



Movimenti rigidi

Mc128k

Movimenti rigidi negli spazi euclidei



Movimenti rigidi

Detti anche **isometrie**, i tratta di movimenti che non deformano le figure, quindi conservano distanze, quindi lunghezze e angoli. In $\mathbb{R}^2$, si possono considerare rotazioni e riflessioni associabili a matrici.

Un operatore in $\mathbb{R}^3$ che soddisfi queste proprietà si può definire come:

$$\forall X, Y \in \mathbb{R}^3, \text{dist}(m(X), m(Y)) = \text{dist}(X, Y)$$

Una **rotazione** in $\mathbb{R}^3$ si definisce ponendo un asse di rotazione e ruotando i punti in piani normali a questo asse, ogni piano esegue una rotazione come in $\mathbb{R}^2$.

Osservazione

Un operatore che conserva le distanze conserva anche gli angoli (si formano triangoli).

Teorema

Preso un operatore $M: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, sono equivalenti le seguenti definizioni:

- M è un movimento rigido e conserva l'origine
- M conserva il prodotto scalare
- $M(x) = AX$ con A matrice ortogonale

Dimostrazione

$1 \Rightarrow 2$:

$$\forall x, y, \text{dist}^2(x, y) = \|x - y\|^2 = \langle (x - y), (x - y) \rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2xy$$

Per definizione, l'operatore conserva le distanze:

$$\begin{aligned} \text{dist}^2(x, y) &= \text{dist}^2(M(x), M(y)) = \|M(x) - M(y)\|^2 = \dots \\ &= \|M(x)\|^2 + \|M(y)\|^2 + 2M(x)M(y) \end{aligned}$$

Ma dato che vale anche la eguaglianza delle distanze dall'origine:

$$\|M(x)\|^2 = \|x\|^2 = \text{dist}^2(x, \mathcal{O})$$

Allora vale che:

$$\begin{aligned} \text{dist}^2(x, y) &= \text{dist}^2(M(x), M(y)) \\ x \cdot y &= M(x) \cdot M(y) \end{aligned}$$

Quindi si conserva il prodotto scalare

$2 \Rightarrow 3$:

Prima si dimostra che l'unica funzione che conserva il prodotto scalare e la base canonica è la funzione identità:

$$M(e_j) = e_j$$

Sia $X \in \mathbb{R}^3$ $Y = M(X)$, vale che:

$$X_j = X \cdot e_j = M(X) \cdot M(e_j) \text{ (per ipotesi)} = Y \cdot e_j = Y_j$$

Considero i vettori $M(e_1), M(e_2), M(e_3)$, la applicazione M conserva il prodotto scalare per ipotesi, quindi i vettori $M(e_1) \dots M(e_3)$ sono ancora una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$, quindi se $e_1 \perp e_2$ allora anche $M(e_1) \perp M(e_2)$.

Prendendo la matrice di cambiamento di base, risulta ortogonale, dato che è una matrice di cambiamento di base fra basi ortonormali:

$$A = (M(e_1), M(e_2), M(e_3))$$

Allora anche A^{-1} è ortogonale, ma dato che le matrici ortogonali conservano il prodotto scalare, allora:

$$\langle A^{-1}X, A^{-1}Y \rangle = \langle X, Y \rangle$$

Considerando $A^{-1} \cdot M$, dato che entrambe conservano il prodotto scalare, anche la composta lo fa, ma conserva anche la base canonica:

$$(A^{-1} \cdot M)(e_j) = A^{-1}(M(e_j)) = e_j$$

Dunque $A^{-1} \cdot M = \text{Id}$ quindi $M = A$, quindi $M(x) = AX$

$3 \Rightarrow 1$:

Si sa che $M(X) = AX$ è un operatore rappresentato da A ortogonale, bisogna dimostrare che M è un movimento rigido, e $M(\mathcal{O}) = \mathcal{O}$. La seconda condizione è banalmente verificata, dato che si tratta di una applicazione lineare. Per verificare che si tratta di un movimento rigido bisogna dimostrare che vengono conservate le distanze, quindi:

$$\text{dist}(AX, AY) = \text{dist}(X, Y)$$

$$\text{dist}(AX, AY) = \|AX - AY\|$$

$$\text{dist}(X, Y) = \|X - Y\|$$

La lunghezza si fa eseguendo il prodotto scalare di un vettore con sé stesso, ma A conserva il prodotto scalare, dato che è ortogonale. Se si conserva il prodotto scalare allora si conservano le distanze, quindi è verificato.

Traslazioni

Sono movimenti rigidi che non conservano l'origine.

Definizione

La traslazione viene definita come uno spostamento dato da un vettore:

$$\forall v \in \mathbb{R}^3, \quad t_v : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad X \rightarrow X + v$$

$$\text{Id} = t_0$$

Le traslazioni sono movimenti rigidi, dato che:

$$\begin{aligned} \text{dist}^2(t_v(X), t_v(Y)) &= \|t_v(X) - t_v(Y)\|^2 = \|(X + v) - (Y + v)\|^2 = \|X - Y\|^2 \\ &= \text{dist}^2(X, Y) \\ \Rightarrow \text{dist}^2(t_v(X), t_v(Y)) &= \text{dist}^2(X, Y) \end{aligned}$$

Ma non conservano l'origine, dato che $t_v(0) = 0 + v = v$.

Teorema di classificazione

Ogni movimento rigido nello spazio euclideo è la composizione di un operatore ortogonale e una traslazione.

In altre parole, un movimento rigido può essere eseguito solo da una combinazione di rotazioni, specchiamenti e traslazioni.

$$M = t_v \cdot L_A, \quad \forall X, M(X) = AX + v$$

Dimostrazione

Chiamando $v = M(0)$, si considera $t_{-v} \circ M$, questa composizione è un movimento rigido, e $(t_{-v} \circ M)(0) = t_{-v}(M(0)) = t_{-v}(v) = v + (-v) = 0$.

Quindi $t_{-v} \circ M$ è un movimento rigido che fissa l'origine, quindi esiste una matrice A ortogonale tale che $(t_{-v} \circ M)(X) = AX$:

$$t_{-v}(M(X)) = AX \Leftrightarrow M(X) - v = AX \Leftrightarrow M(X) = AX + v$$