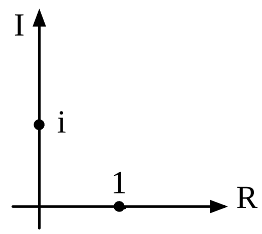
Numeri Complessi $\mathbb{C}$

L'insieme $\mathbb{R}$ non è un corpo algebricamente chiuso. In alcuni casi non esistono soluzioni reali alle equazioni, come per esempio $x^2 + 1 = 0$.

Si introduce quindi un nuovo oggetto detto "unità immaginaria", che ha la proprietà:

$$i \notin \mathbb{R}, \qquad i^2 = -1$$
$$\mathbb{C} = \{z = a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}$$

L'insieme $\mathbb{R}$ è un sottoinsieme dell'insieme $\mathbb{C}$. Un numero complesso è sempre formato da una parte reale e una immaginaria, se la parte immaginaria è 0, allora si tratta solo di un numero reale.



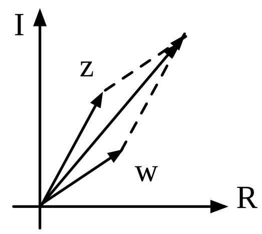
I numeri complessi si rappresentano nel piano di Gauss, che è simile al piano cartesiano, ma l'ascissa rappresenta la parte reale, mentre l'ordinata rappresenta la parte immaginaria.

In un numero $\in \mathbb{C}$, la parte reale è rappresentata dal coefficiente a (vedi prima), la parte immaginaria da b, entrambi sono numeri reali, e alla parte immaginaria viene moltiplicato i.

Operazioni

Somma

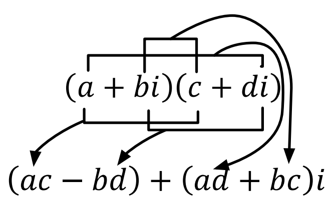
$z = a + bi,\ \ w = c + di,\ \ a, b, c, d \in \mathbb{R}$



Per eseguire la somma, basta sommare le parti reali e le parti immaginarie, tenendole distinte. Graficamente è interpretabile come la somma di due vettori.
$z + w = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$

Prodotto

Si esegue in maniera distributiva:
$z \cdot w = (a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bd(i^2)$



Dato che $i^2 = -1$, si sostituisce:
$ac + adi + bci - bd = (\boldsymbol{ac} - \boldsymbol{bd}) + (\boldsymbol{ad} + \boldsymbol{bc})\boldsymbol{i}$
(attenzione ai segni)

Valgono anche le proprietà del prodotto in $\mathbb{R}$, quindi l'elemento neutro e il reciproco:
$$\frac{i}{z} = \frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{-b}{a^2 + b^2} i$$

Osservazione
Si pone che $a^2 + b^2 \neq 0$
$w = x + yi, \qquad x, y \in \mathbb{R} : z \cdot w = 1$

Si scrive in modo esplicito, si svolge aggiungendo per completezza $0i$:
$(a + bi)(x + yi) = 1 \Leftrightarrow (ax - by) + (bx + ay)i = 1 + 0i$

Nota che le due parti a sinistra e a destra dell'uguale possono essere uguali se e solo se la parte reale di destra è uguale alla parte reale di sinistra, e la stessa cosa con la parte immaginaria:
$ax - by = 1 \wedge bx + ay = 0$

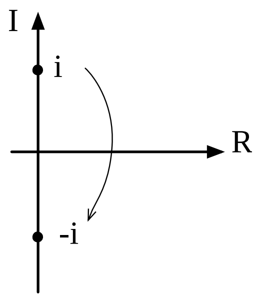
Si costruisce un sistema di Kramer, dove le due parti devono essere soddisfatte contemporaneamente:
$$\begin{cases} ax - by = 1 \\ bx + ay = 0 \end{cases}$$

Si ottiene:
$x = a^2 + b^2$
$y = a^2 + b^2$

Quoziente
Dividere un numero vuol dire moltiplicare per il suo reciproco, stessa cosa per i numeri complessi.
$$\frac{w}{z} = w \cdot \frac{1}{z}$$
$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

Ordinamento
Nessun ordinamento è compatibile con la somma e il prodotto, quindi non si possono applicare le relazioni d'ordine ai numeri complessi. Non possono di conseguenza esistere disequazioni con i numeri complessi.

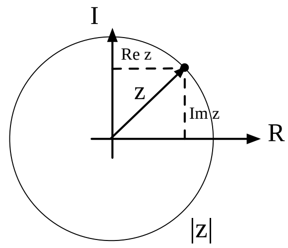
Coniugato
Il coniugato di un numero complesso z è il numero complesso $\bar{z}$ che ha la stessa parte reale e l'opposta parte immaginaria.
$\bar{z} = \Re z - \Im z \cdot i$ ($\Re$ = parte reale, $\Im$ = parte imm.)



Proprietà
1. $\Re(z + w) = \Re z + \Re w$ (stessa cosa con parte immaginaria)
2. $\Re \bar{z} = \Re z \wedge \Im \bar{z} = -\Im z$
3. $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$
4. $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$
5. $\bar{\bar{z}} = z$
6. $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = z$
7. $\Re z = \frac{z + \bar{z}}{2}$

8. $\Im\, z = \frac{z-\bar{z}}{2i} = -\frac{i}{2} \cdot (z \cdot \bar{z})$

Modulo



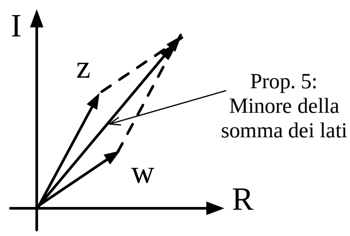
$|\circ| : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$

$|z| = \sqrt{(\Re\, z)^2 + (\Im\, z)^2}$

Il modulo di un numero complesso è rappresentato dai punti equidistanti $|z|$ dall'origine. Si calcola esattamente come il teorema di Pitagora, in questo caso per trovare la distanza dall'origine del punto z nel piano di Gauss.

Fare particolare attenzione al fatto che il modulo di un numero complesso non contiene l'unità immaginaria, è solo un numero che rappresenta una distanza, non un punto nel piano.

Proprietà



1. $|z| = |\bar{z}|$
2. $|\Re\, z| \leq z \wedge |\Im\, z| \leq |z|$
    a. Si verifica perchè l'ipotenusa di un triangolo rettangolo è sempre maggiore della base
    b. Se base e ipotenusa coincidono, allora il numero è solo $\in \mathbb{R}$
3. $z \cdot \bar{z} = |z|^2$
4. $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$
5. $|z + w| \leq |z| + |w|$
    a. Vedi disuguaglianza triangolare
6. $|z| \leq |\Re\, z| + |\Im\, z|$
7. $z \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}, \frac{w}{z} = w \cdot \frac{1}{z} = \frac{w \cdot \bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \frac{w \cdot \bar{z}}{|z|^2}$

Dimostrazione

Si vuole dimostrare la proprietà 5.

$\Leftrightarrow |z + w|^2 \leq (|z| + |w|)^2$

Osservando la proprietà 3, la si applica e si svolge al secondo membro:

$(z + w)\overline{(z + w)} \leq |z|\hat{\ }2 + |w|^2 + 2 \cdot |z| \cdot |w|$

Si applica di nuovo la prop. 3, si spezza la barra del coniugato $\bar{z} + \bar{w}$, si svolgono i calcoli e si semplifica (il prodotto di moduli è il modulo del prodotto):

$(z + w)\overline{(z + w)} \leq z \cdot \bar{z} + w \cdot \bar{w} + z \cdot |z| \cdot |w|$

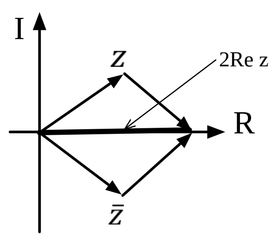
$z\bar{w} + \bar{z}w \leq 2 \cdot |z| \cdot |\bar{w}|$

Notare che il secondo addendo a sinistra è il coniugato del primo:

$\overline{z\bar{w}} = \bar{z} \cdot \bar{\bar{w}} = \bar{z} \cdot w$

$z\bar{w} + \overline{z\bar{w}} \leq 2 \cdot |z \cdot \bar{w}|$

Sappiamo che $2\, Re\, z = z + \bar{z}$:



$\Leftrightarrow 2\Re\,(z \cdot \overline{w}) \leq 2|z\overline{w}|$

$\Re\,(z\overline{w}) \leq |\Re\,(z\overline{w})| \leq |z\overline{w}|$

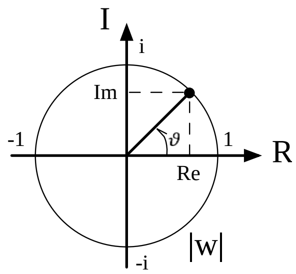
Dimostrazione
Si vuole dimostrare la proprietà 7.
Considerando la proprietà 3, se $z \neq 0$, allora anche $\bar{z}, |z| \neq 0$.
Basta rigirare la equazione per fare in modo che in un membro ci sia $\frac{1}{z}$.

Esempio

$$\frac{3+2i}{2-i} = \frac{(3+2i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{(6+3i+4i+2i^2)}{2^2+(-1)^2} = \frac{4}{5} + \frac{7}{5}i$$

Forma trigonometrica

$w \in \mathbb{C}, |w| = 1$
Si disegnano sul piano di Gauss tutte le soluzioni, quindi tutti i numeri complessi che distano 1 dall'origine, ottenendo la circonferenza trigonometrica.



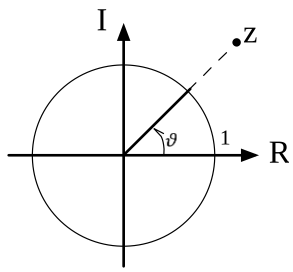
$$\vartheta_{RAD} \in [0, 2\pi[$$
$$w = (\cos\vartheta\,, i \cdot \sin\vartheta)$$

Utilizzando la forma trigonomatrica si trattano i punti come se si scrivessero con coordinate polari, quindi con distanza e angolo orientato.
Se si divide per il modulo si ottiene il punto come se facesse parte della circonferenza trigonometrica:

$$z \neq 0 \Rightarrow \frac{z}{|z|} = \cos\vartheta + i \cdot \sin\vartheta$$

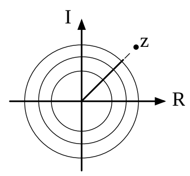
La distanza, ottenuta con il modulo, si indica con ρ:

$$z = \rho(\cos\vartheta + i \cdot \sin\vartheta)$$



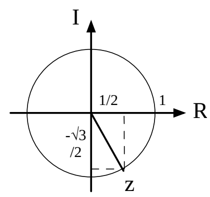
In pratica si crea un vettore normalizzato, ρ indica la distanza dall'origine (**modulo**), ϑ viene detto **argomento**.

Esempio
Scrivere in forma trigonometrica $z = 1 - \sqrt{3}i$.
Non è normalizzato, si trova ρ che dice a quale circonferenza (orbita) appartiene.



$$2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \sqrt{3}i\right) = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

Bisogna trovare ϑ in modo da avere la forma $\cos\vartheta + i \cdot \sin\vartheta$:



$$\begin{cases} \cos\vartheta = \frac{1}{2} \\ \sin\vartheta = -\frac{\sqrt{3}}{2} i \end{cases}$$

Si ottiene che per i due valori l'angolo risulta $\frac{5}{3}\pi$. Quindi $\rho = 2$, $\vartheta = \frac{5}{3}\pi$.

Esempio

Dato $z = 2 - 2i$, trovare il modulo, argomento, scrivere in forma trigonometrica, rappresentare sul piano di Gauss.

$$|z| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2} = \rho$$

$$\begin{cases} \rho \cdot \cos\vartheta = \Re\, z \\ \rho \cdot \sin\vartheta = \Im\, z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\vartheta = \dfrac{1}{\rho} \Re\, z \\ \sin\vartheta = \dfrac{1}{\rho} \Im\, z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\vartheta = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\vartheta = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Si nota immediatamente che il punto è nel quarto quadrante, e che l'angolo è $\frac{7}{4}\pi$ o $-\frac{\pi}{4}$.

$$2 - 2i = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

Quindi $2\sqrt{2}$ è il modulo, mentre $-\frac{\pi}{4}$ è l'argomento.

Osservazione

Cosa succede quando si moltiplicano due numeri complessi in forma trigonometrica:

$z = \rho(\cos\vartheta + i \cdot \sin\vartheta)$

$\bar{z} = \rho(\cos -\vartheta + i \cdot \sin -\vartheta)$

$w = R(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$

$$z \cdot w = \rho \cdot R(\cos\vartheta + \varphi + i \cdot \sin\vartheta + \varphi)$$
$$z^n = \rho^n(\cos n\varphi + i \cdot \sin n\varphi)$$

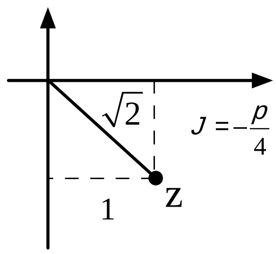
Esempio

Calcolare $\bar{z} \cdot z^n$, sapendo che $z = 1 - i$.

$\bar{z} = 1 + i$

$|1 - i| = \sqrt{2}$

$\rho = \sqrt{2}, \vartheta = \dfrac{\pi}{4}$



Si applica la formula:

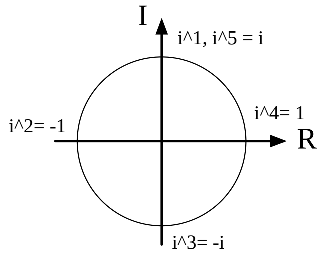
$$z^{11} = \sqrt{2}^{11} \cdot \left(\cos\left(-11 \cdot \frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-11 \cdot \frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$\Rightarrow 32\sqrt{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i\right) = -32(1 + i)$$

$$\bar{z} \cdot z^{11} = (1 + i)(-32)(1 + i) = -64i$$

Radici complesse

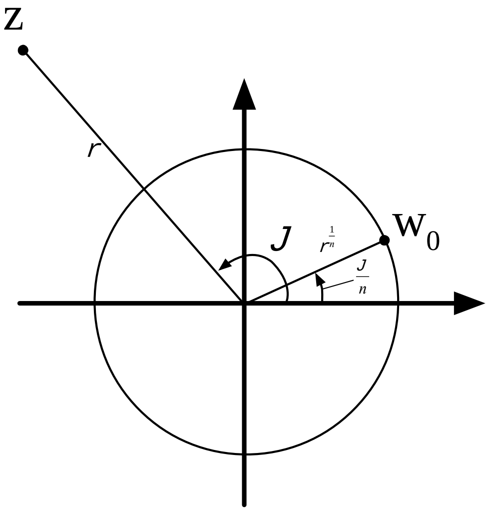
Prima nota, osserva come funzionano le potenze nel piano di Gauss; si nota una rotazione, man mano che l'esponente sale, dopo i^3 torna all'inizio, e così via.

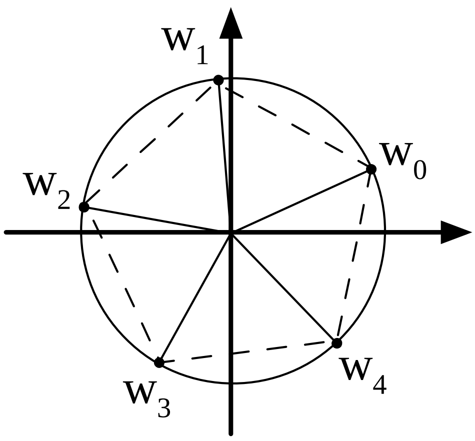


Dato un numero $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}^+$, un numero $w \in \mathbb{C}$ si dice radica n-esima di z se $w^n = z$. w è l'incognita.

$$z = \rho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta), \qquad w^n = z$$
$$w_k = \rho^{\frac{1}{n}}(\cos\varphi_k + i\sin\varphi_k), \qquad \varphi_k = \frac{\vartheta}{n} + k\frac{2\pi}{n}, \qquad k = 0, 1, \dots, n-1$$

Le radici n-esime stanno tutte sulla stessa circonferenza, basta trovare la prima e poi costruire il poligono che parte da essa e determina le altre soluzioni ruotando di $\frac{2\pi}{n}$:





Per esempio se $n = 5$ si prende $\frac{1}{n} = \frac{1}{5}$ dell'angolo ϑ, quindi $\frac{\vartheta}{5}$ e si trova il primo punto, poi si ricavano gli altri.

Dimostrazione
Si applica il teorema fondamentale dell'algebra, se $z \neq 0$ esistono esattamente n radici n-esime di z.
$z = \rho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$
$w = R(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$

Si sa che $\varphi > 0$ e ϑ, R sono noti. Si nota che per la proprietà della potenza di un numero complesso:
$w^n = R^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$

Vogliamo trovare che un numero complesso elevato a n è uguale ad un altro numero complesso, quindi si scrive:
$R^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)) = \rho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$

$R^n = \rho \Rightarrow R = \rho^{\frac{1}{n}}$

Se sono uguali, allora anche i loro moduli sono uguali, risolvendo la uguaglianza tra due numeri complessi:

$$\begin{matrix} Re \\ Im \end{matrix} \begin{cases} \cos(n\varphi) = \cos\vartheta \\ \sin(n\varphi) = \sin\vartheta \end{cases}$$

$$\varphi = \frac{\vartheta}{n}$$

Ma **si considera anche la periodicità**, quindi $\vartheta \Rightarrow \vartheta + 2k\pi$ (si aggiunge k volte l'angolo giro):

$$\varphi_k = \frac{\vartheta + 2k\pi}{n} = \frac{\vartheta}{n} + k\frac{2\pi}{n}, \qquad k = 0, 1, 2 \dots n-1$$

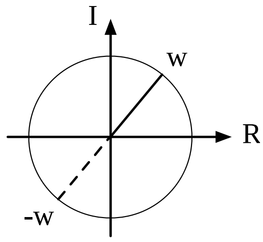
La periodicità di φ ci dice che il valore restituito è uguale.

$$W_k = \rho^{\frac{1}{n}}(\cos\varphi_k + i\sin\varphi_k)$$

Risoluzione di radici complesse

Osservazione

Se $n = 2$, si hanno 2 radici complesse, dove $w_1 = -w_2$ perchè si esegue una rotazione di π.



Esempio

$$z = 1 - \sqrt{3}i = 2\left(\cos\frac{5}{3}\pi + i\sin\frac{5}{3}\pi\right)$$

$$\rho = 2, R = \sqrt{2}$$

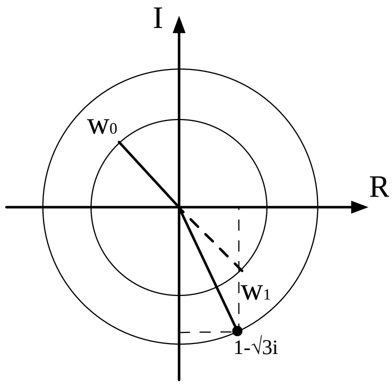
$$\vartheta = \tfrac{5}{3}\pi, \varphi = \tfrac{5}{6}\pi$$

$$\cos\left(\frac{5}{6}\pi\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \sin\left(\frac{5}{6}\pi\right) = \frac{1}{2}$$

$$w_0 = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{5}{6}\pi\right) + i\sin\left(\frac{5}{6}\pi\right)\right) =$$

$$= \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = -\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$w_1 = \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$



Esempio

$w^6 = -i$

Le radici n-esime hanno modulo 1.

$$-i = 1\left(\cos\frac{3}{2}\pi + i\sin\frac{3}{2}\pi\right)$$

Per le radici seste bisogna trovare $\frac{\vartheta}{6}$:

$$\varphi_0 = \frac{1}{6}\cdot\frac{3}{2}\pi = \frac{\pi}{4}$$

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{6}2\pi = \frac{7}{12}\pi$$

$$\varphi_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{6}2\pi = \frac{11}{12}\pi$$

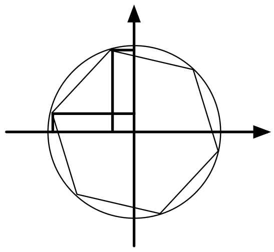
Gli altri φ si trovano sommando π, dato che sono opposti. Si trovano i punti risolvendo seno e coseno nella equazione di prima:

$$w_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$$

Si ricava w_1 con le formule di duplicazione, dato che sappiamo dov'è il doppio dell'angolo φ_1 ma non l'angolo stesso:

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos(2\alpha)}{2} \Leftrightarrow |\cos\alpha| = \sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}}$$

$$w_1 = \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2} + i\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$



Essendo un caso particolare, w_2 si può ricavare con seno e coseno di w_2 scambiati.

Forma algebrica

Esempio

$$z^2 + 78 = 18\sqrt{3}i$$
$$z^2 = 6\left(-13 + 3\sqrt{3}i\right)$$

Con la forma trigonometrica risulta difficile da risolvere. Si procede nel modo algebrico (ignorante), funziona sempre ma non è detto che sia quello più veloce. Per semplificare i calcoli dimentico il 6 per poi moltiplicarne la radice alla fine.

$$z = x + iy, \qquad x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$
$$z^2 = x^2 + iy^2 + 2iyx = x^2 - y^2 + 2xyi$$

Si agisce *quasi* come in una equazione di secondo grado, dove per risolverla bisogna trovare due termini la cui somma dia b e il prodotto c:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -13 \\ 2xy = 3\sqrt{3} \end{cases}$$

A questo punto si risolve il sistema:

$$\begin{cases} x^2 - \dfrac{27}{4x^2} = -13 \\ y = \dfrac{3\sqrt{3}}{2x} \end{cases}$$

Si risolve la prima per sostituzione $x^2 = t$:

$$t^2 + 13t - \frac{27}{4} = 0$$

$$t = \frac{-13 \pm \sqrt{169+27}}{2} = \frac{-13 \pm 14}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}$$

La seconda soluzione non ci interessa dato che è < 0. Abbiamo trovato x, si riprende y:

$$y^2 = \frac{27}{4x^2} \Leftrightarrow \frac{27}{4\frac{1}{2}} = \frac{27}{2}$$

$$x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow y = \pm\frac{3\sqrt{6}}{2}$$

Si calcola il risultato riprendendo il 6:

$$z = \pm\sqrt{6}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{6}}{2}i\right) = \pm\left(\sqrt{3} + 9i\right)$$

Per verificare l'esattezza del risultato basta farne il quadrato.

Equazioni di secondo grado $\Delta < 0$

Si procede esattamente come nelle equazioni di secondo grado con soluzioni reali, solo che questa volta quando si risolve la radice quadrata si utilizza la unità immaginaria per procedere con la risoluzione.

Esempio

$z^2 + z + 1 = 0$

$$z = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2} = \left[-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right]$$

Si applica al teorema fondamentale dell'Algebra, se $P_n(z) = 0$ è una equazione di grado n (coefficienti reali o complessi), allora ha esattamente n soluzioni in $\mathbb{C}$ (contate con la molteplicità, una può essere contata più volte). **Quindi un polinomio di grado elevato si può sempre scomporre in polinomi di grado 1 o 2.**

Esempio

$x^4 = 1 \Rightarrow [x^2 = 1\ \mathbb{R}], [x^2 = -1\ \mathbb{C}]$

Osservazione

Se $P_n(z)$ ha coefficienti reali e $z \in \mathbb{C}$ è soluzione della equazione, allora una è coniugata dell'altra, $\bar{z}$ è soluzione della equazione con la stessa molteplicità. Se $P(z) = 0$ allora il coniugato è nullo.

$P(\bar{z}) = P\overline{(z)}$

Osservazione

Il segno del terzo termine va preso singolarmente, si tratta a parte quando si fa la radice. Per esempio, se il terzo termine è – $(3 + 2i)$ allora nella radice bisogna fare $b^2 - 4 \cdot a \cdot -c$ tenendo il segno fuori dalla parentesi, quindi facendo risultare $b^2 + 4 \cdot a \cdot c$.

Forma esponenziale

$z = \rho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta) = \rho e^{i\vartheta}$

$w = R(\cos\varphi + i\sin\varphi) = Re^{i\varphi}$

$z^2 = \rho^2(\cos 2\vartheta + i\sin 2\vartheta) = \left[\rho e^{i\vartheta}\right]^2 = \rho e^{2i\vartheta}$

$$z \cdot w = \rho e^{i\vartheta} \cdot Re^{i\varphi} = \rho Re^{i(\vartheta+\varphi)}$$