



Operatori

Mc128k

Operatori, casi particolari in $\mathbb{R}^2$



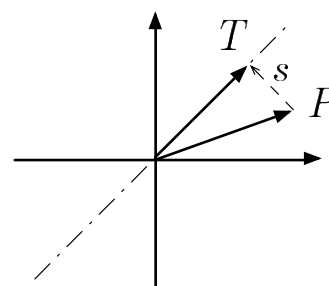
Operatori

Sono applicazioni lineari che vanno da uno spazio vettoriale a sé stesso. Per comodità di solito si usa la stessa base. Gli operatori sono detti anche **endomorfismi**.

Operatori in $\mathbb{R}^2$

Proiezione ortogonale

Si consideri come retta su cui eseguire la proiezione la bisettrice del primo e il terzo quadrante, $y = x$, si vuole considerare un vettore T come la proiezione ortogonale del vettore P sulla retta.



È possibile ricavare la formula per ottenere T , per prima cosa si ottiene un fascio di rette ortogonali alla bisettrice:

$$y = -x + q$$

Per determinare q considero $P(a, b)$, la retta deve passare per quel punto, quindi $b = -a + q \Leftrightarrow q = b + a$

$$s: y = -x + b + a$$

Il punto $T(P)$ è dato dalla intersezione delle due rette:

$$\begin{cases} y = x \\ y = -x + b + a \end{cases} \rightarrow x = \frac{b}{2} + \frac{a}{2}$$

$$T(P) = \left(\frac{b+a}{2}, \frac{b+a}{2} \right) \rightarrow T(x, y) = \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2} \right)$$

$$M_{\mathcal{C}, \mathcal{C}}(T) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La applicazione non è un isomorfismo, dato che il determinante della matrice associata è zero.

Per determinare le dimensioni del nucleo e dell'immagine, si utilizza il teorema di nullità più rango. Essendo la dimensione di entrambi uguale a 2, i casi sono i seguenti:

1. $\dim \ker T = 0, \dim \text{Im } T = 2$
2. $\dim \ker T = 1, \dim \text{Im } T = 1$

$$3. \dim \ker T = 2, \dim \operatorname{Im} T = 0$$

Il primo e il terzo caso si devono scartare. In particolare il terzo vale soltanto se la applicazione è nulla, quindi sia la dimensione del nucleo che dell'immagine sono uguali a 1.

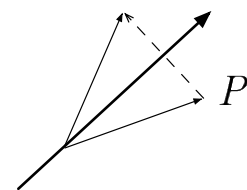
$$\ker T = \{(x, y): T(x, y) = (0, 0)\} \Rightarrow \{(x, -x)\}$$

$$\operatorname{Im} T = \mathcal{L}\left(\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right)$$

Ci sono autovettori sulla retta, con autovalore 1 (dato che portano a sé stessi), inoltre ci sono anche sulla retta parallela a s e passante per l'origine, con autovalore 0.

Riflessione

In questo caso il punto viene riflesso rispetto ad una retta, la distanza dalla proiezione è uguale per il punto e quello riflesso.



Nel caso particolare in cui la retta di riflessione sia uno degli assi, basta invertire i segni giusti; di fatto si può scegliere una base con la quale si possa ricadere in questo caso:

$$T(x, y) = (x, -y)$$

$$M_{\mathcal{C}, \mathcal{C}}(T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La applicazione è un isomorfismo. Il nucleo è formato solo dal vettore nullo, le immagini raggiungono $\mathbb{R}^2$.

Definita una base $\mathcal{B} = ((2, -3), (4, 4))$, calcolare $M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(T)$.

La matrice dovrebbe essere non singolare (determinante diverso da zero), ed è **simile** a $M_{\mathcal{C}, \mathcal{C}}(T)$.

Si può calcolare utilizzando la definizione $([T(v_1)]_{\mathcal{B}}, \dots)$:

$$T(v_1) = T(2, -3) = (2, 3) = a(2, -3) + b(4, 4) \rightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{5} \\ b = \frac{3}{5} \end{cases}$$

Ottenendo le coordinate del nuovo vettore (attraverso la applicazione) rispetto a $\mathcal{B}$. Stessa cosa con l'altro vettore della base, ottenendo:

$$M = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{8}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

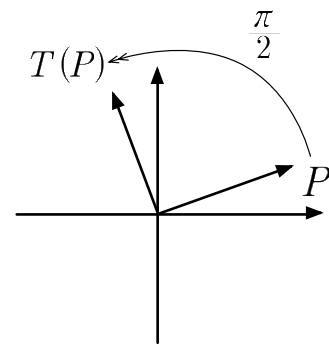
Si notano intuitivamente due autovettori, rispettivamente sugli assi x e y :

$$\begin{aligned} v(x, 0), \quad T(v) &= 1 \cdot v \\ w(0, y), \quad T(w) &= -1 \cdot w \end{aligned}$$

Se si vuole diagonalizzare la matrice bisogna usare la base canonica, dato che i suoi vettori sono anche autovettori.

Rotazione

$V = \mathbb{R}^2$, fisso un angolo $\frac{\pi}{2}$, P è la rotazione di $\frac{\pi}{2}$ in senso antiorario di un punto $P(x, y)$.



Dimostro che è un operatore:

1. Costruire la matrice
2. Ricavare la formula
3. Operazione inversa e confronto

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{C}, \mathcal{C}}(T) &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ T(P) &= (-y, x) \end{aligned}$$

Questo dimostra che è un operatore, dato che è lo stesso risultato che si ottiene applicando la funzione:

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

Non è un isomorfismo, dato che non ci sono autovettori, quindi non è diagonalizzabile.

Matrici simili

Due operatori uguali rispetto a basi diverse possiedono due matrici simili tra loro, quindi hanno un legame. Siano dati le a.v.:

$$M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(T), M_{\mathcal{B}', \mathcal{B}'}(T)$$

$$M_{\mathcal{B}', \mathcal{B}'}(T) = M_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(\text{Id} \circ T \circ \text{Id})$$

La composizione di funzioni corrisponde al prodotto di matrici, quindi non ci sono problemi a moltiplicare una matrice per l'identità.

$$= M_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(\text{Id}) \cdot M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(T) \cdot M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(\text{Id})$$

Le basi "vicine" sono uguali, quindi si può procedere con la composizione. La prima e l'ultima matrice rappresentano il cambiamento di base.

$$= M(\mathcal{B}', \mathcal{B}) \cdot M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(T) \cdot M(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$$

$$M_{\mathcal{B}', \mathcal{B}'}(T) = P^{-1} \cdot M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(T) \cdot P$$

Definizione

Siano $A, B \in M_{m \times n}$, si dicono matrici **simili** se esiste una matrice invertibile P tale che $B = P^{-1} \cdot A \cdot P$.

Esempio

Dimostrare che matrici simili hanno lo stesso determinante.

Si può sfruttare il teorema di Binet ($\det AB = \det A \cdot \det B$). Siano A, B due matrici simili, quindi $B = P^{-1} \cdot A \cdot P$, allora $\det B = \det(P^{-1} \cdot A \cdot P) = \det P^{-1} \cdot \det A \cdot \det P = \frac{1}{\det P} \cdot \det A \cdot \det P = \det A$.

Operatori in $\mathbb{R}^2$ con matrice ortogonale

Si vuole sapere quali sono gli operatori del piano tali che la loro matrice in base canonica sia ortogonale, quindi $A^T \cdot A = Id_2$.

$$\text{Sol } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Per soddisfare la ortogonalità:

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{cases} a^2 + c^2 = 1 \\ ab + cd = 0 \\ b^2 + d^2 = 1 \end{cases}$$

In particolare la seconda riga dice che i vettori $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ sono ortogonali (prodotto scalare uguale a zero), quindi nella matrice del sistema le colonne sono ortogonali. Dato che le colonne stanno nel cerchio trigonometrico ($\sin^2 + \cos^2 = 1$), il vettore ortogonale al primo può essere in due posizioni, o si somma $\frac{\pi}{2}$ o si sottrae.

Se $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = T(e_1) = (\cos \vartheta, \sin \vartheta)$ allora $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = T(e_2) = (\cos \vartheta \pm \frac{\pi}{2}, \sin \vartheta \pm \frac{\pi}{2})$.

$$T(e_2) = (\sin \vartheta, -\cos \vartheta) \vee (-\sin \vartheta, \cos \vartheta)$$

Quindi la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ può avere solo due tipi:

$$\begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ \sin \vartheta & -\cos \vartheta \end{pmatrix}$$

