1 Il Teorema Spettrale

In questa sezione vogliamo enunciare e dimostrare uno dei risultati piu' importanti dell'algebra lineare: il teorema spettrale. Incominciamo con il caso di uno spazio vettoriale sul campo reale, per il caso complesso vedremo con brevi osservazioni che la dimostrazione resta praticamente identica. Daremo una versione del teorema spettrale riguardante le matrici simmetriche a coefficienti reali e poi ne daremo una interpretazione in termini di prodotti scalari.

Cominciamo con il ricordare cosa significa per una matrice reale A essere simmetrica: significa che $A = A^t$, cioe' A coincide con la sua trasposta. In pratica, e' facile verificare che cio' corrisponde al fatto che rispetto al prodotto scalare ordinario (euclideo) in $\mathbf{R}^n$:

$$\langle A\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, A\mathbf{v} \rangle$$

Notazione: quando scriviamo $A\mathbf{u}$ stiamo intendendo il prodotto righe per colonne della matrice A per la colonna delle coordinate del vettore $\mathbf{u}$ rispetto alla base canonica. A rigore dovremmo scrivere $A(\mathbf{u})_{\mathcal{C}}$, ma preferiamo una scrittura piu' semplice, sapendo pero' che stiamo commettendo un abuso di notazione.

Analogamente ricordiamo cosa significa per una matrice complessa A essere *hermitiana*: significa che $A = A^*$, cioe' A coincide con la sua trasposta complessa coniugata. E' facile verificare che cio' corrisponde al fatto che rispetto al prodotto scalare hermitiano in $\mathbf{C}^n$:

$$\langle A\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_h = \langle \mathbf{u}, A\mathbf{v} \rangle_h$$

Se A e' una matrice simmetrica reale abbiamo immediatamente che e' anche una matrice hermitiana, infatti e' banale che soddisfi la condizione $A = A^*$ in quanto il complesso coniugato di un numero reale e' il numero reale stesso.

Iniziamo con due lemmi seguiti da alcune osservazioni praticamente immediate. Il primo lemma ci dice che ogni matrice simmetrica ammette almeno un autovalore reale, il secondo lemma ci dice (in realta' una sua conseguenza) che autovettori di autovalori distinti di una matrice simmetrica sono sempre perpendicolari. Questi sono i passi chiave per la dimostrazione del teorema spettrale.

Lemma 1.1. *Sia $A \in M_n(\mathbf{R})$ una matrice simmetrica. Allora A ammette un autovalore reale.*

Proof. A e' una matrice a coefficienti reali, tuttavia poiche' i reali sono contenuti nel campo complesso abbiamo anche che $A \in M_n(\mathbf{C})$. Il polinomio caratteristico di A: $det(A - \lambda I) = 0$ ammette almeno una soluzione complessa, λ_0, per il teorema fondamentale dell'algebra. Vogliamo dimostrare che λ_0 e' reale, cioe' $\lambda_0 = \overline{\lambda}_0$. Sia $\mathbf{u} \in \mathbf{C}^n$ un autovettore di autovalore λ_0. Poiche' A e' simmetrica e' anche hermitiana (si vedano le osservazioni precedenti al lemma), e possiamo dunque scrivere:

$$\langle A\mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle_h = \langle \mathbf{u}, A\mathbf{u}\rangle_h$$

ove $\langle\, ,\, \rangle_h$ e' il prodotto hermitiano standard in $\mathbf{C}^n$. Dunque

$$\lambda_0 \langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle_h = \langle A\mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle_h = \langle \mathbf{u}, A\mathbf{u}\rangle_h = \overline{\lambda}_0 \langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle_h$$

Dunque

$$(\lambda_0 - \overline{\lambda}_0)\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle_h = 0$$

e poiche' il prodotto hermitiano standard e' non degenere, cioe' $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle_h \neq 0$ abbiamo $\lambda_0 = \overline{\lambda}_0$. Concludiamo osservando che poiche' λ_0 e' reale e anche A e' a coefficienti reali, l'autovettore $\mathbf{u}$ e' reale. □

Osserviamo che questo risultato ci da' anche immediatamente l'analogo risultato per le matrici hermitiane, cioe' le matrici A tali che $A = A^*$.

Corollario 1.2. *Sia A una matrice hermitiana. Allora tutti gli autovalori di A sono reali.*

Lasciamo al lettore la facile verifica che se λ e' autovalore di A hermitiana allora $\lambda = \overline{\lambda}$: basta fare gli stessi passaggi che abbiamo visto sopra. Gli autovettori tuttavia in questo caso potranno essere complessi.

Andiamo ora a stabilire un risultato che sara' fondamentale nella dimostrazione del teorema spettrale.

Lemma 1.3. *Sia A una matrice simmetrica, λ un suo autovalore reale e $\mathbf{u}$ un autovettore (reale) corrispondente. Sia $\mathbf{w}$ un vettore perpendicolare a $\mathbf{u}$ rispetto all'usuale prodotto scalare. Allora $\mathbf{u}$ e' perpendicolare a $A\mathbf{w}$.*

Proof. Poiche' $\mathbf{u}$ e' perpendicolare a $\mathbf{w}$ abbiamo

$$0 = \lambda\langle \mathbf{u}, \mathbf{w}\rangle = \langle A\mathbf{u}, \mathbf{w}\rangle = \langle \mathbf{u}, A\mathbf{w}\rangle$$

e dunque anche $A\mathbf{w}$ e' perpendicolare a $\mathbf{u}$. $\square$

Abbiamo quasi immediatamente un corollario particolarmente importante.

Corollario 1.4. *Siano λ e μ autovalori distinti di una matrice simmetrica A e $\mathbf{u}$, $\mathbf{w}$ due autovettori corrispondenti. Allora $\mathbf{u}$ e' perpendicolare a $\mathbf{w}$.*

Proof. Dobbiamo mostrare $\langle \mathbf{u}, \mathbf{w}\rangle = 0$. Abbiamo

$$\lambda\langle \mathbf{u}, \mathbf{w}\rangle = \langle A\mathbf{u}, \mathbf{w}\rangle = \langle \mathbf{u}, A\mathbf{w}\rangle = \mu\langle \mathbf{u}, \mathbf{w}\rangle$$

Dunque $(\lambda - \mu)\langle \mathbf{u}, \mathbf{w}\rangle = 0$ e poiche' $\lambda \neq \mu$ otteniamo $\langle \mathbf{u}, \mathbf{w}\rangle = 0$. $\square$

Osserviamo che sia il lemma che il corollario precedenti hanno un'ovvia generalizzazione al caso in cui la matrice A sia hermitiana e il prodotto considerato sia il prodotto hermitiano in $\mathbf{C}^n$.

Prima di enunciare il teorema spettrale e' necessario fermarsi un momento ed definire il concetto di applicazione lineare simmetrica.

Definizione 1.5. Sia $T : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ una applicazione lineare. Diciamo che T e' *simmetrica* se

$$\langle T\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{u}, T\mathbf{v}\rangle$$

ove $\langle\, ,\, \rangle$ denota come sempre il prodotto scalare ordinario (euclideo) in $\mathbf{R}^n$.

Osserviamo che se fissiamo la base canonica, la matrice associata a T in tale base e' una matrice simmetrica. Questo fatto e' piuttosto immediato se scriviamo i vettori utilizzando le coordinate. La prossima proposizione e' fondamentale nella nostra dimostrazione del teorema spettrale.

Proposizione 1.6. *Sia T applicazione lineare simmetrica e sia $\mathcal{B}$ una base ortonormale per $\mathbf{R}^n$. Allora la matrice associata a T nella base $\mathcal{B}$ e' una matrice simmetrica.*

Proof. Sappiamo che per la formula del cambiamento di base:

$$M_{\mathcal{B}}(T) = P^{-1} M_{\mathcal{C}}(T) P$$

ove $M_{\mathcal{B}}(T)$ denota la matrice associata a T nella base $\mathcal{B}$ (sia nel dominio che nel codominio), mentre $M_{\mathcal{C}}(T)$ e' la matrice associata a T nella base canonica. Abbiamo allora:

$$M_{\mathcal{B}}(T)^t = P^t M_{\mathcal{C}}(T)^t P = P^{-1} M_{\mathcal{C}}(T) P = M_{\mathcal{B}}(T)$$

poiche' P e' una matrice ortogonale (cioe' $P^t = P^{-1}$) e $M_{\mathcal{C}}(T)$ e' simmetrica. □

Possiamo finalmente enunciare il teorema spettrale simultaneamente per le matrici simmetriche reali e le applicazioni lineari simmetriche.

Teorema 1.7. *Sia A una matrice simmetrica reale e $T : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ l'applicazione lineare simmetrica corrispondente ad A nella base canonica.*

- *A e' diagonalizzabile mediante una matrice ortogonale, cioe' esiste P ortogonale tale che $D = P^{-1}AP$ sia diagonale.*
- *Esiste una base ortonormale $\mathcal{N}$ in cui T ha associata una matrice diagonale.*

Proof. E' ben chiaro che le due affermazioni sono completamente equivalenti. La base ortonormale che stiamo cercando al punto (2) e' una base di autovettori con norma 1 (ortogonali tra loro per il lemma precedente) e la matrice diagonale associata a T nella base $\mathcal{N}$ e' proprio la matrice D del punto (1) e ha sulla diagonale gli autovalori di A (che sono gli stessi di T come sappiamo bene!).

Sia λ un autovalore reale di T e $\mathbf{u}$ un suo autovettore di norma 1. Sappiamo che tali λ e $\mathbf{u}$ esistono per il Lemma 1.1. Sia $W = span\{\mathbf{u}\}^\perp$. Allora abbiamo $\mathbf{R}^n = span\{\mathbf{u}\} \oplus W$ e possiamo scegliere tramite l'algoritmo di Gram-Schmidt una base ortonormale $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}, \mathbf{w}_1, \dots \mathbf{w}_{n-1}\}$. In tale base la matrice associata a T e':

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{11} & \dots & b_{1,n-1} \\ 0 & b_{21} & \dots & b_{2,n-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & b_{n-1,1} & \dots & b_{n-1,n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \dots \\ \vdots & B \end{pmatrix}$$

questo perche' $T(\mathbf{u}) = \lambda(\mathbf{u})$ e $T(\mathbf{w}) = c_1 w_1 + \dots c_{n-1} w_{n-1}$ (ricordiamo cosa sono le colonne della matrice associata a T nella base $\mathcal{B}$!). Per la proposizione precedente A' e' simmetrica e dunque $B = (b_{ij})$ e' pure simmetrica. Notiamo che A e A' hanno gli stessi autovalori e sono simili tramite il cambiamento di base $\mathcal{B}$. Dunque se A puo' essere diagonalizzata attraverso una matrice ortogonale anche A' avra' questa proprieta'. Possiamo ripetere il ragionamento per B matrice simmetrica, che avra' $T|_W$ come sua applicazione lineare simmetrica associata. Possiamo quindi trovare un autovalore λ' e continuare sino a che non raggiungiamo una matrice di ordine 1 e la dimostrazione puo' terminare (in alternativa si puo' ragionare piu' rapidamente per induzione). $\square$

Osservazione 1.8. All'interno della dimostrazione precedente, e' importante osservare che il prodotto scalare ordinario che stiamo utilizzando non cambia quando cambiamo la base e ragioniamo all'interno di W in quanto stiamo effettuando un cambio di base in cui la nuova base e' *ortonormale*. Ricordando la formula del cambio di base per i prodotti scalari abbiamo infatti che $C' = P^t C P$. In questo caso $C = I$ identita' ed essendo il cambio di base una matrice ortogonale abbiamo $P^t P = I$, dunque $C' = C = I$.

Concludiamo questa sezione con qualche osservazione sul caso complesso, che e' una generalizzazione immediata di quanto abbiamo visto sino ad ora.

Definiamo $T : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ un'applicazione lineare *hermitiana* se:

$$\langle T\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, T\mathbf{v} \rangle$$

ove $\langle \, , \, \rangle$ denota il prodotto hermitiano standard in $\mathbf{C}^n$.

Come nel caso reale anche in questo caso la matrice associata a T fissata una base $\mathcal{B}$ ortonormale in dominio e codominio e' una matrice simmetrica. Inoltre

Tutti gli autovalori di una matrice hermitiana sono reali.

Questo fatto e' ancora piu' sorprendente che nel caso di matrici simmetriche reali, ma la dimostrazione e' praticamente identica al caso reale.

Possiamo finalmente enunciare il teorema spettrale per il caso complesso.

Teorema 1.9. *Sia A una matrice hermitiana e $T : \mathbf{C}^n \longrightarrow \mathbf{C}^n$ l'applicazione lineare hermitiana corrispondente ad A nella base canonica.*

- *A e' diagonalizzabile mediante una matrice unitaria, cioe' esiste P unitaria tale che $D = P^{-1}AP = P^*AP$ sia diagonale (e reale!).*
- *Esiste una base ortonormale (rispetto al prodotto hermitiano standard) $\mathcal{N}$ in cui T ha associata una matrice diagonale (reale!).*

2 Forme Quadratiche

In questa sezione vogliamo discutere le forme quadratiche e come sia possibile utilizzare le informazioni che conosciamo sul prodotto scalare per diagonalizzare una forma quadratica e nel caso di due o tre variabili, disegnare la conica o quadrica corrispondente nel piano o nello spazio tridimensionale.

Definizione 2.1. Sia V uno spazio vettoriale reale e sia $\langle \, , \rangle$ un prodotto scalare in V. Definiamo una *forma quadratica reale* q come la funzione $q : V \longrightarrow \mathbf{R}$, $q(\mathbf{v}) = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle$.

Ad esempio in $\mathbf{R}^n$ la funzione che associa ad un vettore la sua norma al quadrato e' una forma quadratica: $q(\mathbf{v}) = |\mathbf{v}|^n$.

Osservazione 2.2. Se q e' una forma quadratica, allora q determina univocamente il prodotto scalare che la definisce. Infatti tale prodotto su due vettori arbitrari e' dato da:

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = (1/2)[q(\mathbf{u}+\mathbf{v}) - q(\mathbf{u}) - q(\mathbf{v})]$$

Lasciamo al lettore la facile verifica (basta sostituire $q(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \langle \mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{u}+\mathbf{v} \rangle$ etc. e svolgere i calcoli utilizzando le proprieta' dei prodotti scalari).

Data una forma quadratica q possiamo dunque sempre associare ad essa una matrice C in modo da scrivere in coordinate:

$$q(\mathbf{v}) = \mathbf{v}^t C \mathbf{v}$$

C e' la matrice associata al prodotto scalare corrispondente a q.

Vediamo un esempio.

Esempio 2.3. Consideriamo $q : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}$, $q(x, y, z) = x^2 + 2xy + 3zy - 2z^2$. E' immediato verificare che si tratta di una forma quadratica. Vogliamo scrivere la matrice ad essa associata:

$$q(x,y,z) = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3/2 \\ 0 & 3/2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Lasciamo al lettore la facile verifica dell'uguaglianza che abbiamo scritto.

Il teorema spettrale ha una immediata conseguenza per quanto riguarda le forme quadratiche.

Corollario 2.4. (Teorema degli Assi Principali). *Sia $q : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$ una forma quadratica associata alla matrice C fissata la base canonica di $\mathbf{R}^n$. Allora esiste sempre una base ortonormale $\mathcal{B}$ di $\mathbf{R}^n$ in cui la matrice associata a q assume la forma diagonale. Possiamo pertanto scrivere:*

$$q(x_1, \dots, x_n) = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2$$

ove $(x_1, \dots, x_n)$ sono le coordinate nella base $\mathcal{B}$ e $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sono gli autovalori della matrice C. (I vettori della base $\mathcal{B}$ sono gli autovettori di C).

Come applicazione dei risultati sulle forme quadratiche vogliamo descrivere il luogo dei punti che soddisfano $q(x,y) = 1$ nel piano. Se $q(x,y) = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2$ dalla scuola superiore sappiamo subito come disegnare tale luogo dei punti.

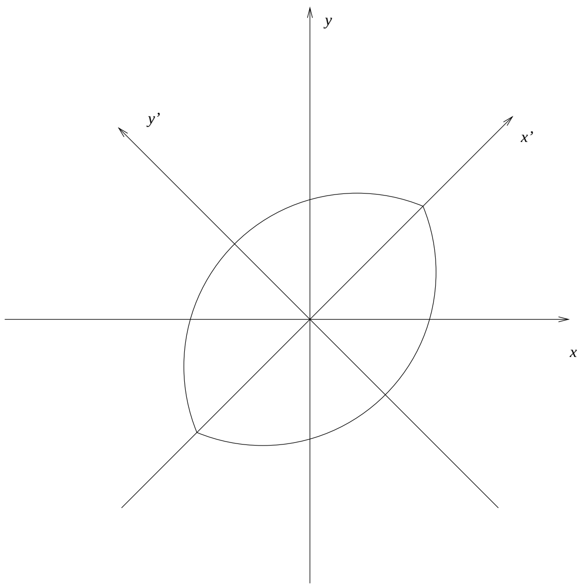
- $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ ellisse;
- $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$ (oppure $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 > 0$) iperbole;

Nel caso generale e' sempre possibile ricondurci a queste due figure geometriche grazie al Teorema degli assi principali. Vediamo in un esempio.

Esempio 2.5. Vogliamo disegnare il luogo dei punti: $5x^2 - 4xy + 5y^2 = 48$. La matrice associata alla forma quadratica $q(x,y) = 5x^2 - 4xy + 5y^2$ e':

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Gli autovalori di A sono 3 e 7, i corrispondenti autovettori di lunghezza unitaria $\mathbf{u}_1 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, $\mathbf{u}_2 = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$. Nelle coordinate della base $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ abbiamo $q(x', y') = 3(x')^2 + 7(y')^2$, pertanto $q(x,y) = 48$ e' un'ellisse che possiamo subito disegnare:



Vediamo ora un altro esempio relativo all'iperbole.

Esempio 2.6. Vogliamo disegnare il luogo dei punti: $x^2 - 8xy - 5y^2 = 16$. La matrice associata alla forma quadratica $q(x,y) = x^2 - 8xy - 5y^2$ e':

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}$$

Gli autovalori di A sono 3 e -7, i corrispondenti autovettori di lunghezza unitaria $\mathbf{u}_1 = (1/\sqrt{3}, 2/\sqrt{3})$, $\mathbf{u}_2 = (-2/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$. Nelle coordinate della base $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ abbiamo $q(x', y') = 3(x')^2 - 7(y')^2$, pertanto $q(x,y) = 16$ e' un'iperbole che possiamo subito disegnare analogamente a quanto abbiamo fatto precedentemente.

E' chiaro che questi ragionamenti possono estendersi immediatamente al caso di $\mathbf{R}^3$ e ci permettono di ridurre in *forma canonica* le quadriche e di poterle classificare e dunque disegnare.