Contenuto

- Composizione di applicazioni lineari e prodotto di matrici.
- Matrici invertibili.
- Algebra delle matrici.
- Identità su inverse e trasposte.

Composizione di applicazioni lineari

Teorema (La funzione composta di applicazioni lineari è lineare)

Siano $V \xrightarrow{F} W$ *e* $W \xrightarrow{G} Z$ *lineari. Allora la funzione composta* $G \circ F$ *è lineare.*

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "F"] \arrow[dr, dashed, "G \circ F"'] & W \arrow[d, "G"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

La funzione composta di applicazioni lineari è lineare

Dimostrazione

- *Additività:*

$$\begin{aligned}(G\circ F)(\mathbf{v}+\mathbf{w}) &= G(F(\mathbf{v}+\mathbf{w}))\\ &= G(F(\mathbf{v})+F(\mathbf{w}))\\ &= G(F(\mathbf{v}))+G(F(\mathbf{w}))\\ &= (G\circ F)(\mathbf{v})+(G\circ F)(\mathbf{w})\end{aligned}$$

- *Omogeneità:*

$$\begin{aligned}(G\circ F)(\lambda\mathbf{v}) &= G(F(\lambda\mathbf{v}))\\ &= G(\lambda F(\mathbf{v}))\\ &= \lambda G(F(\mathbf{v}))\\ &= \lambda(G\circ F)(v)\end{aligned}$$

Composizione di applicazioni e prodotto di matrici

Problema

Date le matrici B *(*$q\times p$*) e* A *(*$r\times q$*), l'applicazione composta è lineare e quindi è rappresentata da una matrice (di tipo* $r\times p$*).*

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^p \arrow[r, "B"] \arrow[dr, dashed, "C\,?"'] & \mathbb{R}^q \arrow[d, "A"] \\
 & \mathbb{R}^r
\end{tikzcd}$$

Trovare C*. Tale matrice si denota* AB*:*

$$C = AB,$$

e si chiama prodotto di A *e* B*.*

Costruzione della matrice prodotto $C = AB$

$\mathbb{R}^p \xrightarrow{B} \mathbb{R}^q$, B matrice $q \times p$; $\mathbb{R}^q \xrightarrow{A} \mathbb{R}^r$, A matrice $r \times q$.
Le colonne $C_1, ..., C_p$ di $C = AB$ devono essere le immagini dei vettori colonna $E_1, ..., E_p$ della base canonica di $\mathbb{R}^p$.
Il vettore colonna E_k ($k = 1, ..., p$) viene mandato da B nella k-esima colonna B_k di B. A sua volta, il vettore B_k (dette $A_1, ..., A_q$ le colonne di A) viene mandato da A nel vettore

$$A\,B_k = A_1 b_{1k} + \cdots + A_q b_{qk}$$

che è, per costruzione di $C = AB$, la k-esima colonna di AB.
L'elemento $(AB)_{hk}$ di posto h di tale colonna è allora:

$$(AB)_{hk} = a_{h1}b_{1k} + \cdots + a_{hq}b_{qk}$$

Questo conto giustifica la seguente definizione.

Prodotto di matrici

Definizione (Prodotto di matrici)

Se A è $r \times q$ e B è $q \times p$, si chiama matrice prodotto AB la matrice $r \times p$ il cui elemento di posto i, j ($i = 1, ..., r,\ j = 1, ..., p$) è:

$$\begin{aligned}(AB)_{ij} &= \left|i\text{-esima riga di } A\right| \left|\begin{array}{c} j\text{-esima} \\ \text{colonna} \\ \text{di } B \end{array}\right| \\ &= a_{i1}b_{1j} + \cdots + a_{iq}b_{qj} \\ &= \sum_{h=1}^{q} a_{ih}b_{hj}\end{aligned}$$

Esempio: $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 15 & 15 \\ 4 & 12 \end{vmatrix}$

Proprietà del prodotto di matrici

Quando le dimensioni delle matrici consentono le operazioni:

- Proprietà associativa:
$$(AB)C = A(BC)$$
- Proprietà distributiva:
$$A(B+C) = AB + AC \qquad (B+C)A = BA + CA$$
- Il prodotto di matrici non è commutativo: In generale
$$AB \neq BA$$
- Se A è una matrice quadrata di ordine n e $I = I_n$ è la matrice identità $n \times n$,
$$AI = IA = A$$

Ripasso 1: Funzioni invertibili a sinistra o a destra nella categoria degli insiemi

Esercizio (Funzioni con inverse sinistre o destre)

$A \xrightarrow{f} B$, (A, B insiemi qualunque, non vuoti)

1. *Se f ha un'inversa sinistra, cioè esiste una funzione $B \xrightarrow{g} A$ per la quale*
$$g \circ f = I_A$$
allora f è iniettiva (I_A è la funzione identità di A).
2. *Se f ha un'inversa destra, cioè esiste una funzione $B \xrightarrow{h} A$ per la quale*
$$f \circ h = I_B$$
allora f è suriettiva (I_B è la funzione identità di B).

Soluzione dell'esercizio sulle inverse sinistre e destre

1) Ipotesi: f ha un'inversa sinistra. Tesi: f è iniettiva.
Supponiamo $f(x) = f(y)$, $x, y \in A$. Componendo con g, $g(f(x)) = g(f(y))$, ossia $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y)$. Per ipotesi, $(g \circ f) = I_A$. Dunque $I_A(x) = I_A(y)$, ossia $x = y$. Questo prova che f è iniettiva.

2) Ipotesi: f ha un'inversa destra. Tesi: f è suriettiva.
Fissiamo, a piacere, $b \in B$. Valutiamo entrambi i membri di $f \circ h = I_B$ (che vale per ipotesi) sull'elemento b: otteniamo $(f \circ h)(b) = I_B(b)$, ossia $f(h(b)) = b$. Dunque $f(x) = b$, dove $x = h(b) \in A$. Questo prova che f è suriettiva.

Ripasso 2: Funzioni invertibili

Una $A \xrightarrow{f} B$, (A, B insiemi), può avere inverse sinistre e non avere inverse destre, oppure può avere inverse destre e non avere inverse sinistre. Però, se f ha un'inversa sinistra g e un'inversa destra h, allora $g = h$. In tal caso, infatti,

$$h = I_A \circ h = (g \circ f) \circ h = g \circ (f \circ h) = g \circ I_B = g$$

Definizione (Funzioni invertibili)

Una funzione $A \xrightarrow{f} B$ si dice invertibile se esiste una funzione $B \xrightarrow{g} A$ soddisfacente

$$(g \circ f) = I_A \qquad (f \circ g) = I_B$$

Per quanto detto sopra, l'inversa g di f è unica, quando esiste. Si denota f^{-1}.

Algebra $M(n \times n)$ delle matrici quadrate $n \times n$

Definizione

Una matrice quadrata A, di tipo $n \times n$, si dice invertibile *se esiste una matrice quadrata B, anch'essa di tipo $n \times n$, per la quale*

$$AB = I_n \qquad BA = I_n \tag{1}$$

dove I_n è la matrice identità $n \times n$.

Esercizio

Sia $A \in M(n \times n)$. Supponiamo che A abbia un'inversa sinistra B e un'inversa destra C (entrambe $n \times n$):

$$BA = I_n, \qquad AC = I_n$$

Allora $B = C$ e quindi A è invertibile (e $A^{-1} = B = C$).

Soluzione

$$B = BI_n = B(AC) = (BA)C = I_nC = C$$

Osservazione Abbiamo usato solo associatività e identità. (Non abbiamo usato il fatto che A, B, C siano matrici che rappresentano applicazioni lineari).

$BA = I_n$ implica $AB = I_n$

Teorema

Siano A, B matrici quadrate, entrambe $n \times n$. Se $BA = I_n$, allora anche $AB = I_n$ (e quindi A e B sono invertibili).

Dimostrazione Poiché $BA = I$, la matrice A ha un'inversa sinistra e quindi l'applicazione $\mathbb{R}^n \xrightarrow{A} \mathbb{R}^n$ è iniettiva. (Ricordiamo la dimostrazione. Da $AX = AY$ segue, moltiplicando a sinistra per B: $B(AX) = B(AY)$, $(BA)X = (BA)Y$, $IX = IY$ e quindi $X = Y$). Ma allora (per il teorema delle dimensioni) $\mathbb{R}^n \xrightarrow{A} \mathbb{R}^n$ è anche suriettiva e quindi è un isomorfismo. Dunque la matrice A è invertibile. Poiché la sua inversa (bilatera) A^{-1} è, in particolare, inversa destra di A e B è inversa sinstra di A, per un teorema precedente $B = A^{-1}$. (Oppure: da $BA = I$, moltiplicando a destra per A^{-1}, si ha $BAA^{-1} = A^{-1}$, da cui segue $B = A^{-1}$). □

Matrice trasposta

Definizione (Matrice trasposta)

Sia A una qualunque matrice $p \times q$. La matrice trasposta A^t è la matrice di tipo $q \times p$ così definita: $(A^t)_{ij} = A_{ji}$.

A, matrice $p \times q$, rappresenta una mappa lineare: $\mathbb{R}^q \xrightarrow{A} \mathbb{R}^p$

A^t, matrice $q \times p$, rappresenta una mappa lineare: $\mathbb{R}^p \xrightarrow{A^t} \mathbb{R}^q$

Esercizio

Sia A una qualunque matrice $p \times q$. Per ogni $X \in \mathbb{R}^q$, $Y \in \mathbb{R}^p$,

$$(AX) \cdot Y = X \cdot (A^t Y)$$

(A sinistra, il prodotto scalare è in $\mathbb{R}^p$, a destra in $\mathbb{R}^q$).

$\mathbb{R}^p \xrightarrow{A^t} \mathbb{R}^q$ si chiama anche l'aggiunta di $\mathbb{R}^q \xrightarrow{A} \mathbb{R}^p$.

Soluzione dell'esercizio: $(AX) \cdot Y = X \cdot (A^t\, Y)$

Soluzione Usiamo la convenzione di Einstein: si somma su un indice ripetuto due volte. (Dal contesto, è chiaro dove variano gli indici; basta notare che AX, Y sono in $\mathbb{R}^p$ e X, A^tY in $\mathbb{R}^q$).

$$(AX) \cdot Y = (AX)_i Y_i = A_{ij} X_j Y_i$$

$$\begin{aligned} X \cdot (A^t\, Y) &= X_h (A^t\, Y)_h = X_h (A^t)_{hk} Y_k \\ &= X_h A_{kh} Y_k = A_{kh} X_h Y_k \end{aligned}$$

Sono uguali.

Esercizio: $(AB)^t = B^t A^t$

Esercizio

Quando il prodotto AB è definito,

$$(AB)^t = B^t A^t$$

Soluzione A di tipo $p \times q$, B di tipo $q \times s$. Siano X, Y vettori colonna arbitrari, rispettivamente in $\mathbb{R}^s$ e $\mathbb{R}^p$.
Da un lato, $< (AB)X, Y > = < X, (AB)^t Y >$. Del resto,

$$\begin{aligned} < (AB)X, Y > &= < A(BX), Y > = < BX, A^t\, Y > \\ &= < X, B^t (A^t\, Y) > = < X, (B^t A^t)\, Y > \end{aligned}$$

Dunque $< X, (AB)^t Y > = < X, (B^t A^t)\, Y >$, ossia $< X, (AB)^t\, Y - (B^t A^t)\, Y > = 0$. Per l'arbitrarietà di X, $(AB)^t\, Y - (B^t A^t)\, Y = 0$. Per l'arbitrarietà di Y, $(AB)^t - (B^t A^t) = 0$, che è la tesi.

Identità su inverse e trasposte

- Se esiste il prodotto AB,
$$(AB)^t = B^t A^t$$
- Se $A, B \in M(n \times n)$ sono invertibili, anche AB è invertibile e
$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$
- Se $A \in M(n \times n)$ è invertibile,
$$(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$$

Dimostrazioni

- $(AB)^t = B^t A^t$
Dimostrazione Già dimostrato. Ne diamo un'altra dimostrazione, facendo i conti:
$$(AB)^t_{ij} = (AB)_{ji} = A_{jh}B_{hi} = B_{hi}A_{jh} = (B^t)_{ih}(A^t)_{hj} = (B^tA^t)_{ij}$$
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
Dimostrazione P è l'inversa di Q (P, Q matrici quadrate dello stesso ordine) se e solo se $PQ = I$. Dunque per dimostrare che l'inversa di AB è $B^{-1}A^{-1}$ basta dimostrare che $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = I$. Il calcolo è semplice:
$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$$
- $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$
Dimostrazione Si deve dimostrare che $(A^t)(A^{-1})^t = I$.
$$(A^t)(A^{-1})^t = (A^{-1}A)^t = I^t = I$$