
Applicazioni Lineari

Mc128k

Operatori, applicazioni, nucleo, isomorfismo



Applicazioni Lineari

Siano V, W due s.v. su $\mathbb{K}$, $L: V \rightarrow W$ è detta applicazione (o funzione) lineare se rispetta le operazioni di somma e prodotto per uno scalare:

$\forall v_1, v_2 \in V, \forall c \in \mathbb{K}$:

- $T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2)$
- $T(c(v_1)) = cT(v_1)$

O in forma ridotta:

$$L(a_1 v_1 + a_2 v_2) = a_1 L(v_1) + a_2 L(v_2)$$

Quindi, avendo una applicazione lineare, se si conoscono le immagini dei vettori di una base si può ottenere la immagine di un qualunque altro vettore rispetto a quella base.

Esempio

$$L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$x = (x_1, \dots, x_n) \rightarrow (y_1, \dots, y_m)$$

La applicazione lineare è in grado di generare anche vettori con dimensione diversa da quelli in entrata, gli spazi vengono definiti all'inizio.

Osservazione

Se $V = W$, la applicazione L si dice **operatore o endomorfismo**. Un esempio può essere la rotazione.

Elementi

Verifica

Per verificare se una applicazione è lineare basta vedere se rispetta le operazioni e se il vettore nullo del dominio va nel vettore nullo del codominio.

Esempio

$$L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, L(x, y, z) = \pi x + y, x + z$$

Verifico il vettore nullo:

$$L(0, 0, 0) = (0, 0) \rightarrow OK$$

Verifico la additività:

$$L(v_1 + v_2) \stackrel{?}{=} L(v_1) + L(v_2)$$

$$v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$$

$$v_1 = (a_1, b_1, c_1), v_2 = (a_2, b_2, c_2)$$

$$L(v_1 + v_2) = L(a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2) = (\pi(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2), \dots)$$

$$L(v_1) + L(v_2) = \dots$$

Svolgendo i calcoli risultano uguali componente per componente, quindi funziona.

Verifico la omogeneità:

$$L(kv) \stackrel{?}{=} kL(v)$$

$$L(kv) = L(k_a, k_b, k_c) = (\pi k_a + k_b, k_a + k_c) = \dots = k(\pi a + b, a + c) = kL(v)$$

Esempio

$$L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$L: (x, y) \rightarrow (2x - y, 3x + 4y)$$

Controllo il vettore nullo:

$$L(0, 0) = (0, 0)$$

Per verificare parametricamente le operazioni scelgo $v_1(x, y)$ e $v_2(x', y')$; applico la forma ridotta per verificare sia somma che prodotto per scalare:

$$a_1 L(v_1) + a_2 L(v_2)$$

$$a_1(2x - y, 3x + 4y) + a_2(2x' - y', 3x' + 4y') = \dots$$

Applico L alla somma dei vettori:

$$L(a_1 v_1 + a_2 v_2) = \dots$$

Confrontando elemento per elemento le due espressioni, risultano uguali, quindi è dimostrata essere una applicazione lineare.

Esempio

Sia W l'insieme delle funzioni $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ infinitamente differenziabili, tali che $f'' + f = 0$, dimostrare che W è un ssv. di $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Sicuramente W conterrà specifiche funzioni, quindi si verifica lo spazio vettoriale nel solito modo.

Lo zero appartiene a W , dato che $0'' + 0 = 0$.

Verifico che sia chiuso rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare:

$$f, g \in W, \quad f'' + f = 0, g'' + g = 0$$

$$f + g \in W?$$

$$(f + g)'' + (f + g) = f'' + g'' + f + g = 0 \rightarrow OK$$

$$\forall f \in W, \forall k \in \mathbb{R}, \quad k \cdot f \in W?$$

Applicando le proprietà delle derivate:
 $(kf)'' + kf = kf'' + kf = k(f'' + f) = 0 \rightarrow OK$

Quindi W è un ssv. di $\mathcal{F}$.

Esempio

Sempre considerando W come l'insieme delle funzioni infinitamente differenziabili tali che $f'' + f = 0$, l'insieme $U = \mathcal{L}(\sin t, \cos t)$ è un ssv. di W con $\dim U = 2$?

Deve innanzitutto essere un sottoinsieme, quindi ogni elemento di U deve essere elemento di W . Se $\sin t \in W$ e $\cos t \in W$ allora va bene, dato che ci sono tutte le combinazioni lineari.

$$\sin'' t + \sin t = (\cos t)' + \sin t = -\sin t + \sin t = 0 \rightarrow OK$$
$$\cos'' t + \cos t = -\sin t + \sin t = 0 \rightarrow OK$$

Quindi $U \subseteq W$, ed è anche un suo ssv. perché tutte le combinazioni lineari di $\sin t$ e $\cos t$ appartengono a W .

Per dimostrare che ha dimensione 2, cerco una base tra i suoi generatori; $\sin t$ e $\cos t$ sono linearmente indipendenti? Lo si verifica con la comb. lin. nulla:

$$a \cdot \sin t + b \cdot \cos t = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$$

Bisogna trovare solo i coefficienti per capire la indipendenza lineare per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Se si annullasse il secondo termine qualunque sia il coefficiente (quindi $t = \frac{\pi}{2}$) si otterrebbe che:

$$a \cdot \sin t + 0 = 0 \Rightarrow a = 0$$

Nel caso contrario in cui $t = 0$:

$$0 + b \cdot \cos t = 0 \Rightarrow b = 0$$

Non possono esistere valori che con coefficienti non nulli possano annullare la combinazione lineare, quindi gli unici coefficienti che vanno bene sono gli zeri.

Quindi ha dimensione 2.

Applicazione nulla

Esiste sempre la applicazione lineare nulla:

$$\mathcal{O}: V \rightarrow W$$

$$v \rightarrow \mathcal{O}$$

Operatore identità

È l'operatore che associa ad ogni vettore sé stesso:

$$V \rightarrow V$$

$$v \rightarrow v$$

Applicazione delle coordinate

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita, scelgo una base $\mathcal{B}(w_1, \dots, w_n)$, definisco una applicazione che estrae le coordinate rispetto alla base:

$$\varphi_{\mathcal{B}}: V \rightarrow \mathbb{K}^n$$

$$v \rightarrow [v]_{\mathcal{B}}$$

È lineare:

$$\varphi_{\mathcal{B}}(v_1 + v_2) = [v_1 + v_2]_{\mathcal{B}}$$

$$\varphi_{\mathcal{B}}(v_1) + \varphi_{\mathcal{B}}(v_2) = [v_1]_{\mathcal{B}} + [v_2]_{\mathcal{B}}$$

$$[v_1]_{\mathcal{B}} = x$$

$$[v_2]_{\mathcal{B}} = y$$

$$v_1 = x_1 w_1 + \dots + x_n w_n$$

$$v_2 = y_1 w_1 + \dots + y_n w_n$$

$$v_1 + v_2 = (x_1 + y_1) w_1 + \dots + (x_n + y_n) w_n$$

Iniettività e suriettività

Una applicazione lineare è iniettiva se non ci sono "collisioni" nel codominio, quindi se il nucleo è formato dal solo vettore nullo.

Per quello che riguarda la suriettività invece bisogna considerare l'immagine, se corrisponde allo spazio vettoriale del codominio, allora è suriettiva.

Immagine

Data una a.l. $L: V \rightarrow W$ considero la immagine come l'insieme dei vettori del codominio raggiunti da tutti i vettori del dominio:

$$\mathcal{Im} L = \{w \in W : \exists v \in V L(v) = w\}$$

Si tratta dell'insieme formato da tutti i punti raggiunti da V . Non necessariamente comprende tutto il codominio, ma è sempre un suo sottoinsieme.

Teorema

La immagine di L è un sottospazio vettoriale di W .

Dimostrazione

Prendo in considerazione le proprietà dei sottospazi.

- Il vettore nullo 0 fa parte dell'insieme immagine, dato che viene raggiunto dal vettore nullo dell'altro spazio

- $u_1, u_2 \in \text{Im } L \rightarrow \exists v_1, v_2 \in V : u_1 = L(v_1), u_2 = L(v_2)$ allora $u_1 + u_2 = L(u_1) + L(u_2) = L(u_1 + u_2)$
 - Quindi $L(u_1 + u_2)$ viene raggiunto da $u_1 + u_2$
 - Sia $u \in \text{Im } L, c \in \mathbb{K}, u = L(v), cu = cL(v) = L(cv)$

Osservazioni

Se $v_1, \dots, v_k$ generano V (dominio), allora $L(v_1), \dots, L(v_k)$ generano $\text{Im } L$.

Se L è suriettiva, si genera W .

$$V \xrightarrow{L} \text{Im } L \subset W$$

Matrice associata

Ogni applicazione lineare del tipo $L_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ può essere individuata da una matrice $M_{m \times n}$ tale che $M_L = (L(e_1), \dots, L(e_n))$, dove e_n sono termini della base canonica.

Quindi le **colonne** della matrice sono **formate dalle immagini dei vettori della base canonica**, che giustamente avranno dimensione m . Moltiplicare la matrice per un vettore $\in \mathbb{R}^n$ produce il corrispondente vettore in $\mathbb{R}^m$, che varia a seconda della applicazione.

Il **numero di colonne** deve essere uguale al numero di dimensioni del **dominio**, il **numero di righe** al numero di dimensioni del **codominio**.

$$A = Mx = [\dots] \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Esempio

$$T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ -x_2 \\ 2x_1 \end{pmatrix}$$

Calcolare $M_{T_{3 \times 2}}$ e poi la applicazione lineare associata alla matrice L_{M_T} .

$$M_T = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots \\ T(e_1) & T(e_2) \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

$$T(e_1) = T(1, 0) = (1, 0, 2)$$

$$T(e_2) = T(0, 1) = (1, -1, 0)$$

$$L_{M_T}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ -x_2 \\ 2x_1 \end{pmatrix} = T(x)$$

Composizione

La composizione di applicazioni lineari è ancora lineare. Bisogna fare particolare attenzione all'ordine dei nomi, dato che sono invertiti rispetto a come si leggono le operazioni.

La composizione funziona se e solo se i domini e i codomini sono compatibili. Per esempio si può fare la composizione di una applicazione $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ con un'altra $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ sono in una direzione, non nell'altra dato che $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^4$ non sono compatibili.

Fare attenzione all'ordine, prima si applica la a.l. più interna:

$$T: A \rightarrow B, \quad S: B \rightarrow C$$

$$S \circ T \Leftrightarrow A \xrightarrow{T} B \xrightarrow{S} C \Leftrightarrow A \rightarrow C \Leftrightarrow S(T(A))$$

La composizione di applicazioni lineari rappresentate da matrici si fa con la moltiplicazione riga per colonna:

$$S \circ T = M_S \cdot M_T$$

Esempio

$$T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ -x_2 \\ 2x_1 \end{pmatrix}$$

$$S: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 + x_2 - x_3 \\ x_2 + 2x_3 \end{pmatrix}$$

Si vuole calcolare la applicazione composta $(S \circ T)(x_1, x_2)$.

$$= S(T(x_1, x_2)) = S(x_1 + x_2 - x_2, 2x_1) = (x_1 + x_2 - x_2 - 2x_1, -x_2 + 4x_1)$$

Ma è possibile anche utilizzare le matrici:

$$M_{S \circ T} = M_S \cdot M_T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$L_{M_{S \circ T}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ 4x_1 - x_2 \end{pmatrix}$$

Che risulta uguale a ciò ottenuto prima.

Per controllare **se una applicazione è invertibile** basta controllare che lo sia la matrice, e per trovarla basta trovare la matrice inversa.

Teorema di esistenza e unicità

Siano V, W s.v. su $\mathbb{K}$, sia $\mathcal{B}(v_1, \dots, v_n)$ una base di V , allora comunque scelti $w_1, \dots, w_n \in W \exists!$ (una sola) app. lineare $L: V \rightarrow W$ tale che $\forall j, L(v_j) = w_j$.

Dimostrazione

Per dimostrare che qualcosa esiste basta scriverlo. Bisogna dire chi è $L(v) \forall v \in V$.

Un vettore v è la combinazione lineare dei vettori della base con le coordinate. Quindi l'applicazione a v genera nuove coordinate rispetto a generatori di W .

$$v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$$

$$L(v) = y_1 w_1 + \dots + y_n w_n$$

L è lineare perché lo sono le coordinate.

$$L(v_1) = 1 \cdot w_1 + 0 \cdot w_2 + \dots + 0 \cdot w_n = w_1$$

$$v_1 = 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \dots + 0 \cdot v_n = v_1$$

e così via per $j = 2 \dots n$.

Sia F è un'altra applicazione lineare $V \rightarrow W$ tale che dia gli stessi risultati

$$F(v_j) = w_j$$

Allora

$$w = L(v) = x_1 L(v_1) + \dots$$

$$w = F(v) = x_1 F(v_1) + \dots$$

Confrontando i risultati risulta che $F = L$.

Esempio

Scrivere una applicazione lineare $L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_3[t]$ tale che:

$$L((3, 2)) = 1 + t + t^2 + t^3$$

Si inventa una base che contenga la coppia $(3, 2)$:

$$B = (v_1, v_2) = ((3, 2), (1, 1))$$

Scelgo due vettori nel codominio:

$$w_1 = 1 + t + t^2 + t^3$$

$$w_2 = 5t^3 \text{ (qualunque)}$$

Dal teorema di unicit  esiste una sola applicazione lineare tale che $L(v_1) = w_1, L(v_2) = w_2$; basta scriverne una qualunque, come richiesto dal problema, l'importante   che contenga il vettore $(3, 2)$ nel dominio che corrisponde al polinomio nel codominio.

$$L(x, y) = \dots$$

Dati i due vettori delle basi, si vogliono trovare le coordinate di x, y rispetto a v_1, v_2

$$(x, y) = a_1 v_1 + a_2 v_2 = a_1 (3, 2) + a_2 (1, 1) = (3a_1 + a_2, 2a_1 + a_2)$$

$$\begin{cases} 3a_1 + a_2 = x \\ 2a_1 + a_2 = y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a_2 = -2x + 3y \\ a_1 = x - y \end{cases}$$

$$L(x, y) = a_1 w_1 + a_2 w_2$$

$$a_1 = (x - y)$$

$$w_1 = (1 + t + t^2 + t^3)$$

$$a_2 = (-2x + 3y)$$

$$w_2 = 5t^3$$

$$\Rightarrow (x - y) + (x - y)t + (x - y)t^2 + (x - y - 10x - 15y)t^3$$

I coefficienti sono le variabili della funzione.

Propriet 

1. La **somma** di applicazioni lineari   una applicazione lineare
2. La **composizione** di applicazioni lineari   lineare
3. Se L   lineare e **invertibile**, allora L^{-1}   lineare
4. Somma e composizione si **distribuiscono**
 - a. $(G + H) \circ L = G \circ L + H \circ L$
 - b. $L \circ (G + H) = L \circ G + L \circ H$
5. Le **costanti** possono muoversi ovunque