ si dice lineare se:*

*a)* $\forall v_1, v_2 \in V$, $T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2)$ *(additiva);*

*b)* $\forall v \in V$ *e* $\lambda \in \mathbb{K}$, $T(\lambda v) = \lambda T(v)$ *(omogenea).*

**Proposizione 5.3.** *Sia $T : V \longrightarrow W$ una applicazione lineare. Allora*

- $T(0) = 0$;
- $T(-v) = -T(v)$.

**Esempio 5.4.**

*a)* $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $T(x) = x + 1$ *non è una applicazione lineare;*

*b)* $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $T(x) = x^2$ *non è una applicazione lineare;*

*c)* $T : V \longrightarrow V$, $v \mapsto 0$ *è lineare;*

*d) L'applicazione* $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R}) \mapsto A^t \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$ *è una applicazione lineare;*

*e) L'applicazione* $A \in M_{m \times n}(\mathbb{C}) \mapsto A^* \in M_{n \times m}(\mathbb{C})$ *non è una applicazione lineare: è additiva ma non è omogenea;*

*f) sia $V$ uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ e sia $\mathcal{B}$ una base di $V$. Allora*

$$\mathcal{F}_{\mathcal{B}} : V \longrightarrow \mathbb{K}^n, \qquad v \mapsto [v]_{\mathcal{B}},$$

*è una applicazione lineare, iniettiva e suriettiva;*

*g) sia $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$. Le applicazioni*

$$M_{p\times m}(\mathbb{K}) \longrightarrow M_{p\times n}(\mathbb{K}), \qquad X \mapsto XA,$$

*e*

$$M_{n\times q}(\mathbb{K}) \longrightarrow M_{m\times q}(\mathbb{K}), \qquad X \mapsto AX,$$

*sono applicazioni lineari.*

*h) se $V$ è uno spazio vettoriale, allora $Id_V : V \longrightarrow V$ è lineare.*

*i) Sia $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$. Allora*

$$L_A : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m, \qquad X \mapsto AX,$$

*è una applicazione lineare.*

**Proposizione 5.5.** *Siano $V$ e $W$ spazi vettoriali su $\mathbb{K}$. Sia $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base di $V$ e $w_1, \ldots, w_n \in W$. Allora esiste una unica applicazione lineare $T : V \longrightarrow W$, tale che $T(v_1) = w_1, \ldots, T(v_n) = w_n$. Quindi due applicazioni lineari che assumono gli stessi valori su una base coincidono.*

*Dimostrazione.* Dimostriamo l'unicità. Supponiamo che esistano $T_1, T_2 : V \longrightarrow W$ tali che $T_1(v_1) = T_2(v_1), \ldots, T_1(v_n) = T_2(v_n)$. Per la proposizione precedente $T_1 = T_2$ come di voleva dimostrare. Dimostriamo l'esistenza. Sia $v \in V$. Allora esistono, e sono unici, $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$ tale che

$$v = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n.$$

Definiamo $T(v) = x_1 w_1 + \cdots + x_n w_n$. Si noti che la definizione è ben posto poiché le coordinate sono univocamente determinate e che $T(v_i) = w_i$ per $i = 1, \ldots, n$. Dobbiamo dimostrare che $T$ è lineare. Sia $v, w \in V$. Allora

$$\begin{array}{l} v = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n \\ w = y_1 v_1 + \cdots + y_n v_n \\ v + w = (x_1 + y_1) v_1 + \cdots + (x_n + y_n) v_n \end{array} .$$

Quindi

$$\begin{aligned} T(v+w) &= (x_1 + y_1) w_1 + \cdots + (x_n + y_n) w_n \\ &= x_1 w_1 + \cdots + x_n w_n + y_1 w_1 + \cdots + y_n w_n \\ &= T(v) + T(w). \end{aligned}$$

Analogamente possiamo dimostrare che $T(\lambda v) = \lambda T(v)$ $\square$

Siano $V, W$ spazi vettoriali su $\mathbb{K}$. Indichiamo con $Lin(V, W)$ oppure $Hom(V, W)$ l'insieme di tutte le applicazioni lineari fra $V$ e $W$. L'insieme $L(V, W)$ delle applicazioni lineari ha in modo naturale una struttura lineare:

$$(T + L)(v) := T(v) + L(v), \qquad (\lambda T)(v) = \lambda T(v).$$

**Proposizione 5.6.** *Se $V, W$ sono spazi vettoriali su $\mathbb{K}$, allora $L(V, W)$ con le usuali operazioni di somma e moltiplicazione per scalare è uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$.*

**Definizione 5.7.** *Sia $T : V \longrightarrow W$ una applicazione lineare. Si pone*

- $Ker\, T = \{v \in V : T(v) = 0\}$;
- $Im\, T = \{T(v) : v \in V\} = \{w \in W : \exists v \in V \text{ per cui } T(v) = w\}$.

**Proposizione 5.8.** *Sia $T : V \longrightarrow W$ una applicazione lineare. Allora*

- *$Ker\, T$ è un sottospazio vettoriale di $V$;*
- *$Im\, T$ è un sottospazio vettoriale di $W$. Inoltre, se $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ è una base di $V$, allora*

  $$Im\, T = \mathcal{L}(T(v_1), \dots, T(v_n)).$$

  *Quindi* $\dim Im\, T \leq \dim V$.

*Dimostrazione.*

- Siano $v, w \in Ker\, T$. Allora $T(v) = T(w) = 0$. Dobbiamo dimostrare che $v + w \in Ker\, T$ e $\lambda v \in Ker\, T$ per ogni $\lambda \in \mathbb{K}$, cioè

  $$T(v_1 + v_2) = 0 \qquad T(\lambda v) = 0.$$

  Questo è ovvio perché, per la linearità, si ha

  $$T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2) = 0$$

  e

  $$T(\lambda v) = \lambda T(v) = 0.$$

- Siano $w_1, w_2 \in Im\, T$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Per ipotesi esistono $v_1, v_2 \in V$ tali che $T(v_1) = w_1$ e $T(v_2) = w_2$, da cui segue, per la linearità,

  $$T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2) = w_1 + w_2 \in Im\, T,$$

e

$$T(\lambda v_1) = \lambda T(v_1) = \lambda w_1 \in Im\, T.$$

Sia $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base di $V$ e sia $w \in Im\, T$. Allora $w = T(v)$ e $v = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n$ da cui segue per la linearità di $T$,

$$w = T(v) = x_1 T(v_1) + \cdots + x_n T(v_n) \in \mathcal{L}(T(v_1), \ldots, T(v_n)).$$

Quindi $Im\, T \subset \mathcal{L}(T(v_1), \ldots, T(v_n))$. Poiché $T(v_1), \ldots, T(v_n) \in Im\, T$, ed essendo $Im\, T$ un sottospazio vettoriale di $W$, si ha

$$\mathcal{L}(T(v_1), \ldots, T(v_n)) \subset Im\, T$$

da cui segue

$$Im\, T = \mathcal{L}(T(v_1), \ldots, T(v_n))$$

e quindi $\dim Im\, T \leq \dim V$.

$\square$

**Proposizione 5.9.** *Sia $T : V \longrightarrow W$ una applicazione lineare. Allora:*

- *$T$ è iniettiva se e solamente se $Ker\, T = \{0\}$;*
- *$T$ è suriettiva se e solamente se $Im\, T = W$.*

*Dimostrazione.* Una applicazione $T$ è iniettiva se $T(v) \neq T(w)$ ogni volta che $v \neq w$. Essendo $T$ lineare, si ha $T(0) = 0$ e quindi se $T$ è iniettiva l'unico elemento che ha come immagine il vettore nullo è il vettore nullo di $V$. Viceversa, supponiamo che $Ker\, T = \{0\}$. Vogliamo dimostrare che se $T(v) = T(w)$, allora $v = w$; ovvero $T$ è iniettiva. Se $T(v) = T(w)$, allora per la linearità $T(v - w) = 0$ e quindi $v - w \in Ker\, T$ Per ipotesi $Ker\, T = \{0\}$ da cui segue $v = w$. Il secondo punto è ovvio. $\square$

**Teorema 5.10** (Teorema della dimensione)**.** *Sia $T : V \longrightarrow W$ una applicazione lineare. Allora*

$$\dim V = \dim Ker\, T + \dim Im\, T.$$

*Dimostrazione.* Sia $(v_1, \ldots, v_k)$ una base di $Ker\, T$. Per il Teorema del complemento della base, esistono $v_{k+1}, \ldots, v_n$ tale che $(v_1, \ldots, v_n)$ è una base di $V$. Adesso

$$Im\, T = \mathcal{L}(T(v_1), \ldots, T(v_n)) = \mathcal{L}(T(v_{k+1}), \ldots, T(v_n)).$$

Quindi è sufficiente provare che i vettori $T(v_{k+1}), \ldots, T(v_n)$ sono linearmente indipendenti; quindi una base di $Im\, T$. Siano $\alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tali che

$$\alpha_{k+1} T(v_{k+1}) + \cdots + \alpha_n T(v_n) = 0.$$

Per la linearità segue che

$$T(\alpha_{k+1} v_{k+1} + \cdots + \alpha_n v_n) = 0,$$

ovvero $\alpha_{k+1} v_{k+1} + \cdots + \alpha_n v_n \in Ker\, T$. Allora esistono $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{K}$ tali che

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k = \alpha_{k+1} v_{k+1} + \cdots + \alpha_n v_n,$$

ovvero

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k - \alpha_{k+1} v_{k+1} - \cdots - \alpha_n v_n = 0.$$

I vettori $v_1, \ldots, v_n$ formano una base di $V$; quindi sono linearmente indipendenti da cui segue $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$, ed in particolare $\alpha_{k+1} = \cdots = \alpha_n = 0$ ovvero i vettori $T(v_{r+1}), \ldots, T(v_n)$ sono linearmenti indipendenti. □

**Corollario 5.11.** *Sia $T : V \longrightarrow W$ una applicazione lineare. Allora:*

- *$T$ è iniettiva se e solamente se* $\dim Im\, T = \dim V$*;*
- *$T$ è suriettiva e solamente se* $\dim Im\, T = \dim W$*;*
- *$T$ è biunivoca se e solamente se $T$ è iniettiva se e solamente se $T$ è suriettiva.*

**Corollario 5.12.** *Sia $T : V \longrightarrow W$ una applicazione lineare. Allora:*

- *se $T$ è iniettiva, allora* $\dim V \leq \dim W$*;*
- *se $T$ è suriettiva, allora* $\dim V \geq \dim W$*;*
- *se $T$ è biunivoca, allora* $\dim V = \dim W$*.*

**Definizione 5.13.** *Due spazi vettoriali $V, W$ sono isomorfi se esiste una applicazione lineare $T : V \longrightarrow W$ iniettiva e suriettiva, ovvero biunivoca.*

**Proposizione 5.14.** *Due spazi vettoriali sono isomorfi se e solamente se* $\dim V = \dim W$*.*

*Dimostrazione.* per i risultati precendenti condizione necessaria affinché due spazi vettoriali sono isomorfi è che $\dim V = \dim W$. Dimostriamo che questa condizione è anche sufficiente. Siano $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ e $\mathcal{C} = \{w_1, \ldots, w_n\}$ basi di $V$ e $W$ rispettivamente. Definiamo $T : V \longrightarrow W$ come l'unica applicazione lineare tale che $T(v_1) = w_1, \ldots, T(v_n) = w_n$ (corollario 5.5). Poiché l'immagine contiene una base di $W$ è suriettiva e quindi, essendo $\dim V = \dim W$, è anche iniettiva: ovvero $V$ e $W$ sono isomorfi. $\square$

# Capitolo 6

# Matrici e applicazioni lineari

Sia $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ e sia $L_A : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$ l'applicazione lineare così definita: $L_A(X) = AX$. Allora

a) $Ker\, L_A = \{X \in \mathbb{K}^n : AX = 0\} = Sol(A|0)$;

b) $Im\, L_A = \{b \in \mathbb{K}^n : \exists X \in \mathbb{K}^n$ per cui $AX = b\} = \{b \in \mathbb{K}^m : Sol(A|b) \neq \emptyset\}$ ovvero l'immagine di $L_A$ è l'insieme dei vettori di $\mathbb{K}^m$ per i quali il sistema $AX = b$ è compatibile;

c) sia $\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^n$. Allora

$$\begin{aligned} L_A(X) &= x_1 L_A(e_1) + \cdots + x_n L_A(e_n) \\ &= x_1 A^1 + \cdots + x_n A^n. \end{aligned}$$

Quindi $Im\, L_A = \mathcal{L}(A^1, \ldots, A^n)$ da cui ne segue che $\dim Im\, L_A = rg(A)$. Infine, applicando il teorema dell dimensione, otteniamo che $\dim Ker\, L_A = n - rg(A)$. Allora:

- $L_A$ è suriettiva se e solamente se $rg(A) = m$;
- $L_A$ è iniettiva se e solamente se $rg(A) = n$;
- $L_A$ è biunivoca se e solamente se $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ e $rg(A) = n$ se e solamente se $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ e $\det(A) \neq 0$.

Vale anche il viceversa.

**Proposizione 6.1.** *Sia $T : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$ una applicazione lineare. Allora $T = L_{M_T}$ dove*

$$M_T = (T(e_1), \ldots, T(e_n)) \in M_{m\times n}(\mathbb{K}),$$

*e valgono le seguenti proprietà:*

- $KerT = Sol(M_T|0)$;
- $ImT = \mathcal{L}(M_T^1, \ldots, M_T^n)$, *ovvero lo spazio generato dalle colonne di* $M_T$ *e* $\dim Im\, T = rg(M_T)$;
- $T$ *è iniettiva se e solamente se* $rg(M_T) = n$;
- $T$ *è suriettiva se e solamente se* $rg(M_T) = m$;
- $T$ *è invertibile se e solamente se* $M_T$ *è una matrice quadarata non singolare. Inoltre* $M_{T^{-1}} = (M_T)^{-1}$;
- $M_{T+L} = M_T + M_L$ *e* $M_{\lambda T} = \lambda M_T$;
- *se* $T : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^p$ *e* $G : \mathbb{K}^p \longrightarrow \mathbb{K}^m$, *allora* $M_{G\circ T} = M_G M_T$.

## 6.2 Matrice associata

Sia $T : V \longrightarrow W$ una applicazione lineare. Siano $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ e $\mathcal{C} = \{w_1, \ldots, w_m\}$ basi di $V$ e $W$ rispettivamente. Se $v \in V$, allora $v = x_1v_1 + \cdots + x_nv_n$ e come usuale indichiamo con $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ le coordinate di $v$. Adesso

$$[T(v)]_{\mathcal{C}} = x_1[T(v_1)]_{\mathcal{C}} + \cdots + x_n[T(v_n)]_{\mathcal{C}} = \mathcal{M}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(T)[v]_{\mathcal{B}},$$

dove $\mathcal{M}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(T) = ([T(v_1)]_{\mathcal{C}}, \ldots, [T(v_n)]_{\mathcal{C}}) \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$. $\mathcal{M}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(T)$ è chiamata la *matrice associata a $T$ rispetto alla basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$*. Osserviamo che $\mathcal{M}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(T)$ è l'unica matrice di ordine $m \times n$ tale che il seguente diagramma

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\mathcal{F}_{\mathcal{B}}"] & W \arrow[d, "\mathcal{F}_{\mathcal{C}}"] \\ \mathbb{K}^n \arrow[r, "L_{\mathcal{M}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(T)}"'] & \mathbb{K}^m \end{tikzcd}$$

è commutativo, ovvero l'unica matrice $\mathcal{M}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(T) \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ tale che

$$[T(v)]_{\mathcal{C}} = \mathcal{M}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(T)[v]_{\mathcal{B}}.$$

**Proposizione 6.3.** *Siano $V$ e $W$ spazi vettoriali su $\mathbb{K}$ e siano $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ basi di $V$ e $W$ rispettivamente. L'applicazione*

$$Lin(V,W) \longrightarrow M_{m\times n}(\mathbb{K}), \qquad T \mapsto \mathcal{M}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(T),$$

*è un isomorfismo. Inoltre, se $V = W$ allora $\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(Id) = Id_n$.*

**Proposizione 6.4.** *Sia $T : V \longrightarrow W$ e siano $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ basi di $V$ e $W$ rispettivamente. Allora:*

- $\dim ImT = rg(\mathcal{M}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(T))$*;*
- $\dim KerT = \dim V - rg(\mathcal{M}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(T))$*;*
- *$T$ è biunivoca se e solamente se $\mathcal{M}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(T)$ è invertibile e $\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(T^{-1}) = (\mathcal{M}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(T))^{-1}$;*
- *Se $G : W \longrightarrow Z$ è una applicazione lineare e $\mathcal{X}$ è una base di $Z$, allora $\mathcal{M}_{\mathcal{X},\mathcal{B}}(G \circ T) = \mathcal{M}_{\mathcal{X},\mathcal{C}}(G)\mathcal{M}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(T)$.*

*Dimostrazione.* Dimostriamo solo il punto finale. Sia $n \in N$. Allora

$$\begin{aligned}[T(G(n))]_{\mathcal{C}} &= \mathcal{M}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(T)[G(n)]_{\mathcal{B}} \\ &= \mathcal{M}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(T)\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{X}}(G)[n]_{\mathcal{X}}\end{aligned}$$

da cui segue

$$\mathcal{M}_{\mathcal{C},\mathcal{X}}(T \circ G) = \mathcal{M}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(T)\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{X}}(G).$$

□

**Corollario 6.5.** *Sia $T : V \longrightarrow W$ e siano $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ basi di $V$ e $W$ rispettivamente. Allora:*

- *$T$ è iniettiva se e solamente se $rg(\mathcal{M}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(T)) = \dim V$;*
- *$T$ è suriettiva se e solamente se $rg(\mathcal{M}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(T)) = \dim W$;*
- *$T$ è invertibile se e solamente se $\mathcal{M}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(T)$ è invertibile.*

## 6.6 Metodi di Calcolo

Sia $T : V \longrightarrow W$ una applicazione lineare e siano $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ basi di $V$ e $W$ rispettivamente. Per caclolare il $Ker\, T$ posso studiare

$$KerL_{\mathcal{M}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(T)} = \mathcal{F}_{\mathcal{B}}(Ker\, T)).$$

Il nucleo di $L_{\mathcal{M}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(T)}$ coincide con le soluzione del sistema lineare omogeneo $(\mathcal{M}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(T)|0)$. Calcolo le soluzioni del precendente sistema lineare omogeneo, per esempio utilizzando il metodo della risoluzione all'indietro, per determinare una base $w_1, \ldots, w_k$ di $Ker\, L_{\mathcal{M}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(T)}$. Una base di $Ker\, T$ è data da $(\mathcal{F}_{\mathcal{B}}^{-1}(w_1), \ldots, \mathcal{F}_{\mathcal{B}}^{-1}(w_k))$.

Analogamento posso procedere per l'immagine. Noi sappiamo che

$$\begin{aligned} Im\, L_{\mathcal{M}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(T)} &= \mathcal{L}(L_{\mathcal{M}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(T)}(e_1), \ldots, L_{\mathcal{M}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(T)}(e_n)) \\ &= (\mathcal{M}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(T)^1, \ldots, \mathcal{M}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(T)^n) \end{aligned}$$

dove $e_1, \ldots, e_n$ è la base canonica di $\mathbb{K}^n$. Calcolo una base dell'immagine della applicazione lineare $L_{\mathcal{M}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(T)}$, per esempio utilizzando il metodo della riduzione a scala, ovvero trovo $1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq n$, si osservi che $k = rg(\mathcal{M}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(T))$, tali che i vettori $L_{\mathcal{M}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(T)}(e_{j_1}), \ldots, L_{\mathcal{M}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(T)}(e_{j_k})$ sono una base di $Im\, L_{\mathcal{M}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(T)}$. Una base dell'immagine di $T$ può essere ottenuta come segue:

$$\mathcal{F}_{\mathcal{C}}^{-1}(L_{\mathcal{M}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(T)}(e_{j_1}), \ldots, \mathcal{F}_{\mathcal{C}}^{-1}(L_{\mathcal{M}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(T)}(e_{j_k}))$$

## 6.7 Matrice del Cambiamento di base

Sia $V$ uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ e siano $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ e $\mathcal{C} = \{w_1, \ldots, w_n\}$ basi di $V$. Sia $v \in V$. Indichiamo con $x'_1, \ldots, x'_n$ le coordinate di $v$ rispetto a $\mathcal{C}$; ovvero $v = {x'}_1 w_1 + \cdots + {x'}_n w_n$. Poiché $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}$ è un isomorfismo lineare si ha

$$[v]_{\mathcal{B}} = [{x'}_1 w_1 + \cdots + {x'}_n w_n]_{\mathcal{B}} = x'_1[w_1]_{\mathcal{B}} + \cdots + x'_n[w_n]_{\mathcal{B}} = \mathcal{M}(\mathcal{B}, \mathcal{C})[v]_{\mathcal{C}},$$

dove

$$\mathcal{M}(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = ([w_1]_{\mathcal{B}}, \ldots, [w_n]_{\mathcal{B}}) \in M_{n\times n}(\mathbb{K}),$$

si chiama *matrice del cambiamento di base* da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$. La matrice del cambiamento di base è l'unica matrice $\mathcal{M}(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ tale che per ogni $v \in V$, si ha

$$[v]_{\mathcal{B}} = \mathcal{M}(\mathcal{B}, \mathcal{C})[v]_{\mathcal{C}}.$$

È facile verificare che $\mathcal{M}(\mathcal{B},\mathcal{C}) = \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(Id)$ da cui segue che la matrice del cambiamento di base è invertibile.

**Proposizione 6.8.** *Siano $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ basi di $V$. Allora*

- $\mathcal{M}(\mathcal{B},\mathcal{B}) = Id_n$*;*
- $\mathcal{M}(\mathcal{B},\mathcal{C})\mathcal{M}(\mathcal{C},\mathcal{D}) = \mathcal{M}(\mathcal{B},\mathcal{C})$*;*
- $\mathcal{M}(\mathcal{B},\mathcal{C})$ *è invertibile e la sua inversa* $(\mathcal{M}(\mathcal{B},\mathcal{C}))^{-1} = \mathcal{M}(\mathcal{C},\mathcal{B})$.

**Teorema 6.9.** *Sia $T : V \longrightarrow W$ una applicazione lineare. Siano $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ e $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ basi di $V$ e $W$ rispettivamente. Allora*

$$\mathcal{M}_{\mathcal{C}',\mathcal{B}'}(T) = \mathcal{M}(\mathcal{C}',\mathcal{C})\mathcal{M}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(T)\mathcal{M}(\mathcal{B},\mathcal{B}').$$

*Dimostrazione.*

$$\begin{aligned}[T(v)]_{\mathcal{C}} &= \mathcal{M}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(T)[v]_{\mathcal{B}} \\ &= \mathcal{M}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(T)\mathcal{M}(\mathcal{B},\mathcal{B}')[v]_{\mathcal{B}'}.\end{aligned}$$

e

$$[T(v)]_{\mathcal{C}} = \mathcal{M}(\mathcal{C},\mathcal{C}')[T(v)]_{\mathcal{C}'},$$

ovvero, ricordando che $\mathcal{M}(\mathcal{C},\mathcal{C}') = (\mathcal{M}(\mathcal{C}',\mathcal{C}))^{-1}$,

$$[T(v)]_{\mathcal{C}'} = \mathcal{M}(\mathcal{C}',\mathcal{C})\mathcal{M}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(T)\mathcal{M}(\mathcal{B},\mathcal{B}').$$

□

**Corollario 6.10.** *Sia $T : V \longrightarrow V$ una applicazione lineare. Siano $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ di $V$. Allora*

$$\mathcal{M}_{\mathcal{C},\mathcal{C}}(T) = (\mathcal{M}(\mathcal{B},\mathcal{C}))^{-1}\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(T)\mathcal{M}(\mathcal{B},\mathcal{C}),$$

*ovvero le matrici $\mathcal{M}_{\mathcal{C},\mathcal{C}}(T)$ e $\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(T)$ sono simili.*

**Osservazione 6.11.** *È possibile dimostrare anche il viceversa: due matrici simili, rappresentano la stessa applicazione lineare rispetto a basi differenti. Infatti siiano $A$ e $B$ due matrici simili. Esiste quindi $P \in M_{n\times n}(\mathbb{K}$ invertibile tale che $A = P^{-1}BP$. Sia $\mathcal{B}$ una base di $V$. Consideriamo l'unica applicazione lineare $T : V \longrightarrow V$ che sulla base $\mathcal{B}$ vale: $T(v_i) = \sum_{m=1}^{n} a_{mi}v_m$. Vogliamo dimostrare che $\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(T) = A$. Infatti la $k-$esima colonna di $\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(T)$ è per definizione $[T(v_i)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{bmatrix}$, ovvero $\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(T)^k = A^k$.*

*Due matrici che hanno le stesse colonne coincidono per cui segue che la matrice associata a $T$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ è la matrice $A$. Consideriamo i vettori*

$$w_i = \sum_{m=1}^{n} p_{mi} v_m, \; i = 1, \ldots, n.$$

*Vogliamo dimostrare che $w_1, \ldots, w_n$ sono linearmente indipendenti: ovvero formano una base di $V$. I vettori $w_1, \ldots, w_n$ sono linearmente indipedenti se e solamente se $[w_1]_{\mathcal{B}}, \ldots, [w_n]_{\mathcal{B}}$ sono linearmente indipendenti se e solamente se la matrice $([w_1]_{\mathcal{B}}, \ldots, [w_n]_{\mathcal{B}})$, è inveritibile. Adesso $[w_i]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} p_{1i} \\ \vdots \\ p_{ni} \end{bmatrix} = P^i$, ovvero $([w_1]_{\mathcal{B}}, \ldots, [w_n]_{\mathcal{B}}) = P$, la quale è per ipotesi invertibile. Quindi $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ è una base di $V$; $\mathcal{M}(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = P$. Applicando il teorema anteriore otteniamo che*

$$\mathcal{M}_{\mathcal{C},\mathcal{C}}(T) = \mathcal{M}(\mathcal{C}, \mathcal{B}) \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(T) \mathcal{M}(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = P^{-1} A P = B.$$

# Capitolo 7

# Matrici, applicazioni bilineari e spazi euclidei

## 7.1 Applicazioni bilineari e prodotti scalari

**Definizione 7.2.** *Sia $V$ uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. Una applicazione (forma) bilineare su $V$ è una applicazione $\alpha : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ che lineare rispetto alla prima e secondo variabile, ovvero*

*a)* $\alpha(v+w, z) = \alpha(v, z)+\alpha(w, z)$ *e* $\alpha(\lambda v, w) = \lambda\alpha(v, w)$*, per ogni* $v, w, z \in V$ *e* $\lambda \in \mathbb{K}$*;*

*b)* $\alpha(u, z+h) = \alpha(u, z)+\alpha(u, h)$ *e* $\alpha(u, \lambda z) = \lambda\alpha(u, z)$*, per ogni* $u, z, h \in V$ *e* $\lambda \in \mathbb{K}$*;*

*Una forma bilineare* $\alpha : V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$ *si dice simmetrica se* $\alpha(v, w) = \alpha(w, v)$ *per ogni* $v, w \in V$.

**Definizione 7.3.** *Sia $V$ uno spazio vettoriale reale. Un prodotto scalare è un forma bilineare simmetrica $g : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ definita positiva, ovvero $g(v, v) \geq 0$ e $g(v, v) = 0$ se $v = 0$*

Sia $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base di $V$ e sia $f$ una applicazione bilineare simmetrica. Se $v, w \in V$, allora

$$v = x_1v_1 + \cdots + x_nv_n \qquad w = y_1v_1 + \cdots + y_nv_n,$$

$[v]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ e $[w]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ rispettivamente. Allora

$$f(v, w) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i f(v_i, v_j) y_j = [v]_{\mathcal{B}}^t \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)[w]_{\mathcal{B}},$$

dove $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = (f(v_i, v_j))_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$. Si osservi che $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$ è simmetrica essendo $f$ una forma bilineare simmetrica poiché $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)_{ij} = f(v_i, v_j) = f(v_j, v_i) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)_{ji}$. Viceversa, se $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$ è una matrice simmetrica, ovvero $A = A^t$, possiamo definire

$$f_A(v, w) = [v]_{\mathcal{B}}^t A[w]_{\mathcal{B}},$$

la quale risulta una forma bilineare simmetrica.

Siano $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ e $\mathcal{C} = \{w_1, \ldots, w_n\}$ due basi di $V$. Sia

$$f : V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$$

una applicazione bilineare simmetrica. Allora

$$f(v, w) = [v]_{\mathcal{B}}^t \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)[w]_{\mathcal{B}} = [v]_{\mathcal{C}}^t \mathcal{M}(\mathcal{B}, \mathcal{C})^t \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) \mathcal{M}(\mathcal{B}, \mathcal{C})[w]_{\mathcal{C}},$$

da cui segue

$$\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(f) = \mathcal{M}(\mathcal{B}, \mathcal{C})^t \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) \mathcal{M}(\mathcal{B}, \mathcal{C}).$$

Quindi, nel caso di matrice reali, ha un certo interesse studiare la seguente relazione di equivalenza.

**Definizione 7.4.** *Siano $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$. $A$ e $B$ si dicono* congruenti *se esiste una matrice $P$ invertibile tale che $P^t AP = B$.*

Si può dimostrare che "essere congruenti" è una relazione di equivalenza e due matrici simmetrice sono congruenti se e solamente se rappresentano la stessa forma bilineare rispetto a basi differenti.

Sia $A$ una matrice simmetrica. Possiamo associare ad $A$ una unica applicazione bilineare simmetrica così definita:

$$f_A : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f_A(X, Y) = X^t AY.$$

Il seguente criterio garantisce quando $f_A$ è un prodotto scalare

**Proposizione 7.5** (Criterio di Sylvester)**.** *Sia $A$ una matrice simmetrica di ordine $n$. $A$ definisce una prodotto scalare se e solamente se $\Delta_r(A) > 0$ per $r = 1, \ldots, n$ dove $\Delta_r(A)$ è il minore di $A$ considerando le prime $r$ righe e le prime $r$ colonne.*

Se $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ è una applicazione bilineare simmetrica, allora

$$f(X, Y) = X^t M_{\mathcal{C}}(f) Y,$$

dove $M_{\mathcal{C}}(f)$ è la matrice associata a $f$ rispetto alla base canonica; ovvero $(M_{\mathcal{C}}(f))_{ij} = f(e_i, e_j)$ dove $e_1, \ldots, e_n$ sono i vettori che formano la base canonica. Quindi $f$ è un prodotto scalare se e solamente se $M_{\mathcal{C}}(f)$ è un matrice simmetrica che verifica il criterio di Sylvester. In generale si può dimostare che se $\mathcal{B}$ è una base di $\mathbb{R}^n$, allora $f$ è un prodotto scalare se e solamente se $M_{\mathcal{B}}(f)$ verifica il criterio di Sylvester.

**Osservazione 7.6.** *Sia $(V, g)$ uno spazio euclideo. Allora $g(v, 0) = g(0, v) = 0$ e due vettori $w_1, w_2 \in V$ coincidono, i.e., $w_1 = w_2$ se e solamente se $g(w_1, v) = g(w_2, v)$ per ogni $v \in V$.*

**Esempio 7.7.**

- $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, *ovvero $\mathbb{R}^n$ dotato del prodotto scalare canonico, è uno spazio vettoriale euclideo;*
- $(M_{m \times n}(\mathbb{R}), g)$, *dove $g(A, B) = \mathrm{Tr}(A^t B)$ è uno spazio euclideo.*

Possiamo definire la norma di un vettore come $\parallel v \parallel = \sqrt{g(v, v)}$.

**Proposizione 7.8** (Disuguaglianza di Cauchy-Schwartz)**.** *Sia $(V, g)$ uno spazio euclideo e siano $v, w \in V$. Allora*

$$|g(v, w)| \leq \parallel v \parallel \parallel w \parallel .$$

*L'uguglianza vale se e solamente se i vettori $v, w$ sono linearmente indipendenti.*

*Dimostrazione.* Se $v$ oppure $w$ sono zero la disuguaglanza vale. Possiamo supporre che i vettori $v, w$ sono entrambi non nulli. Allora $g(v+tw, v+tw) \geq 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Sviluppando i calcoli otteniamo

$$g(v, v) + 2tg(v, w) + t^2 g(w, w)\rangle \geq 0$$

da cui segue

$$\Delta/4 = g(v, w)^2 - \parallel X \parallel^2 \parallel Y \parallel^2 \leq 0.$$

Inoltre se $\Delta/4 = 0$, allora esiste $t_o \in \mathbb{R}$ tale che $g(v + t_o w, v + t_o w) = 0$; ovvero, $v = -t_o w$. $\square$

**Definizione 7.9.** *Sia* $(V, g)$ *uno spazio euclideo e siano* $v, w \in V$ *vettori non nulli. Diremo angolo fra* $v$ *e* $w$ *quel numero reale* $\theta \in [0, \pi]$ *tale che*

$$\cos\theta = \frac{g(v,w)}{\| v \| \| w \|}.$$

*Diremo che* $v$ *e* $w$ *sono ortogonali se* $g(v, w) = 0$*, ovvero se l'angolo fra* $v$ *e* $w$ *è* $\frac{\pi}{2}$.

## 7.10 Prodotti hermitiani

Sia $V$ uno spazio vettoriale sui complessi. Un *prodotto Hermitian* è una applicazione

$$h : V \times V \longrightarrow \mathbb{C},$$

che soddisfa alle seguenti proprietà: $\forall v, w, u \in V$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ si ha

a) $h(v + w, u) = h(v, u) + h(w, u)$;

b) $h(v, u + w) = h(v, u) + h(v, w)$;

c) $h(u, v) = \overline{h(v, u)}$. In particolare $h(v, v) \in \mathbb{R}$;

d) $h(\lambda v, w) = \lambda h(v, w)$;

e) $h(u, \lambda w) = \overline{\lambda} h(u, w)$;

f) $h(v, v) \geq 0$. L'uguaglianza vale se e solamente se $v = 0$.

La coppia $(V, h)$ si chiama *spazio Hermitiano*. Sia $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base di $V$. Siano $v, w \in V$. Allora se $v = x_1v_1 + \cdots + x_nv_n$ e $w = y_1v_1 + \cdots + y_nv_n$, allora

$$h(v, w) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i\overline{y}_j h(v_i, v_j) = ([v]_{\mathcal{B}})^t \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(h)\overline{[w]_{\mathcal{B}}},$$

dove $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(h) \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ è una matrice Hermitiana poiché

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(h)_{ij} = h(v_i, v_j) = \overline{h(v_j, v_i)} = \overline{\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(h)_{ji}}.$$

Se $\mathcal{C} = \{w_1, \ldots, w_n\}$ è un altra base di $V$, allora

$$\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(h) = (\mathcal{M}(\mathcal{B}, \mathcal{C}))^t \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(h)\overline{\mathcal{M}(\mathcal{B}, \mathcal{C})}.$$

**Esempio 7.11.**

- $(\mathbb{C}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, *ovvero* $\mathbb{C}^n$ *munito del prodotto Hermitiano standard è uno spazio Hermitiano;*

- *sia* $V = M_{m\times n}(\mathbb{C})$. *L'applicazione* $h(A,B) = \mathrm{Tr}(AB^*)$ *è un prodotto Hermitiano.*

Possiamo definire la norma di un vettore il numero reale $\| X \| = \sqrt{h(v,v)}$. La distanza fra due vettori è il numero reale $d(v,w) = \| v - w \|$.

**Proposizione 7.12.** *Sia* $(V,h)$ *uno spazio Hermitiano. Allora*

$$|h(v,w)| \leq \| v \| \| w \| \; .$$

*L'uguaglianza vale se e solamente se* $v,w$ *sono linearmente dipendenti.*

Diremo che due vettori $v,w$ sono ortogonali se $h(v,w) = 0$.

Da qui in avanti $(V,g)$ denoterà uno spazio euclideo oppure uno spazio Hermitiano.

**Proposizione 7.13.** *Siano* $v_1,\ldots,v_k \in V$ *non nulli e ortogonali a due a due. Allora* $v_1,\ldots,v_k$ *sono linearmente indipendenti.*

*Dimostrazione.* Sia $\alpha_1 v_1 + \cdots \alpha_k v_k = 0$ una combinazione lineare banale. Vogliamo dimostare che i coefficienti della combinazione lineare sono tutti nulli; ovvero i vettori $X_1,\ldots,X_k$ sono linearmente indipendenti. Poiché $\alpha_1 v_1 + \cdots \alpha_k v_k = 0$, si ha

$$\begin{aligned} 0 &= g(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k, v_i) \\ &= \alpha_1 g(v_1, v_i) + \cdots + \alpha_k g(v_k, v_i) \\ &= \alpha_i g(v_i, v_i) \text{ (essendo } v_1,\ldots,v_k \text{ ortogonali a due a due)} \end{aligned}$$

per $i = 1,\ldots,k$. Quindi, essendo $v_i \neq 0$, i coefficienti $\alpha_i$ sono tutti nulli concludendo la dimostrazione. □

Dato un insieme $S \subset V$, definiamo

$$S^\perp = \{w \in V : g(w,s) = 0, \forall s \in S\}.$$

$S^\perp$ è un sottospazio vettoriale di $V$. Infatti se $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$ e $v,w \in S^\perp$, allora per ogni $s \in S$, si ha

$$g(\lambda v + \mu w, s) = \lambda g(v,s) + \mu g(w,s) = 0,$$

ovvero $\lambda v + \mu w \in S^{\perp}$. Inoltre se $S = \mathcal{L}(v_1, \ldots, v_k)$, allora

$$S^{\perp} = \{v \in V : g(v, v_1) = \cdots = g(v, v_k) = 0\}.$$

Sia $S' = \{v \in V : g(v, v_1) = \cdots = g(v, v_k) = 0\}$. Vogliamo dimostrare che $S^{\perp} = S'$. Poiché $S^{\perp} \subset S'$ è sufficiente dimostare che $S' \subset S^{\perp}$. Sia $w \in S'$. Vogliamo dimostrare che

$$\langle w, s \rangle = 0, \ \forall s \in S.$$

Se $s \in \mathcal{L}(v_1, \ldots, v_k)$, allora esistono $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ tali che

$$s = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k.$$

Quindi

$$\begin{aligned} g(w, s) &= g(w, \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k) \\ &= \alpha_1 g(w, v_1) + \cdots + \alpha_k g(w, \alpha_k v_k) \ \ \text{(essendo } g \text{ bilineare)} \\ &= 0 \text{ (essendo } w \in S'\text{)} \end{aligned}$$

da cui segue che $w \in S^{\perp}$.

Se $(V, g)$ è uno spazio euclideo oppure uno spazio Hermitiano, possiamo definire la distanza fra due vettori $v, w \in V$ come lo scalare $d(v, w) := \parallel v - w \parallel$.

**Proposizione 7.14.** *Sia $(V, g)$ uno spazio euclideo. Allora:*

- *Se $v, w \in V$, allora $d(v, w) = d(w, v)$, $d(v, v) \geq 0$ e l'uguaglianza vale se e solamente se $v = w$. Inoltre $d(v, w) \leq d(v, z) + d(z, w)$ per ogni $v, w, z \in V$;*
- *$\parallel X + Y \parallel^2 = \parallel X \parallel^2 + \parallel Y \parallel^2$ se e solamente se $X, Y$ sono ortogonali.*

**Definizione 7.15.** *Una base $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ si dice ortogonale se i vettori che costituiscono la base $\mathcal{B}$ sono a due a due ortogonali; ortonormale se i vettori sono a dau a due ortogonali ed hanno norma unitaria.*

Vediamo un legame fra matrici ortogonali e basi ortonormali di uno spazio euclideo.

**Proposizione 7.16.** *Sia $(V, g)$ uno spazio euclideo, rispettivamente uno spazio Hermitiano, e sia $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base ortonormale. Sia $\mathcal{C} = \{w_1, \ldots, w_n\}$ una base di $V$. La base $\mathcal{C} = \{w_1, \ldots, w_n\}$ è una base ortonormale se e solamente se $\mathcal{M}(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ è una matrice ortogonale, rispettivamente unitaria.*

*Dimostrazione.* Sia $\mathcal{M}(\mathcal{B},\mathcal{C}) = ([w_1]_\mathcal{B}, \ldots, [w_n]_\mathcal{B})$. Gli elementi della matrice $((\mathcal{M}(\mathcal{B},\mathcal{C}))^t\mathcal{M}(\mathcal{B},\mathcal{C}))_{ij} = [w_i]^t_\mathcal{B}[w_j]_\mathcal{B}$. Quindi $\mathcal{M}(\mathcal{B},\mathcal{C})$ è ortogonale se e solamente se $g(w_i, w_j) = [w_i]^t_\mathcal{B}[w_j]_\mathcal{B} = \delta_{ij}$ se e solamente se $\mathcal{C} = \{w_1, \ldots, w_n\}$ è una base ortonormale. □

Vogliamo introdurre un algoritmo per produrre basi ortogonali a partire da una base qualsiasi.

**Proposizione 7.17** (Procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt)**.** *Siano $v_1, \ldots, v_k \in V$ vettori linearmente indipendenti. Allora i vettori*

$$\begin{cases} w_1 = v_1 \\ w_2 = v_2 - \frac{g(v_2,w_1)}{g(w_1,w_1)}w_1 \\ w_3 = v_3 - \frac{g(v_3,w_1)}{g(w_1,w_1)}w_1 - \frac{g(v_3,w_2)}{g(w_2,w_2)}w_2 \\ \vdots \\ w_k = v_{k+1} - \sum_{i=1}^k \frac{g(w_j,v_{k+1})}{g(w_j,w_j)}w_j \end{cases}$$

*sono a due a due ortogonali tali che $\mathcal{L}(w_1, \ldots, w_j) = \mathcal{L}(v_1, \ldots, v_j), j = 1, \ldots, k$.*

**Corollario 7.18.** *Sia $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base di $(V, g)$. Allora esiste una base ortonormale $\mathcal{C} = \{w_1, \ldots, w_n\}$ tale che*

*a)* $\mathcal{L}(w_1, \ldots, w_j) = \mathcal{L}(v_1, \ldots, v_j), j = 1, \ldots, n;$

*b)* $w_j \in (\mathcal{L}(w_1, \ldots, w_{j-1}))^\perp, j = 2, \ldots, n.$

*Quindi ogni spazio euclideo, rispettivamente Hermitiano, ha basi ortonormali.*

*Dimostrazione.* Applicando il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmdit alla base $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ otteniamo una base $\mathcal{C} = \{w_1, \ldots, w_n\}$ ortogonale che soddisfa alle due condizione richieste. La base ortonormale cercata sarà data da

$$\mathcal{C}' = (\frac{w_1}{\parallel w_1 \parallel}, \ldots, \frac{w_n}{\parallel w_n \parallel}).$$

□

## 7.19 Proiezione ortogonali

Sia $W \subset V$ un sottospazio vettoriale di $(V, g)$. $W^\perp = \{v \in V : g(v, w) = 0, \ \forall w \in W\}$.

**Proposizione 7.20.** *Sia $\mathcal{C} = \{w_1, \dots, w_k\}$ una base di $W$. Allora*

$$W^\perp = \{v \in V : g(v, w_1) = \dots = g(v, w_k) = 0\}.$$

*Dimostrazione.* $v \in W^\perp$ se e solamente se $g(v, w) = 0$ per ogni $w \in W$, se e solamente se $\forall\, \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ si ha

$$\alpha_1 g(v, w_1) + \dots + \alpha_k g(v, w_k) = 0,$$

se e solamente se $g(v, w_1) = \dots = g(v, w_k) = 0$. □

**Proposizione 7.21.** *I sottospazi vettoriali, $W$ e $W^\perp$ sono in somma diretta, $V = W \oplus W^\perp$, ovvero*

- $W \cap W^\perp = \{0\}$*;*
- $\dim W + \dim W^\perp = \dim V$*.*

*Dimostrazione.* Sia $u \in W \cap W^\perp$. Allora $g(u, u) = 0$ da cui segue $u = 0$. Applicando la formula di Grassman otteniamo che $\dim(W + W^\perp) = \dim W + \dim W^\perp \leq \dim V$. Sia $\mathcal{C} = \{w_1, \dots, w_k\}$ una base di $W$. Definiamo

$$T : V \longrightarrow V \qquad T(v) = g(v, w_1)w_1 + \dots + g(v, w_k)w_k.$$

L'applicazione $T$ è lineare, $\operatorname{Im} T \subset W$ e $\operatorname{Ker} T = W^\perp$. Applicando l Teorema dell dimensione si ha

$$\dim V = \dim ImT + \dim KerT \leq \dim W + \dim W^\perp.$$

Quindi

$$\dim V = \dim W + \dim W^\perp, \text{ e } \operatorname{Im} T = W.$$

□

**Definizione 7.22.** *Sia $W$ un sottospazio vettoriale di $(V, g)$ e sia $\mathcal{C} = \{w_1, \dots, w_k\}$ una base ortonormale di $W$. Si dice proiezione ortogonale di $V$ su $W$ l'applicazione*

$$P_W(v) = g(v, w_1)w_1 + \dots + g(v, w_k)w_k.$$

Si osservi che $ImP_W = W$ e $KerP_W = W^\perp$.

**Proposizione 7.23.** *Sia $v \in V$. Esiste un unico $u \in W$ tale che $v - u \in W^\perp$. Inoltre, se $\mathcal{C} = \{w_1, \dots, w_k\}$ è una base ortonormale di $W$, allora $u = P_W(v) = g(v, w_1)w_1 + \cdots + g(v, w_k)w_k$.*

*Dimostrazione.* sia $w \in W$. Allora $w = \alpha_1 w_1 + \cdots \alpha_k w_k$. $u - w \in W^\perp$ se e solamente se $g(v - w, w_j) = 0$ per ogni $j = 1, \dots, k$, se e solamente se $\alpha_j = g(v, w_j)$ da cui segue l'unicità. $\square$

### 7.23.1 Metodi di calcolo

Sia $W \subset (V, g)$. Vogliamo calcolare una base ortonornale di $W$ e di $W^\perp$ rispettivamente. Sia $\mathcal{C} = \{w_1, \dots, w_k\}$ una base di $W$. Possiamo completarla ad una base di $V$ che indicheremo con $\mathcal{C} = \{w_1, \dots, w_n\}$. Applichiamo Gram-Schmidt a $\mathcal{B}$ otteniamo una base ortonormale $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ di $V$ che soddisfa alle seguenti proprietà: $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_k\}$ è una base ortonornale di $W$ poiché $\mathcal{L}(v_1, \dots, v_k) = \mathcal{L}(w_1, \dots, w_k)$; i vettori $\{v_{k+1}, \dots, v_n\}$ formano una base ortonormale di $W^\perp$.

# Capitolo 8

# Endomorfismi Diagonalizzabili e Teorema spettrale

## 8.1 Teoria spettrale

Sia $V$ uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$. Sia $T : V \longrightarrow V$ un endomorfismo, ovvero una applicazione lineare di $V$ in se stesso. Un vettore $v$ non nullo si chiama *autovettore* di $T$ realtivo *all'autovaolore* $\lambda \in \mathbb{K}$ se si ha

$$T(v) = \lambda v.$$

L'insieme degli autovalori di $T$, si chiama lo spettro di $T$ e si indicherà con $sp(T) = \{\lambda \in \mathbb{K} : \ \exists v \in V$ non nullo tale che $T(v) = \lambda v\}$. Dato $\lambda \in \mathbb{K}$ definiamo $V_\lambda = \{v \in V : T(v) = \lambda v\}$. Si noti che $V_\lambda = Ker(T - \lambda Id)$. Quindi $V_\lambda$ è un sottospazio vettoriale di $V$ . Per definizione di spettro, $V_\lambda \neq \{0\}$ se e solamente se $\lambda \in sp(T)$. Inoltre: $\lambda \in sp(T)$ se e solamente se esiste $v \in V$ non nullo, tale che $T(v) = \lambda v$, ovvero se e solamente se $(T - \lambda Id)(v) = 0$ con $v \neq 0$ e quindi se e solamente se $(T - \lambda Id)$ non è invertibile. Quindi abbiamo dimostrato la seguente proposizione.

**Proposizione 8.2.** *$\lambda \in sp(T)$, i.e. $\lambda$ è un autovalore di $T$, se e solamente se $T - \lambda Id$ non è invertibile.*

Se $\lambda \in sp(T)$, allora $V_\lambda$ è chiamato *l'autospazio relativo all'autovalore* $\lambda$. Autospazi relativi ad autovalori distinti hanno intersezione ridotta al solo vettore nullo.

**Proposizione 8.3.** *Sia $T : V \longrightarrow V$ una applicazione lineare e siano $v_1, \ldots, v_m$ autovettori corrispondenti ad autovalori distinti. Allora $v_1, \ldots, v_m$ sono linearmente indipendenti. In particolare*

$$V_{\lambda_j} \cap (V_{\lambda_1} + \cdots + V_{\lambda_{j-1}} + V_{\lambda_{j+1}} + \cdots + V_{\lambda_m}) = \{0\},$$

*per $j = 1, \ldots, m$.*

*Dimostrazione.* la dimostrazione sarà fatta per induzione sul numero di autovettori. Se $m = 1$ la proposizione è banalmente verificata. Supponiamo sia vero per $m$ vettori. Dimostriamolo per m+1. Per ipotesi induttiva i vettori $v_1, \ldots, v_m$ sono linearmente indipendenti. Supponiamo per assurdo che $v_{m+1}$ sia combinazione lineare di $v_1, \ldots, v_m$. Allora

$$v_{m+1} = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m,$$

da cui segue, applicando $T$ a destra e a sinistra, che

$$\lambda_{m+1} v_{m+1} = \lambda_1 \alpha_1 v_1 + \cdots + \lambda_m \alpha_m v_m.$$

Se moltiplichiamo la prima equazione per $\lambda_{m+1}$ e poi le sottriamo la seconda otteniamo

$$(\lambda_{m+1} - \lambda_1)\alpha_1 v_1 + \cdots + (\lambda_{m+1} - \lambda_m)\alpha_m v_m = 0.$$

Poiché $v_1, \ldots, v_m$ sono linearmente indipendenti, ne segue che i coefficienti sono tutti nulli:

$$\alpha_1(\lambda_{m+1} - \lambda_1) = \ldots = \alpha_m(\lambda_{m+1} - \lambda_m) = 0$$

Per ipotesi gli autovalori sono distinti. Quindi $\alpha_1 = \cdots = \alpha_m = 0$, ovvero $v_{m+1} = 0$. Assurdo poiché $v_{m+1}$ è un vettore non nullo. Quindi i vettori $v_1, \ldots, v_{m+1}$ sono linearmente indipendenti. $\square$

**Definizione 8.4.** *Sia $T : V \longrightarrow V$ un endomorfismo. Diremo che $T$ è diagonalizzabile se esiste una base di $V$ formata da autovettori di $T$.*

**Corollario 8.5.** *Sia $T : V \longrightarrow V$ un endomorfismo con $n = \dim V$ autovalori distinti in $\mathbb{K}$. Allora $T$ è diagonalizzabile.*

**Osservazione 8.6.** *Sia $T : V \longrightarrow V$ un endomorfismo di $V$. Per definizione $T$ è diagonalizzabile se esiste una base $\mathcal{B}$ di $V$ formata da autovettori. La matrice associata a $T$ rispetto ad una base formata da autovettori è una matrice diagonale. Quindi, $T$ è diagonalizzabile se e solamente se esiste una* *base $\mathcal{B}$ tale che $\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(T)$ è una matrice diagonale. Gli elementi sulla diagonale principale di $\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(T)$ sono gli autovalori di $T$. Poiché matrici simili rappresentano matrici associate ad un operatore rispetto a basi distinti, ne segue che se $\mathcal{C}$ è una base di $V$, allora $T$ è diagonalizzabile se e solamente se $\mathcal{M}_{\mathcal{C},\mathcal{C}}(T)$ è simile ad una matrice diagonale.*

Vogliamo calcolare gli autovalori di un endomorfismo $T : V \longrightarrow V$.

Sia $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base di $V$. Possiamo associare un matrice a $T$; $\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(T)$ tale che $[T(v)]_{\mathcal{B}} = \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(T)[v]_{\mathcal{B}}$. Lo scalare $\lambda$ è un autovalore di $T$ se e solamente se $T - \lambda Id$ è non invertibile ovvero se e solamente se $det(\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(T) - \lambda Id_n) = 0$. Quindi gli autovalori di $T$ sono le radice del polinomio $p_{\mathcal{B}}(t) = det(\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(T) - tId_n)$, il quale è un polinomio di grado $n = \dim V$.

**Proposizione 8.7.** *Il polinomio $p_{\mathcal{B}}(t)$ non dipende dalla base scelta e si indicherà con $p_T(t)$ e verrà chiamato* il polinomio caratteristico di $T$. *Inoltre*

$$p_T(t) = (-1)^n t^n + (-1)^{n-1}(\mathrm{Tr}(\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(T))t^{n-1} + \cdots + det(\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(T)).$$

*Dimostrazione.* Proveremo solo che il polinomio caratteristico non dipende dalla base scelta. Sia $\mathcal{C} = \{w_1, \ldots, w_n\}$ una base di $V$. Allora

$$\mathcal{M}_{\mathcal{C},\mathcal{C}}(T) = (\mathcal{M}(\mathcal{B},\mathcal{C}))^{-1}\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(T)\mathcal{M}(\mathcal{B},\mathcal{C}),$$

da cui segue

$$\begin{aligned} det(\mathcal{M}_{\mathcal{C},\mathcal{C}}(T) - tId_n) &= det((\mathcal{M}(\mathcal{B},\mathcal{C}))^{-1}(\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(T) - tId)\mathcal{M}(\mathcal{B},\mathcal{C})) \\ &= det((\mathcal{M}(\mathcal{B},\mathcal{C}))^{-1})det(\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(T) - tId)det((\mathcal{M}(\mathcal{B},\mathcal{C})) \\ &= det(\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(T) - tId). \end{aligned}$$

Quindi $\lambda \in \mathbb{K}$ è un autovalore se e solamente se $T - \lambda Id$ non è invertibile se e solamente se $det(\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(T) - \lambda Id) = 0$ se e solamente se $det(\mathcal{M}_{\mathcal{C},\mathcal{C}}(T) - \lambda Id) = 0$. □

**Definizione 8.8.** *Sia $\lambda \in sp(T)$. Definiamo la* molteplicità algebrica *di $\lambda$ la sua molteplicità come radice del polinomio caratteristico e che indicheremo con $m_a(\lambda)$;* molteplicità geometrica *di $\lambda$ è la dimensione dell'autospazio $V_\lambda$ e si indicherà con $m_g(\lambda) = \dim V_\lambda$.*

**Osservazione 8.9.** *Sia $T : V \longrightarrow V$ e sia $\mathcal{B}$ una base di $V$. La matrice $\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(T)$ è l'unica matrice $n \times n$ tale che il seguente diagramma*

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\mathcal{F}_{\mathcal{B}}"] & V \arrow[d, "\mathcal{F}_{\mathcal{B}}"] \\ \mathbb{K}^n \arrow[r, "L_{\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(T)}"'] & \mathbb{K}^n \end{tikzcd}$$

*è commutativo. Inoltre $\mathcal{M}_{\mathcal{C},\mathcal{C}}(L_{\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(T)}) = \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(T)$, da cui segue che:*

*a) $p_T(t) = p_{L_{\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(T)}}(t)$. Quindi $\lambda \in sp(T)$ se e solamente se $\lambda \in sp(L_{\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(T)})$. Inoltre la molteplicità algebrica di $\lambda$ come autovalore coincide con la molteplicità algebrica di $\lambda$ come autovalore di $L_{\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(T)}$.*

*b) $v$ è autovettore relativo all'autovalore $\lambda$ per l'endomorfismo $T$ se e solamente se $[v]_{\mathcal{B}}$ è un autovettore realtivo all'autovalore $\lambda$ per l'operatore $L_{\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(T)}$. Infatti, $T(v) = \lambda v$ se e solamente se $[T(v)]_{\mathcal{B}} = \lambda[v]_{\mathcal{B}}$, poiché $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}$ è un isomorfismo lineare, se e solamente se $\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(T)[v]_{\mathcal{B}} = \lambda[v]_{\mathcal{B}}$ se e solamente se*

$$L_{\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(T)}([v]_{\mathcal{B}}) = \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(T)[v]_{\mathcal{B}} = \lambda[v]_{\mathcal{B}}$$

*se e solamente se $[v]_{\mathcal{B}}$ è un autovettore di $L_{\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(T)}$ relativo all'autovalore $\lambda$. In particolare la molteplicità geometrica di $\lambda$ rispetto a $T$ coincide con la molteplicità geometrica di $\lambda$ come autovalore di $L_{\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(T)}$.*

*c) Per i punti precedenti possiamo affermare che un opearatore $T$ è diagonalizzabile se e solamente se $L_{\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(T)}$ è diagonalizzabile.*

**Proposizione 8.10.** *$m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)$.*

*Dimostrazione.* Sia $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_{m_g(\lambda)}\}$ una base di $V_\lambda$. Possiamo completarla a base di $V$; $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Allora

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(T) = \begin{pmatrix} \lambda Id_{m_g(\lambda)\times m_g(\lambda)} & * \\ 0 & D \end{pmatrix}.$$

quindi

$$p_T(t) = (t-\lambda)^{m_g(\lambda)} \det(D - \lambda Id_{(n-m_g(\lambda))\times(n-m_g(\lambda))}),$$

da cui segue che $m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)$. $\square$

**Teorema 8.11.** *Sia $T : V \longrightarrow V$ un endomorfismo. Le seguenti condizioni sono equivalenti:*

*a) $T$ è diagonalizzabile;*

*b) tutti gli autovalori sono in $\mathbb{K}$ e per ogni $\lambda \in sp(T)$ si ha $m_a(\lambda) = m_g(\lambda)$;*

*c) se $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ sono tutti gli autovalori di $T$, allora*

$$\sum_{i=1}^{k} m_g(\lambda_i) = \dim V$$

## 8.12 Diagonalizzazione di matrici

**Definizione 8.13.** *Sia $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ dove $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oppure $\mathbb{C}$. Diremo che $A$ è diagonalizzabile se esiste una matrice $P$ invertibile tale che $P^{-1}AP$ è una matrice diagonale.*

Dalla definizione segue che una matrice quadrata $A$ è diagonalizzabile se e solamente se $A$ è simile ad una matrice diagonale. Quindi otteniamo che

**Proposizione 8.14.** *$A$ è diagonalizzabile se e solamente se l'operatore lineare $L_A : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n$ è diagonalizzabile.*

*Dimostrazione.* $\mathcal{M}_{\mathcal{C},\mathcal{C}}(L_A) = A$, dove $\mathcal{C}$ è la base canonica. Quindi $L_A$ è diagonalizzabile se e solamente se $A$ è simile ad un matrice diagonale.

Una dimostrazione costruttiva è la seguente. Sia $P$ una matrice invertibile tale che $P^{-1}AP = D$ dove $D$ è una matrice diagonale; ovvero $AP = PD$. Definiamo $\mathcal{C} = \{w_1, \ldots, w_n\}$ dove $w_i = P^i$ è la $i$-esima colonna di $P$. $\mathcal{C}$ è una base di $\mathbb{K}^n$ poiché $P$ è invertibile. Inoltre

$$L_A(w_i) = Aw_i = AP^i = (AP)^i = (PD)^i = d_{ii}P^i,$$

ovvero $w_i$ è un autovettore relativo all'autovalore $d_{ii}$. Quindi $L_A$ è diagonalizzabile.

Viceversa supponiamo che $L_A$ sia diagonalizzabile. Allora esiste una base $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ formata da autovettori di $L_A$. Sia $P = (v_1, \ldots, v_n)$. Poiché i vettori formano una base allora $P$ è invertibile. Vogliamo dimostrare che $P^{-1}AP$ è una matrice diagonale. Infatti, se indichiamo con $\mathcal{C}$ la base canonica, si ha

$$P^{-1}AP = \mathcal{M}(\mathcal{B}, \mathcal{C})\mathcal{M}_{\mathcal{C},\mathcal{C}}(L_A)\mathcal{M}(\mathcal{C}, \mathcal{B}) = \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(L_A)$$

ed essendo $\mathcal{B}$ una base formata da autovettori di $L_A$ ne segue che $\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(L_A)$ è diagonale. $\square$

Chiameremo autovalori ed autovettori di $A$ gli autovalori ed gli autovettori di $L_A$; ovvero $\lambda \in \mathbb{K}$ è un autovalore se esiste un vettore $v \in \mathbb{K}^n$ non nullo, tale che $Av = \lambda v$. Analogamento possiamo definire l'autospazio relativo all'autovalore $\lambda$ come $V_\lambda = \{v \in \mathbb{K}^n : Av = L_A(v) = \lambda v\}$ ed il polinomio caratteristico di $A$ come $p_A(t) = det(A - tId)$. Si osservi che il polinomio caratteristico di $A$ coincide con il polinomio caratteristico di $L_A$ poiché $\mathcal{M}_{\mathcal{C},\mathcal{C}}(L_A) = A$ dove $\mathcal{C}$ è la base canonica di $\mathbb{K}^n$.

**Teorema 8.15.** *Sia $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$. Le seguenti condizioni sono equivalenti:*

*a) $A$ è diagonalizzabile;*

*b) tutti gli autovalori sono in $\mathbb{K}$ e per ogni $\lambda \in sp(T)$ si ha $m_a(\lambda) = m_g(\lambda)$;*

*c) se $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ sono tutti gli autovalori di $T$, allora*

$$\sum_{i=1}^{k} m_g(\lambda_i) = \dim V$$

Vogliamo dimostrare che una matrice simmetrica è sempre diagonalizzabile in base ortonormale. Sia $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ una matrice simmetrica.

**Lemma 8.16.** *Gli autovalori di una matrice simmetrica sono tutti reali.*

*Dimostrazione.* Consideriamo $L_A^{\mathbb{C}} : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ così definito: $L_A^{\mathbb{C}}(X) = AX$. È un operatore lineare complesso ed i suoi autovalori sono le radici del polinomio $det(A - tId)$, ovvero il polinomio caratteristico di $A$. Inoltre vale la seguente formula: Se indichiamo con $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto Hermitiano canonico, allora

$$\langle L_A^{\mathbb{C}}(X), Y \rangle = \langle X, L_A^{\mathbb{C}}(Y) \rangle,$$

per ogni $X, Y \in \mathbb{C}^n$ Infatti

$$\begin{aligned} \langle L_A^{\mathbb{C}}(X), Y \rangle &= (AX)^t \overline{Y} \\ &= X^t A^t \overline{Y} \\ &= X^t \overline{AY} \\ &= \langle X, AY \rangle \end{aligned}$$

poiché $A$ è simmetrica e reale. Sia $X$ un autovettore relativo all'autovalore $\lambda$. Allora

$$\langle AX, X\rangle = \lambda\langle X, X\rangle.$$

Per la formula anteriore otteniamo che

$$\langle AX, X\rangle = \langle X, AX\rangle = \overline{\lambda}\langle X, X\rangle,$$

poiché $\langle\cdot,\cdot\rangle$ è il prodotto Hermitiano canonico. Inoltre $\langle X, X\rangle \neq 0$ da cui segue $\lambda = \overline{\lambda}$, ovvero $\lambda \in \mathbb{R}$. □

Un altra proprietà interessante è la seguente.

**Proposizione 8.17.** *Sia $A$ una matrice simmetrica di ordine $n$ e siano $v$ e $w$ autovettori corrispondenti autovalori distinti $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Allora $\langle v, w\rangle = 0$. Quindi $V_\lambda \subset V_\mu^\perp$ se $\lambda \neq \mu$.*

*Dimostrazione.* Se $A$ è simmetrica vale la seguente proprietà:

$$\langle AX, Y\rangle = \langle X, AY\rangle,$$

dove $\langle\cdot,\cdot\rangle$ è il prodotto scalare canonico. Infatti

$$\begin{aligned}\langle AX, Y\rangle &= (AX)^t Y \\ &= X^t A^t Y \\ &= X^t(AY) \text{ essendo } A \text{ simmetrica)} \\ &= \langle X, AY\rangle.\end{aligned}$$

Siano $v, w$ autovettori relativi agli autovalori $\lambda$ e $\mu$ rispettivamente. Allora

$$\begin{aligned}\langle Av, w\rangle &= \lambda\langle v, w\rangle \\ &= \langle v, Aw\rangle \text{ (essendo } A \text{ simmetrica} \\ &= \mu\langle v, w\rangle.\end{aligned}$$

Quindi

$$\lambda\langle v, w\rangle = \mu\langle v, w\rangle \Rightarrow (\mu - \lambda)\langle v, w\rangle = 0,$$

da cui segue, essendo $\lambda$ e $\mu$ distinti, $\langle v, w\rangle = 0$. □

**Teorema 8.18** (Teorema spettrale)**.** *Sia $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ una matrice simmetrica. Allora esiste una matrice ortogonale $P$ tale che $P^tAP$ è diagonale. Ovvero esiste una base ortonormale $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ di $\mathbb{R}^n$ formata da autovettori di $A$.*

*Dimostrazione.* Per induzione su $n$. Se $n = 1$ è vero. Supponiamo di aver dimostrato il Teorema per $n$ e proviamolo per $n+1$. Per il lemma anteriore una matrice simmetrica ha tutti gli autovalori reali. Sia $\lambda \in \mathbb{R}$ un autovalore. Allora esiste $v \in \mathbb{R}^n$ non nullo tale che $Av = \lambda_1 v$. Denotiamo con $v_1 = \frac{v}{\|v_1\|}$ il quale è ancora un autovettore di $A$ relativo all'autovalore $\lambda_1$. Completiamo $v_1$ ad una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ che denotiamo con $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_{n+1}\}$. Allora

- $P = \mathcal{M}(\mathcal{C}, \mathcal{B}) = (v_1, \dots, v_{n+1})$ è una matrice ortogonale;
- $P^t AP = \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{array}\right)$

dove $B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ è una matrice simmetrica. Per ipotesi induttiva esiste una matrice ortogonale $Q$ di ordine $n$ tale che

$$Q^t BQ = \begin{pmatrix} \lambda_2 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Sia $\tilde{Q} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline \vdots & & Q & \\ 0 & & & \end{array}\right) \in M_{n+1\times n+1}(\mathbb{R})$. $\tilde{Q}$ è una matrice ortogonale da cui segue che anche $P\tilde{Q}$ è una matrice ortogonale. Inoltre

$$(P\tilde{Q})^t A(P\tilde{Q}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_{n+1} \end{pmatrix} = D.$$

La base cercata è $\mathcal{C} = \{w_1, \dots, w_{n+1}\}$ dove $w_i = (P\tilde{Q})^i$. Infatti, si ricordi che $(P\tilde{Q})e_i$ è la $i-$esima colonna della matrice $(P\tilde{Q})$, si ha

$$Aw_i = A(P\tilde{Q})e_i = (P\tilde{Q})De_i = \lambda_i(P\tilde{Q})e_i = \lambda_i v_i.$$

□

**Corollario 8.19.** *Sia $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. $A$ è simmetrica se e solamente se esiste una matrice ortogonale $P$ tale che $P^t AP$ è una matrice diagonale.*

*Dimostrazione.* La parte difficile è il teorema spettrale. Viceversa se $P^tAP = D$ matrice diagonale, allora

$$A = PDP^t$$

e

$$A^t = (PDP^t)^t = PD^tP^t = PDP^t,$$

ovvero $A = A^t$ come si voleva dimostrare. $\square$

## 8.20 Metodi di calcolo

Vediamo quali sono i passi per dimostrare se una matrice quadrata $A$ è diagonalizzabile oppure no e come si calcola la matrice $P$ invertibile tale che $P^{-1}AP$ diagonale.

a) Per calcolare gli autovalori bisogna calcolare le radici del polinomio caratteristico $p_A(t)$. Se tutte le radici stanno nel campo considerato allora continuo; altrimenti la matrice $A$ non è diagonalizzabile;

b) Se $\lambda$ è un autovalore calcoliamo

$$m_g(\lambda) = \dim Ker(A - \lambda Id) = n - rg(A - \lambda Id),$$

come conseguenza del teorema della dimensione. Quindi se $m_a(\lambda) = m_g(\lambda)$ per ogni autovalore, allora la matrice è diagonalizzabile; altrimenti no;

c) Calcoliamo una base di $V_\lambda$ per ogni autovalore che indicherò con $\mathcal{B}_\lambda$. Allora $\mathcal{B} = \mathcal{B}_{\lambda_1} \cup \cdots \cup \mathcal{B}_{\lambda_s} = (v_1, \ldots, v_n)$ è una base di $\mathbb{R}^n$ formata da autovettori di $A$;

d) Se indico con $P = (v_1, \ldots, v_n)$ la matrice le cui colonne sono i vettori $v_1, \ldots, v_n$ rispettivamente, allora

$$P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

è una matrice diagonale e gli scalari $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sono gli autovalori dei autovettori $v_1, \ldots, v_n$. Per provare questo è sufficiente dimostare che se indico con $e_1, \ldots, e_n$ la base canonica, allora la colonna $i$-esima della matrice $P^{-1}AP$ è un multiplo di $e_i$; ovvero tutti gli elementi al di fuori della diagonale principale sono nulli. Si osservi che se $Q$ è una matrice, allora la $i$-esima colonna di $Q$ è data da $Qe_i$. In particolare $Pe_i = v_i$ da cui segue che $P^{-1}v_i = e_i$. Adesso calcoliamo la $i-$esima colonna della matrice $P^{-1}AP$:

$$P^{-1}APe_i = P^{-1}Av_i = \lambda_i P^{-1}v_i = \lambda_i e_i,$$

ovvero la matrice $P^{-1}AP$ è diagonale.

e) Supponiamo che $A$ sia simmetrica. Il teorema spettrale garantisce che $A$ è diagonalizzabile e che gli autospazi sono ortogonali. Quindi per calcolare la matrice $P$ ortogonale si può procedere nella seguente maniera. Sia $\mathcal{B}_\lambda$ una base di $V_\lambda$. Applicao Gram-Schimdt et ottengo una base ortononomale di $V_\lambda$ che indicheremo con $\mathcal{B}'_\lambda$. Se $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ sono gli autovalori di $A$, allora

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}'_{\lambda_1} \cup \cdots \cup \mathcal{B}'_{\lambda_s} = (v_1, \ldots, v_n)$$

è una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ formata da autovettori di $A$. Quindi $P = (v_1, \ldots, v_n)$ è una matrice ortogonale che verifica $P^tAP = D$ diagonale.

Sia $T : V \longrightarrow V$ un operatore lineare. Per determinare se è $T$ diagonalizzabile oppure no, fissiamo una base di $V$ che indichiamo con $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Noi sappiamo che l'operatore $T : V \longrightarrow V$ è diagonalizzabile se e solamente se $\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(T)$ è diagonalizzabile. Inoltre

- $p_T(t) = p_{\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(T)}(t)$;
- $m_g(\lambda) = n - rg(\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(T) - \lambda Id)$.

Se $w_1, \ldots, w_n$ è una base di $\mathbb{K}^n$ formata da autovettori di $\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(T)$, dove

$$w_i = \begin{bmatrix} w_{1i} \\ \vdots \\ w_{ni} \end{bmatrix},$$

allora $(\mathcal{F}_{\mathcal{B}}^{-1}(w_1), \ldots, \mathcal{F}_{\mathcal{B}}^{-1}(w_n))$ è una base formata da autovettori di $T$ e

$$\mathcal{F}_{\mathcal{B}}^{-1}(w_i) = w_{1i}v_1 + \cdots + w_{ni}v_n.$$

## 8.21 Riflessioni e rotazioni

Sia $L_A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ con $A$ matrice ortogonale. Allora, se

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

ne segue che

$$\begin{cases} a^2 + c^2 = 1 \\ ab + cd = 0 \\ b^2 + d^2 = 1 \end{cases}$$

Quindi esistono $\theta, \psi \in [0, \pi]$ tale che

$$\begin{array}{ll} a = \cos\theta & c = \sin\theta \\ b = \cos\psi & d = \sin\psi \end{array}.$$

Inoltre dalla secondo equazione si deduce che $\cos\theta\cos\psi + \sin\theta\sin\psi = \cos(\theta - \psi) = 0$, ovvero

$$\psi = \theta + \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

Se $k$ è pari allora

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix} \qquad (\det(A) = -1);$$

se $k$ è dispari, allora

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \qquad (\det(A) = 1).$$

Vogliamo studiare gli operatori $L_A$ dove $A$ è una matrice ortogonale di ordine 2. Se $k$ è pari, allora

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix},$$

$P_A(t) = t^2 - 1$ e l'endomorfismo $L_A$ ammette due autovalori distinti: $t = 1, -1$. Quindi $L_A$ è diagonalizzabile. Calcoliamo l'autospazio relativo all'autovalore 1. Dobbiamo trovare le soluzioni del sistema lineare omogeneo la cui matrice dei coefficienti è:

$$\begin{bmatrix} \cos\theta - 1 & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta - 1 \end{bmatrix}.$$

Poiché $A$ ha due autovalori distinti, allora $rg(A - Id) = rg(A + Id) = 1$ per cui basta risolvere una equazione; per esempio la prima:

$$(\cos\theta - 1)x + (\sin\theta)y = 0.$$

Si osservi che $\cos\theta - 1 = -2\sin^2(\frac{\theta}{2})$ e $\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$. Allora l'equazione precedente diventa

$$-2\sin^2\frac{\theta}{2}x + 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}y = 0,$$

e le soluzioni sono:

$$V_1 = \mathcal{L}(\begin{bmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{bmatrix}).$$

Analogomente, per calcolare l'autospazio relativo all'autovalore $-1$, devo risolvere l'equazione

$$(\cos\theta + 1)x + (\sin\theta)y = 0,$$

ovvero

$$2\cos^2\frac{\theta}{2}x + 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}y = 0,$$

e le soluzioni sono:

$$V_{-1} = \mathcal{L}(\begin{bmatrix} -\sin\frac{\theta}{2} \\ \cos\frac{\theta}{2} \end{bmatrix}).$$

Indichiamo con $\mathcal{B} = \{\begin{bmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\sin\frac{\theta}{2} \\ \cos\frac{\theta}{2} \end{bmatrix}\}$. Si noti che $\mathcal{B}$ è una base ortonormale. Allora

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(L_A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

ovvero l'operatore $L_A$ rappresenta la riflessione rispetto alla retta passante per l'origine e che ha come direzione il vettore

$$\begin{bmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{bmatrix}.$$

Se $k$ è pari, allora $p_A(t) = t^2 + 1$ e quindi $L_A$ non è diagonalizzabile. Osserviamo che

$$\langle Ae_1, e_1\rangle = \langle Ae_2, e_2\rangle = \cos\theta,$$

dove $\langle\cdot,\cdot\rangle$ è il prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^2$ da cui segue se $v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, allora

$$\begin{aligned}\langle Av, v\rangle &= x^2\langle Ae_1, e_1\rangle + xy\langle Ae_1, e_2\rangle + xy\langle Ae_2, e_1\rangle + y^2\langle Ae_2, e_2\rangle \\ &= (x^2+y^2)\cos\theta + xy\sin\theta - xy\sin\theta \\ &= \parallel v \parallel^2 \cos\theta.\end{aligned}$$

Allora

$$\frac{\langle Av, v\rangle}{\parallel v \parallel \parallel Av \parallel} = \cos\theta,$$

ovvero l'operatore $L_A$ è una rotazione attorno all'origine di angolo $\theta$.

**Proposizione 8.22.** *Sia $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ una matrice ortogonale e sia $L_A$ l'applicazione lineare indotta. $L_A$ è una rotazione se e solamente se* $\det(A) = 1$*; $L_A$ è una riflessione se e solamente se* $\det(A) = -1$.

**Corollario 8.23.** *La composizione di due rotazioni è ancora una rotazione; la composizione di due riflessioni è una rotazione; la composizione di una rotazione ed una riflessione è una riflessione.*

*Dimostrazione.* Noi sappiamo che $L_A \circ L_B = L_{AB}$ e che per il teorema di Binet $\det(AB) = \det(A)\det(B)$. Dalla discussione precedente segue la tesi. □

**Definizione 8.24.** *Una applicazione biunivoca $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ è un movimento rigido se $T$ preserva le distanze, ovvero $d(T(A), T(B)) = d(A, B)$, per ogni $A, B \in \mathbb{R}^3$.*

**Esempio 8.25.**

- *sia $v \in \mathbb{R}^3$. Definiamo $T_v : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $w \mapsto v + w$ la traslazione lungo $v$. È facile verificare che $T_v$ preserva la distanza, è biunivoca e la sua inversa è $(T_v)^{-1} = T_{-v}$. Inoltre, $T_{v_1} \circ T_{v_2} = T_{v_1+v_2}$;*
- *sia $A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ una matrice ortogonale. Allora $L_A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ è un movimento rigido ed è chiamata isometria lineare.*

**Teorema 8.26.** *Ogni movimento rigido è la composizione di una traslazione e di una isometria lineare.*

*Dimostrazione.* Supponiamo inizialmente che $T(0) = 0$. Quindi

$$d(T(v), T(0)) = \parallel T(v) \parallel = d(v, 0) = \parallel v \parallel, \ \forall v \in \mathbb{R}^3.$$

ovvero

$$\langle T(v), T(v)\rangle = \langle v, v\rangle,\ \forall v \in \mathbb{R}^3$$

Dall'uguaglianza

$$d(T(v), T(w)) = d(v, w),$$

si ottiene che $\| T(v) - T(w) \| = \| v - w \|$; ovvero

$$\langle T(v) - T(w), T(v) - T(w)\rangle = \langle v - w, v - w\rangle.$$

Sviluppando i calcoli ed usando l'uguaglianza precedente si ottiene

$$\langle T(v), T(w)\rangle = \langle v, w\rangle\ \forall v, w \in V.$$

Vogliamo dimostare che $T$ è una isometria lineare. Siano $v, w \in \mathbb{R}^3$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Calcoliamo

$$\langle T(v + w) - T(v) - T(w), T(v + w) - T(v) - T(w)\rangle,$$

e

$$\langle T(\lambda v) - \lambda T(v), T(\lambda v) - \lambda T(v)\rangle.$$

L'espressione $\langle T(v + w) - T(v) - T(w), T(v + w) - T(v) - T(w)\rangle$ diventa:

$$\begin{aligned}
&= \langle T(v + w), T(v + w)\rangle - 2\langle T(v + w), T(v)\rangle - 2\langle T(v + w), T(w)\rangle + \langle T(v), T(v)\rangle \\
&+ \langle T(w), T(w)\rangle + 2\langle T(v), T(w)\rangle \\
&= \langle v + w, v + w\rangle - 2\langle v + w, v\rangle - 2\langle v + w, w\rangle + \langle v, v\rangle + \langle w, w\rangle + 2\langle v, w\rangle \\
&= 0
\end{aligned}$$

Poiché il prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^n$ è definito positivo, ne segue che $T(v + w) = T(v) + T(w)$. Analogamente

$$\begin{aligned}
\langle T(\lambda v) - \lambda T(v), T(\lambda v) - \lambda T(v)\rangle &= \langle T(\lambda v), T(\lambda v)\rangle - 2\langle T(\lambda v), \lambda T(v)\rangle \\
&+ \lambda^2\langle T(v), T(v)\rangle \\
&= \langle \lambda v, \lambda v\rangle + -2\lambda\langle \lambda v, v\rangle + \lambda^2\langle v, v\rangle \\
&= \lambda^2\langle v, v\rangle - 2\lambda^2\langle v, v\rangle + \lambda^2\langle v, v\rangle \\
&= 0,
\end{aligned}$$

da cui segue che $T(\lambda v) = \lambda T(v)$. Quindi $T$ è lineare ed esiste una matrice $A$ tale che $T = L_A$. Poiché $T$ preserva il prodotto scalare si ottiene che $T(e_1), T(e_2), T(e_3)$ è una base ortonormale. Quindi $A = \mathcal{M}_{\mathcal{C},\mathcal{C}}(T)$ è una matrice ortogonale e $T = L_A$. Se $T(0) = v \neq 0$, allora $T \circ T_{-v}$ è un movimento rigido che fissa l'origine. Allora esiste una matrice ortogonale $A$, tale che $(T \circ T_v) = L_A$; ovvero $T = L_A \circ T_v$ e

$$T(w) = L_A(w) + v.$$

□

**Definizione 8.27.** *Una rotazione di* $\mathbb{R}^3$ *intorno all'origine è una movimento rigido* $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *tale che:*

- $T(0) = 0$*;*
- *esiste* $v \in V$ *tale che* $T(v) = v$*;*
- $T$ *agisce come una rotazione sul piano* $\alpha$ *passante per l'origine di vettore normale* $v$*.*

**Proposizione 8.28.** $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *è una rotazione attorno all'origine se e solamente se esiste una matrice ortogonale di ordine* 3 *con determinante uguale a* 1*, tale che* $T = L_A$*.*

*Dimostrazione.* Sia $A$ una matrice ortogonale di ordine 3 con determinante uguale a 1. Vogliamo dimostrare che $A$ ha 1 come autovalore autovalore. Poiché $A$ ha ordine 3, allora ammette almento un autovalore reale. Si osservi che

$$\langle Av, Av \rangle = \langle v, v \rangle,$$

da cui segue che se $\lambda$ è un autovalore reale, allora $\lambda^2 = 1$; ovvero $\lambda = \pm 1$. Se $\lambda = 1$, allora ho finito. Supponiamo che $\lambda = -1$. Se $A$ ha tutti gli autovalori reali, essendo il determinante il prodotto degli autovalori, si ha che almeno uno degli autovalori deve essere 1; altrimenti il determinate sarebbe uguale a $-1$. Se invece $A$ avesse solo un autovalore reale, gli altri due autovalori sarebbero complessi coniugati il cui prodotto è 1. Infatti se $\lambda$ è radice complessa di un polinomio a coefficienti reali, allora anche il suo coniugato è una radice complessa del polinomio a coefficienti reali. Inoltre, se considero il prodotto Hermitiano canonico di $\mathbb{C}^3$, ottendo che, essendo $A$ in particolare una matrice unitaria

$$\langle Av, Av \rangle_{\mathbb{C}} = \langle v, v \rangle_{\mathbb{C}},$$

dove $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{C}}$ indica il prodotto hermitiano canonico di $\mathbb{C}^3$. Quindi se $\lambda$ è autovalore se segue che $|\lambda|^2 = 1$. Nel nostro caso questo forzerebbe il determinante di $A$ ad essere uguale a $-1$; assurdo. Quindi esiste $v \in \mathbb{R}^3$ tale che $Av = v$.

**Lemma 8.29.** *Sia* $A$ *una matrice ortonale di ordine* $n$*. e Se* $W \subset \mathbb{R}^n$ *un sottospazio preservato da* $A$*, ovvero* $L_A(W) \subset W$*. Allora* $W^\perp$ *è preservato da* $A$

*Dimostrazione.* Sia $v \in W^\perp$. Dobbiamo dimostrare che $Av \in W^\perp$. Sia $w \in W$. Allora

$$\langle Av, w\rangle = \langle v, A^{-1}w\rangle = 0,$$

poiché se $W$ è $A$-invariante, allora $W$ è anche $A^{-1}$-invariante. Quindi $W^\perp$ è $A$ invariante concludendo la dimostrazione $\square$

Completiamo $\frac{v}{\|v\|}$ a base ortonornale di $\mathbb{R}^3$: $\mathcal{B} = \{\frac{v}{\|v\|}, w_1, w_2\}$. Allora

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(L_A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} \\ 0 & \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} \end{bmatrix}.$$

Se indichiamo con

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} \end{bmatrix}.$$

$\mathcal{B}$ è una base ortonormale e quindi $\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(L_A)$ è ortogonale. È facile verificare che $\tilde{A}$ è una matrice ortogonale il cui determinante è $\det(\tilde{A}) = \det(A) = 1$; ovvero una rotazione del piano $W = \langle v\rangle^\perp$.

Viceversa, sia $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una rotazione. Poiché $T(0) = 0$, allora $T$ è una isometria lineare, ovvero $T = L_A$ dove $A$ è una matrice ortogonale. Vogliamo dimostrare che $A$ ha determinante uguale a 1. Sia $v$ un autovettore unitario relativo all'autovalore 1. Completiamo $v$ a base ortonormale di $\mathbb{R}^3$: $\mathcal{B} = (v, w_1, w_2)$. $w_1, w_2$ è una base del piano di vettore normale $v$. Vogliamo dimostrare che $A$ ha determinante uguale a 1.

La matrice associata a $T$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ è

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} \\ 0 & \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} \end{bmatrix},$$

dove $\tilde{A}$ è una matrice ortogonale che rappresenta una rotazione nel piano ortogonale a $v$. Poiché matrici simili hanno lo stesso determinante, ne segue che se $T = L_A$, allora $A$ è una matrice ortogonale con $\det(A) = \det \tilde{A} = 1$ poiché $\tilde{A} = \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} \end{bmatrix}$, è una rotazione del piano passante per l'orgine normale al vettore $v$. $\square$

## 8.30 Domande