

CAMBIAMENTI DI BASE E APPLICAZIONI LINEARI

SIMONE DIVERIO

1. CAMBIAMENTI DI BASE

Allora, cerchiamo di mettere un po' di chiarezza. Tanto per cominciare praticamente tutto quello che scriverò vale in $\mathbb{R}^n$, ma qui lavoriamo solo in $\mathbb{R}^3$, almeno non facciamo troppa confusione con gli indici e inoltre uno riesce ad avere l'intuizione di quello che accade (nello spazio euclideo tridimensionale). Ora, visto che siamo in $\mathbb{R}^3$, che ha dimensione 3, ogni base di questo spazio vettoriale sarà costituita da 3 elementi. Come al solito c'è una base più bella delle altre che si chiama canonica; essa è costituita dai seguenti tre vettori:

$$\mathcal{E} \stackrel{\text{def}}{=} \{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}.$$

Ora, in quanto base, ogni vettore di $\mathbb{R}^3$ si può scrivere come combinazione lineare di elementi di $\mathcal{E}$, inoltre tale combinazione lineare è unica. Vediamo: prendo un vettore $v = (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ e cerco di scriverlo come combinazione di e_1, e_2, e_3 :

$$\begin{aligned} v &= (\alpha, \beta, \gamma) \\ &= (\alpha, 0, 0) + (0, \beta, 0) + (0, 0, \gamma) \\ &= \alpha(1, 0, 0) + \beta(0, 1, 0) + \gamma(0, 0, 1) = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3. \end{aligned}$$

Quindi sono riuscito a scrivere v come combinazione lineare di e_1, e_2, e_3 , con pesi rispettivamente α, β, γ ; ora, non è un caso che i pesi di questa combinazione lineare siano proprio le coordinate del vettore v : questo accade sempre quando si scrive un vettore di $\mathbb{R}^3$ come combinazione lineare dei vettori della base canonica. Notare inoltre che se qualche altra persona avesse cercato di scrivere v come combinazione lineare di e_1, e_2, e_3 , avrebbe ottenuto la stessa combinazione che ho ottenuto io, infatti la teoria generale ci dice che data comunque una base, c'è un *unico* modo di scrivere un qualunque vettore come combinazione lineare dei vettori della base assegnata. In particolare, una volta che sono riuscito a trovare UN modo di esprimere un vettore come combinazione lineare di elementi di una base, allora ho trovato IL modo, perché la teoria mi dice che c'è solo quello di modo possibile. A questo punto spero che sia chiaro che possiamo parlare de LE componenti (ovvero pesi) di un vettore rispetto a una base fissata, perché sono quelle e basta! Ora, oltre alla base canonica $\mathcal{E}$, fissiamo un'altra base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ di $\mathbb{R}^3$; se vi turbano le lettere, potete pensare ad esempio, a v_1, v_2, v_3 come a tre righe di una qualunque matrice 3×3 reale che abbia

determinante diverso da zero (e questo basta ad assicurare che questi tre vettori formino una base, giusto?), ad esempio $v_1 = (2, 0, 0)$, $v_2 = (1, 2, 0)$, $v_3 = (1, 1, 1)$. Verificate che la matrice

$$\begin{pmatrix} -v_1 - \\ -v_2 - \\ -v_3 - \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ha effettivamente determinante diverso da zero.

A questo punto, per quanto abbiamo detto sopra, chiunque provi a scrivere il vettore $v = (\alpha, \beta, \gamma)$ di prima come combinazione lineare di v_1, v_2, v_3 troverà la stessa combinazione, diciamo

$$v = a v_1 + b v_2 + c v_3.$$

Fate conto che $v = (-7, 0, -6)$; tanto per cominciare abbiamo che

$$v = (-7, 0, -6) = -7 e_1 + 0 e_2 + (-6) e_3$$

e questo è facile. Come faccio invece a scrivere v come combinazione di v_1, v_2, v_3 ? Mica è così facile come con la base canonica! Alcune volte ci si riesce a occhio, altre manco per niente! Tipo io qui a occhio mica ci riuscirei, credo. Un modo è questo qua: siccome so che pure se non riesco a trovarla a occhio una tale combinazione lineare esiste sempre ed è pure unica, faccio finta di averla trovata e scrivo

$$v = a v_1 + b v_2 + c v_3,$$

cioè

$$\begin{aligned} (-7, 0, -6) &= a(2, 0, 0) + b(1, 2, 0) + c(1, 1, 1) \\ &= (2a, 0, 0) + (b, 2b, 0) + (c, c, c) = (2a + b + c, 2b + c, c). \end{aligned}$$

Ora mi ricordo che invece la combinazione non l'ho trovata manco per niente, e che io devo invece proprio trovare a, b e c . Allora guardo il primo e l'ultimo membro di quello che ho appena scritto e leggo

$$(-7, 0, -6) = (2a + b + c, 2b + c, c)$$

il che equivale a dire

$$\begin{cases} 2a + b + c = -7 \\ 2b + c = 0 \\ c = -6 \end{cases}$$

Quindi c ce l'ho dall'ultima, lo sostituisco nella seconda e trovo $b = 3$; poi metto b e c nella prima e trovo $a = -2$. Quindi, in definitiva,

$$v = (-7, 0, -6) = -2 v_1 + 3 v_2 + (-6) v_3.$$

Non so voi, ma io questo metodo lo trovo un po' scomodo per almeno un paio di motivi: tanto per cominciare in questo caso il sistema era facile da risolvere (si presentava in forma a scala), ma mica è sempre così! La seconda questione è che questo non è un metodo generale, nel senso che, sì, d'accordo, ora abbiamo trovato come si scrive questo

vettore come combinazione lineare di v_1, v_2, v_3 ma se ora vi chiedessi di trovare come si scrive un altro vettore w come combinazione lineare di quelli? Volendo uno mette al posto dei termini noti $-7, 0$ e -6 che abbiamo appena usato, le coordinate del nuovo vettore w e si risolve un'altra volta il sistema. Ma che noia! Non sarebbe meglio fare i conti una volta per tutte e poi avere la risposta pronta per ogni vettore? proviamo. Innanzitutto a questo punto dovrebbe essere chiara la maledetta scrittura $K_{\mathcal{B}}^v$: che cos'è? Innanzitutto notare che K ha un apice v e un pedice $\mathcal{B}$; allora $K_{\mathcal{B}}^v$ è il vettore colonna che ha come elemento sull' i -esima riga l' i -esimo peso della (unica) scrittura di v (o di qualunque vettore che compaia all'apice di K) come combinazione lineare di elementi della base $\mathcal{B}$ (o di qualunque base compaia al pedice K). Prego rileggere l'ultima frase e cercare di capirla. Ora andiamo avanti, e chiediamoci che cos'è ad esempio $K_{\mathcal{E}}^{(-7,0,-6)}$; io dico che è la matrice 3×1 (ovvero il vettore colonna di lunghezza 3) data da

$$K_{\mathcal{E}}^{(-7,0,-6)} = \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Infatti abbiamo già detto che $(-7, 0, -6) = -7e_1 + 0e_2 + (-6)e_3$ e quindi $K_{\mathcal{E}}^{(-7,0,-6)}$ è effettivamente così (notate a questo punto che per ogni $v \in \mathbb{R}^3$, $K_{\mathcal{E}}^v$ è dato dal vettore colonna che è il trasposto di v , ma tutto ciò solo perché la base con cui stiamo lavorando è quella canonica in questo caso, e questo è espresso dal fatto che il pedice di K è $\mathcal{E}$). Invece che cos'è $K_{\mathcal{B}}^{(-7,0,-6)}$, dove $\mathcal{B}$ è la base di prima? Abbiamo sudato per trovare la sua scrittura come combinazione lineare di v_1, v_2, v_3 e quindi il più è stato fatto: dobbiamo solo prendere quei pesi e metterli per colonna:

$$K_{\mathcal{B}}^{(-7,0,-6)} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

La domanda a cui vogliamo rispondere adesso è questa: visto che una matrice 3×3 moltiplicata per un vettore colonna di lunghezza 3 mi dà come risultato un nuovo vettore colonna di lunghezza 3, esiste una matrice che moltiplicata per $K_{\mathcal{B}}^{(-7,0,-6)}$ mi dà $K_{\mathcal{E}}^{(-7,0,-6)}$? E una che moltiplicata per $K_{\mathcal{E}}^{(-7,0,-6)}$ mi dà $K_{\mathcal{B}}^{(-7,0,-6)}$? Più in generale, esiste una matrice quadrata A di ordine 3 che dipende solo dalla base $\mathcal{B}$ e dalla base $\mathcal{E}$ per cui vale sempre che dato comunque un vettore $v \in \mathbb{R}^3$ ho

$$A \cdot K_{\mathcal{B}}^v = K_{\mathcal{E}}^v?$$

Cominciamo ad osservare che se una tale matrice esistesse e fosse invertibile, si avrebbe, moltiplicando a sinistra ambo i membri per A^{-1}

(che stiamo supponendo esistere)

$$A \cdot K_{\mathcal{B}}^v = K_{\mathcal{E}}^v \iff \underbrace{A^{-1} \cdot A}_{=\text{Id}_{\mathbb{R}^3}} \cdot K_{\mathcal{B}}^v = A^{-1} \cdot K_{\mathcal{E}}^v \iff K_{\mathcal{B}}^v = A^{-1} \cdot K_{\mathcal{E}}^v.$$

Quindi se riesco a rispondere affermativamente alla prima domanda e in più la matrice che trovo è invertibile, riesco automaticamente a rispondere affermativamente alla seconda domanda (e la matrice che trovo è invertibile ed è l'inversa della matrice che ho trovato prima). Notate inoltre che se rispondo alla terza domanda e la matrice che trovo è invertibile ho risposto in una botta sola alle prime due domande. Tanto vale rispondere alla terza, e non ci pensiamo più.

Ricapitolando voglio vedere se esiste una matrice quadrata A di ordine 3 tale che per ogni $v \in \mathbb{R}^3$ ho

$$A \cdot K_{\mathcal{B}}^v = K_{\mathcal{E}}^v,$$

e in più mi chiedo se questa matrice A è per caso invertibile. Come prima (quando abbiamo dovuto trovare i pesi di $(-7, 0 - 6)$ quando lo scrivo come combinazione lineare degli elementi della base $\mathcal{B}$) facciamo finta per un attimo di averla già trovata questa benedetta matrice A , e vediamo che proprietà dovrebbe soddisfare se esistesse (e se queste proprietà la individuano univocamente, nel qual caso siamo a cavallo). Allora, A come tutte le brave matrici 3×3 sarà del tipo

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Ricordiamoci ora che $\mathcal{B} = \{v_1 = (2, 0, 0), v_2 = (1, 2, 0), v_3 = (1, 1, 1)\}$ e chiediamoci innanzitutto chi sono $K_{\mathcal{B}}^{v_1}, K_{\mathcal{B}}^{v_2}$ e $K_{\mathcal{B}}^{v_3}$. Essi sono rispettivamente i vettori colonna di lunghezza 3 in cui l' i -esima riga è data dall' i -esimo peso di v_1, v_2 e v_3 quando li scrivo come combinazione lineare di v_1, v_2, v_3 . Ora, sarete d'accordo con me che

$$v_1 = 1 v_1 + 0 v_2 + 0 v_3,$$

$$v_2 = 0 v_1 + 1 v_2 + 0 v_3,$$

$$v_3 = 0 v_1 + 0 v_2 + 1 v_3$$

e che quindi

$$K_{\mathcal{B}}^{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, K_{\mathcal{B}}^{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, K_{\mathcal{B}}^{v_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Del resto siccome per trovare $K_{\mathcal{E}}^v$ basta prendere v e trasporlo (per quanto osservato prima), abbiamo

$$K_{\mathcal{E}}^{v_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, K_{\mathcal{E}}^{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, K_{\mathcal{E}}^{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

A questo punto siamo a posto, infatti se una tale matrice A esistesse, dovrebbe valere

$$A \cdot K_{\mathcal{B}}^{v_1} = K_{\mathcal{E}}^{v_1}, \quad A \cdot K_{\mathcal{B}}^{v_2} = K_{\mathcal{E}}^{v_2}, \quad A \cdot K_{\mathcal{B}}^{v_3} = K_{\mathcal{E}}^{v_3};$$

in ciascuna di queste relazioni, il secondo membro è noto, del resto i primi membri, previa moltiplicazione, danno

$$\begin{aligned} A \cdot K_{\mathcal{B}}^{v_1} &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}, \\ A \cdot K_{\mathcal{B}}^{v_2} &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}, \\ A \cdot K_{\mathcal{B}}^{v_3} &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ma allora deve essere

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} = K_{\mathcal{E}}^{v_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} = K_{\mathcal{E}}^{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} = K_{\mathcal{E}}^{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

cioè

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Notate niente di strano? Vediamo un po': le colonne di A sono rispettivamente v_1^t, v_2^t e v_3^t (dove la t all'apice sta a significare "trasposto"), dunque esse sono linearmente indipendenti (v_1, v_2, v_3 sono una base!!) e dunque A è invertibile; inoltre il ragionamento che abbiamo fatto mostra che se una tale matrice A esiste (ricordate che ancora non lo sappiamo se esiste, noi stavamo solo SUPPONENDO la sua esistenza), deve essere fatta così. Quindi la matrice A che abbiamo trovato è l'unica candidata possibile a risolvere il nostro problema. In realtà oltre a essere l'unica candidata possibile, lo risolve effettivamente. Prima di vedere perché, ridiciamo come si fa ad ottenere: *data la base canonica $\mathcal{E}$ e un'altra base $\mathcal{B}$, l'unica matrice A tale che per ogni vettore v si ha $A \cdot K_{\mathcal{B}}^v = K_{\mathcal{E}}^v$ è la matrice che ha come colonne i trasposti dei vettori della base $\mathcal{B}$, presi nello stesso ordine.*

Ma allora perché la matrice A funziona? È presto detto: prendiamo un vettore v ; allora esisteranno (unici) $a, b, c \in \mathbb{R}$ tali che

$$v = a v_1 + b v_2 + c v_3$$

e quindi

$$K_{\mathcal{B}}^v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

(per esempio se $v = (-7, 0, -6)$ e $\mathcal{B}$ è sempre la base di prima, allora $a = -2, b = 3$ e $c = -6$). Ora,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix} \\ &= a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = a K_{\mathcal{B}}^{v_1} + b K_{\mathcal{B}}^{v_2} + c K_{\mathcal{B}}^{v_3}. \end{aligned}$$

Ma allora

$$\begin{aligned} A \cdot K_{\mathcal{B}}^v &= A \cdot (a K_{\mathcal{B}}^{v_1} + b K_{\mathcal{B}}^{v_2} + c K_{\mathcal{B}}^{v_3}) \\ &= A \cdot (a K_{\mathcal{B}}^{v_1}) + A \cdot (b K_{\mathcal{B}}^{v_2}) + A \cdot (c K_{\mathcal{B}}^{v_3}) \\ &= a A \cdot K_{\mathcal{B}}^{v_1} + b A \cdot K_{\mathcal{B}}^{v_2} + c A \cdot K_{\mathcal{B}}^{v_3} \\ &= a K_{\mathcal{E}}^{v_1} + b K_{\mathcal{E}}^{v_2} + c K_{\mathcal{E}}^{v_3} \\ &= a v_1^t + b v_2^t + c v_3^t \\ &= (a v_1 + b v_2 + c v_3)^t \\ &= v^t = K_{\mathcal{E}}^v. \end{aligned}$$

Quindi la matrice A era veramente quella buona (notate che nei passaggi qui sopra ho usato l'unica proprietà che valeva per costruzione per la matrice A , cioè che $A \cdot K_{\mathcal{B}}^{v_i} = K_{\mathcal{E}}^{v_i}$, $i = 1, 2, 3$)! Un ultimo controllo da persone sfiduciate... Sia $v = (-7, 0, -6)$ il v di prima. Abbiamo già visto che

$$K_{\mathcal{E}}^v = v^t = \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad K_{\mathcal{B}}^v = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Verifichiamo che la matrice A funziona davvero:

$$A \cdot K_{\mathcal{B}}^v = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot (-2) + 1 \cdot 3 + 1 \cdot (-6) \\ 0 \cdot (-2) + 2 \cdot 3 + 1 \cdot (-6) \\ 0 \cdot (-2) + 0 \cdot 3 + 1 \cdot (-6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Se avessimo voluto trovare $K_{\mathcal{B}}^v$ a partire da $K_{\mathcal{E}}^v$ era sufficiente invertire la matrice A e poi calcolare $A^{-1} \cdot K_{\mathcal{E}}^v$ che avrebbe fornito appunto $K_{\mathcal{B}}^v$.

Ricapitolando date $\mathcal{E}$ e $\mathcal{B}$ è molto facile trovare la matrice A che trasforma per ogni vettore v , $K_{\mathcal{B}}^v$ in $K_{\mathcal{E}}^v$ (essa si chiama matrice del cambiamento di base da $\mathcal{B}$ ad $\mathcal{E}$): basta prendere i vettori della base $\mathcal{B}$ nell'ordine, trasporli e metterli per colonna uno affianco all'altro. Poi inverti la matrice e mi trovo il cambiamento di base da $\mathcal{E}$ a $\mathcal{B}$.

Come si fa invece se una delle due basi non è quella canonica? Uno ha la base $\mathcal{B}$ e la base $\mathcal{B}'$ e vuole trovare la matrice del cambiamento di

base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$. Ecco il trucchetto: abbiamo detto che è facile trovare le matrici del cambiamento di base da una base a caso a quella canonica $\mathcal{E}$. Allora una le trova, diciamo che A è la matrice che fa passare da $\mathcal{B}$ ad $\mathcal{E}$ e B è la matrice che fa passare da $\mathcal{B}'$ ad $\mathcal{E}$. Il trucco ora è di partire da $\mathcal{B}$ per arrivare a $\mathcal{B}'$ passando per $\mathcal{E}$. Ecco lo schemino:

$$\mathcal{B} \xrightarrow{A} \mathcal{E} \xrightarrow{B^{-1}} \mathcal{B}';$$

quindi la matrice che passa da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ è data dal prodotto $B^{-1}A$ (occhio all'ordine, dallo schemino sembrerebbe che la matrice giusta sia il prodotto AB^{-1} , ma come per la composizione di funzioni, la cosa va al contrario: il punto è che nella moltiplicazione tra matrici e vettori colonna, il vettore va a destra e la matrice a sinistra, quindi se voglio eseguire prima la moltiplicazione per A per passare da $\mathcal{B}$ ad $\mathcal{E}$, la matrice A va messa alla destra della matrice B^{-1} !).

Facciamo ora un esempio in $\mathbb{R}^2$ per chiarire la questione. Si prendano le due basi di $\mathbb{R}^2$ date da $\mathcal{B} = \{v_1 = (1, 1), v_2 = (3, 1)\}$ e $\mathcal{B}' = \{w_1 = (-1, 2), w_2 = (-3, -3)\}$. Come passo da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$? La matrice che passa da $\mathcal{B}$ ad $\mathcal{E} = \{e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)\}$ abbiamo visto che è data da

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

mentre la matrice che passa da $\mathcal{B}'$ ad $\mathcal{E}$ è data da

$$B = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Ora, $\det B = 9$ e quindi

$$B^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 & 1/3 \\ -2/9 & -1/9 \end{pmatrix}.$$

Ma allora la matrice C che passa da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ si trova moltiplicando

$$B^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} -1/3 & 1/3 \\ -2/9 & -1/9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2/3 \\ -1/3 & -7/9 \end{pmatrix}$$

Facciamo la prova con un vettore, per esempio con il vettore $v = (-45, -9)$. Provare per credere, si ha

$$(-45, 9) = 9(9, 9) - 18(3, 1)$$

e quindi

$$K_{\mathcal{B}}^v = \begin{pmatrix} 9 \\ -18 \end{pmatrix}.$$

Allora

$$C \cdot K_{\mathcal{B}}^v = B^{-1} \cdot A \cdot K_{\mathcal{B}}^v = \begin{pmatrix} 0 & -2/3 \\ -1/3 & -7/9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ -18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 11 \end{pmatrix}$$

ed effettivamente $(-45, 9) = 12(-1, 2) + 11(-3, -3)$.

2. APPLICAZIONI LINEARI

Adesso che abbiamo capito come si cambia base con le matrici, cerchiamo di venire a capo della questione anche sulle applicazioni lineari.

Allora, prendiamo una applicazione $L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ (come al solito il tutto qui di seguito vale se pensiamo ad applicazioni $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, ma non voglio complicare le notazioni). A priori, come tutte le applicazioni tra insiemi, L è una legge che associa ad ogni elemento dell'insieme $\mathbb{R}^2$ uno e un solo elemento dell'insieme $\mathbb{R}^3$. Il punto è che questi insiemi di arrivo e partenza, in realtà hanno una struttura algebrica di spazio vettoriale. Ha un certo interesse allora, tra tutte le possibili applicazioni da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$ considerare solamente quelle che rispettano in qualche modo queste strutture algebriche, le *applicazioni lineari*. Esse sono quelle particolari funzioni tra questi due insiemi tali che

$$L(\alpha v + \beta w) = \alpha L(v) + \beta L(w), \quad \forall v, w \in \mathbb{R}^2, \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Un esempio di tale applicazione (esempio che ci porteremo appreso per tutto il paragrafo, studiandolo in dettaglio) è

$$\begin{aligned} L: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\mapsto (2x + y, x - y, -x + 3y) \end{aligned}$$

(verificare che si tratta effettivamente di un'applicazione lineare, cioè che soddisfa la proprietà su enunciata). Prendiamo ora le basi canoniche dei due spazi rispettivamente di arrivo e partenza e indichiamole con

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &\stackrel{\text{def}}{=} \{e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)\}, \\ \mathcal{F} &\stackrel{\text{def}}{=} \{f_1 = (1, 0, 0), f_2 = (0, 1, 0), f_3 = (0, 0, 1)\}. \end{aligned}$$

Ci proponiamo ora di associare una matrice ad L nel seguente modo: prendo arbitrariamente un vettore $v \in \mathbb{R}^2$, ad esso associo il vettore colonna $K_{\mathcal{E}}^v = v^t$ delle sue componenti nella base canonica di $\mathbb{R}^2$, poi applico L a v ottenendo un vettore $L(v) \in \mathbb{R}^3$, a cui posso associare il vettore colonna delle sue componenti $K_{\mathcal{F}}^{L(v)} = L(v)^t$ nella base canonica $\mathcal{F}$ di $\mathbb{R}^3$ e mi chiedo se esiste una matrice (che per forza di cose deve essere 3×2) che chiamerò $L_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}}$ tale che

$$L_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}} \cdot K_{\mathcal{E}}^v = K_{\mathcal{F}}^{L(v)}.$$

Al solito, se una tale matrice esistesse, in particolare la relazione appena scritta dovrebbe valere quando come vettore v prendo uno alla volta i vettori della base $\mathcal{E}$. Vediamo dunque se esistesse come dovrebbe essere fatta: $K_{\mathcal{E}}^{e_1} = e_1^t$, $L(e_1) = L(1, 0) = (2, 1, -1)$ e dunque $K_{\mathcal{F}}^{L(e_1)} = (2, 1, -1)^t$; analogamente $K_{\mathcal{E}}^{e_2} = e_2^t$, $L(e_2) = L(0, 1) = (1, -1, 3)$ e

dunque $K_{\mathcal{F}}^{L(e_2)} = (1, -1, 3)^t$. Ora, $L_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}}$ sarà del

$$L_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix},$$

e allora se $L_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}}$ esistesse dovrebbe soddisfare

$$L_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}} \cdot K_{\mathcal{E}}^{e_1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Analogamente

$$L_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}} \cdot K_{\mathcal{E}}^{e_2} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Dunque se una tale matrice esiste, essa deve essere fatta così:

$$L_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Un verifica del tutto analoga a quella fatta per verificare che la matrice del cambiamento di base era proprio quella trovata (è veramente del tutto analoga la verifica, non sto barando, vi invito a provare a farla!), mostra che questa matrice trovata, oltre a essere l'unica candidata possibile a risolvere il problema, è effettivamente la soluzione al nostro problema. Al solito lo verifichiamo su un vettore a caso, per esempio $v = (1, 2)$. Abbiamo:

$$K_{\mathcal{E}}^v = v^t = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad K_{\mathcal{F}}^{L(v)} = L(v)^t = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

essendo $L(v) = L(1, 2) = (2 \cdot 1 + 2, 1 - 2, -1 + 3 \cdot 2) = (4, -1, 5)$ ed effettivamente

$$L_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}} \cdot K_{\mathcal{E}}^v = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = K_{\mathcal{F}}^{L(v)}.$$

Cosa abbiamo scoperto in definitiva? Che se ho un'applicazione lineare, ad esempio da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$, data nella forma

$$\begin{aligned} L: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\mapsto (ax + by, cx + dy, ex + fy) \end{aligned}$$

allora la matrice associata ad L una volta che vengono fissate le basi canoniche sia nello spazio di partenza che nello spazio di arrivo è fatta

così:

$$L_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}.$$

E se cambio basi? Voglio dire se in partenza ho una base $\mathcal{B}$ e in arrivo una base $\mathcal{C}$ in generale diverse da quelle canoniche? Il problema è presto risolto, visto che ormai abbiamo capito come si cambia base: sappiamo scrivere molto facilmente le matrici del cambiamento di base rispettivamente in $\mathbb{R}^2$ e in $\mathbb{R}^3$ che mi fanno passare da $\mathcal{B}$ ad $\mathcal{E}$ e da $\mathcal{C}$ ad $\mathcal{F}$; siano esse rispettivamente B e C (la prima sarà 2×2 e la seconda 3×3). Allora dico che la matrice $L_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ di L espressa secondo queste basi, sarà data da

$$L_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = C^{-1} \cdot L_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}} \cdot B.$$

Cerchiamo di capire perché. Tanto per cominciare la matrice C^{-1} è la matrice del cambiamento di base in $\mathbb{R}^3$ da $\mathcal{F}$ a $\mathcal{C}$. Ora che relazioni soddisfano le varie matrici che compaiono nella formula su scritta? Eccole qua: per ogni $v \in \mathbb{R}^2$ e $w \in \mathbb{R}^3$ abbiamo per definizione

$$L_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} \cdot K_{\mathcal{B}}^v = K_{\mathcal{C}}^{L(v)}, \quad L_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}} \cdot K_{\mathcal{E}}^v = K_{\mathcal{F}}^{L(v)}, \quad C^{-1} \cdot K_{\mathcal{F}}^w = K_{\mathcal{C}}^w, \quad B \cdot K_{\mathcal{B}}^v = K_{\mathcal{E}}^v,$$

e a questo punto basta applicare queste regole alla nostra formula per verificare che effettivamente si ottiene una identità, infatti a primo membro abbiamo

$$L_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} \cdot K_{\mathcal{B}}^v = K_{\mathcal{C}}^{L(v)}$$

e a secondo membro

$$\begin{aligned} C^{-1} \cdot L_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}} \cdot \underbrace{B \cdot K_{\mathcal{B}}^v}_{=K_{\mathcal{E}}^v} &= C^{-1} \cdot \underbrace{L_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}} \cdot K_{\mathcal{E}}^v}_{=K_{\mathcal{F}}^{L(v)}} \\ &= C^{-1} \cdot K_{\mathcal{F}}^{L(v)} = K_{\mathcal{C}}^{L(v)}. \end{aligned}$$

A questo punto sporchiamoci le mani e vediamo come la cosa funziona sul nostro esempio di prima, $L(x, y) = (2x + y, x - y, -x + 3y)$. Fissiamo le basi rispettivamente di $\mathbb{R}^2$ e di $\mathbb{R}^3$ date da $\mathcal{B} = \{v_1 = (1, 1), v_2 = (1, -3)\}$ e $\mathcal{C} = \{w_1 = (3, 0, 0), w_2 = (1, 1, 0), w_3 = (0, 1, 1)\}$. In questo caso allora

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Allora $\det C = 3$ e

$$C^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

A questo punto

$$\begin{aligned}
 L_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} &= C^{-1} \cdot L_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}} \cdot B \\
 &= \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 4 \\ 2 & -10 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 5/3 & -5 \\ -2 & 14 \\ 2 & -10 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Come al solito verifichiamo la bontà dei nostri calcoli provando il tutto su un vettore, ad esempio $v = (3, -1)$. Abbiamo $v = 2v_1 + 1v_2$ e quindi

$$K_{\mathcal{B}}^v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix};$$

ora, $L(v) = L(3, -1) = (5, 4, -6)$ e, provare per credere, $(5, 4, -6) = -5/3(3, 0, 0) + 10(1, 1, 0) - 6(0, 1, 1)$ da cui

$$K_{\mathcal{C}}^{L(v)} = \begin{pmatrix} -5/3 \\ 10 \\ -6 \end{pmatrix}$$

ed effettivamente

$$L_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} \cdot K_{\mathcal{B}}^v = \begin{pmatrix} 5/3 & -5 \\ -2 & 14 \\ 2 & -10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/3 \\ 10 \\ -6 \end{pmatrix} = K_{\mathcal{C}}^{L(v)}.$$

Il tutto poi si fa più semplice se L va da uno spazio vettoriale in se stesso, tipo da $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^3$. In questo caso infatti non ci sarà bisogno di scegliere una base per la partenza e una per l'arrivo, ma prenderemo la stessa sia in partenza che in arrivo (e quindi se cambiamo base in partenza la cambiamo anche in arrivo di conseguenza). Per questo tipo di applicazioni, non ci sarà bisogno di usare un pedice e un apice per la matrice associata (cosa che facevamo per distinguere la base di partenza e di arrivo) ma basterà solo mettere un pedice, per indicare la (unica) base con cui stiamo lavorando (che sarà quindi sia in arrivo che in partenza).

Ad esempio se

$$\begin{aligned}
 L: \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\
 (x, y, z) &\mapsto (2x + y + z, x - y, -x + 3y - z),
 \end{aligned}$$

per quanto detto, la matrice associata $L_{\mathcal{F}}$ a L nella base canonica $\mathcal{F}$ (ripeto, sia in arrivo che in partenza! Usando la notazione di prima

avrei dovuto scrivere $L_{\mathcal{F}}$) sarà

$$L_{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Se volessi scrivere $L_{\mathcal{C}}$, la matrice associata a L nella base $\mathcal{C}$ di $\mathbb{R}^3$ che abbiamo considerato prima, allora dovrò fare

$$L_{\mathcal{C}} = C^{-1} \cdot L_{\mathcal{F}} \cdot C$$

dove, come prima, C è la matrice del cambiamento di base in $\mathbb{R}^3$ da $\mathcal{C}$ ad $\mathcal{F}$. Vedete, il primo membro è l'applicazione L vista da uno che vive in $\mathbb{R}^3$ e vede le cose con la base $\mathcal{C}$. Data l'uguaglianza, anche il secondo membro deve essere la stessa cosa: cosa fa il secondo membro? Prima moltiplica per C , che corrisponde a cambiare punto di vista, a vedere le cose nella base $\mathcal{F}$; poi agisce con l'applicazione lineare L (giustamente) vista dal punto di osservazione della base $\mathcal{F}$ e poi ritrasforma tutto con C^{-1} nel mondo di $\mathbb{R}^3$ visto con la base $\mathcal{C}$. Lo schemino è quindi questo:

$$\mathbb{R}_{\mathcal{C}}^3 \xrightarrow{C} \mathbb{R}_{\mathcal{F}}^3 \xrightarrow{L_{\mathcal{F}}} \mathbb{R}_{\mathcal{F}}^3 \xrightarrow{C^{-1}} \mathbb{R}_{\mathcal{C}}^3$$

e questa composizione è uguale a fare

$$\mathbb{R}_{\mathcal{C}}^3 \xrightarrow{L_{\mathcal{C}}} \mathbb{R}_{\mathcal{C}}^3$$

dove con $\mathbb{R}_{\mathcal{C}}^3$ e $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}^3$ ho indicato rispettivamente $\mathbb{R}^3$ visto da un osservatore che vede le cose con gli occhi della base $\mathcal{C}$ e da un osservatore che vede le stesse cose ma con gli occhi della base $\mathcal{F}$.