

Esempio inutile, da spazi vettoriali

Esempio

Creare una base di $\mathbb{R}^3$ partendo dal vettore $v = (1,0,2)$.

Si può partire aggiungendo alla lista di vettori la base canonica (sappiamo che già funziona), il problema ci chiede di creare una base che comprenda il vettore v , quindi ne bastano altri due.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ (riduzione a scala)}$$

Prendendo il secondo e il terzo vettore della matrice ridotta a scala, il problema viene risolto (sono lin. indep. da v).

Da linearizzazione, spazzatura

Se $B = (v_1, \dots, v_n)$ è una base per cui:

$$M_{B,B}(T) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = \mathcal{O}$$

Allora:

$$([T(v_1)]_B, \dots, [T(v_n)]_B) \text{ ovvero } [T(v_1)]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ ovvero lo manda in un suo}$$

multiplo, e così via per gli altri:

$$T(v_1) = \lambda_1 v_1 + 0v_2 + \dots + 0v_n = \lambda_1 v_1$$

Non capito perché, spazi euclidei

Osservazione

Se A è una matrice **ortogonale** $\in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ allora le sue colonne formano una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$.

$$A^T \cdot A = I$$

Riflessione rispetto al piano

Un gruppo di matrici ortogonali 3×3 invertibili tali che il determinante sia uguale a 1 (quindi conservano le orientazioni nello spazio). Se il determinante è -1 allora la orientazione viene rovesciata.

Fallita miseramente la dimostrazione del teorema spettrale, ho sbagliato qualcosa negli appunti, troppo complicato, sono un pigrone

Dimostrazione

Si fa per induzione su n , per $n = 1$ è ovvia (matrice formata da un solo elemento), essendo la matrice sempre simile ad una diagonale (è già diagonale).

Supponendo che l'enunciato sia vero per matrici su spazi con dimensioni $n - 1$,

Ponendo vero il teorema per matrici simmetriche $(n - 1) \times (n - 1)$, sia λ_1 un autovalore di S (dato che tutte le matrici simmetriche hanno autovalori), e sia v_1 un suo autovettore, si ha che $Sv_1 = \lambda_1 v_1$; completando v_1 a base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ si crea:

$$\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$$

Che quindi risulta composta dall'autovettore v e lo spazio generato dall'insieme dei vettori ortogonali a v .

Sia $P = M(\mathcal{C}, \mathcal{B})$ la matrice di cambiamento di base, si sa che:

1. P è ortogonale, dato che è una matrice di cambiamento di base fra basi ortonormali
2. $P^T S P$ è simmetrica, dato che $(P^T S P)^T = P^T S^T P = P^T S P$
3. La sua prima colonna è $\lambda_1 e_1$ perché:
 - a. $P^T S P = \begin{pmatrix} \cdots & v_1 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} S \begin{pmatrix} \vdots & \vdots \\ v_1 & \vdots \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix}$
 - b. Si sa che applicando S a v_1 si ottiene un autovettore, quindi la prima colonna è sicuramente un autovettore $\begin{pmatrix} \vdots & \vdots \\ \lambda_1 v_1 & \vdots \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix}$
 - c. Al primo posto della matrice risultante quindi si ottiene $\lambda_1 \langle v_1, v_1 \rangle = \lambda_1 \cdot 1$
 - d. Negli altri posti si ottiene 0, dato che il prodotto scalare risulta 0 (base ortogonale)
 - e. Ovvero si ottiene che $P^T S P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \cdots \\ 0 & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$, gli zeri compaiono anche nella prima riga, dato che è simmetrica
4. Reiterando all'interno per induzione si ottiene una matrice diagonale

Quindi da $P^T S P$, dove P è la matrice di cambiamento di base, si ottiene una matrice diagonale formata dagli autovalori.

$\exists U'$ ortogonale e $\exists D'$ diagonale tali che $U'^T S' U' = D'$. Considero la matrice Q tale che:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & U' & \\ 0 & & \end{pmatrix}$$

Risulta ortogonale (la prima colonna è ortogonale alle altre), ovvero

Avendo trovato D , $Q^T (P^T S P) Q = D$