



Spazio Generato

Mc128k

Spazio generato, forma cartesiana, generatori fondamentali, forma parametrica



Spazio Generato $\mathcal{L}$

Sia V uno s.v. su campo $\mathbb{K}$, siano $v_1, \dots, v_k$ vettori di V , $\mathcal{L}(v_1, \dots, v_k)$ è definito come l'insieme di tutte le combinazioni lineari di $v_1, \dots, v_k$. Si dice che $\mathcal{L}$ è lo **spazio generato** da $v_1, \dots, v_k$, detti **generatori**. Quindi in uno spazio generato da k vettori, la loro combinazione lineare può fare in modo di raggiungere qualunque punto ad esso appartenente.

Dimostrazione

Si vuole dimostrare che lo spazio generato è a sua volta un sottospazio vettoriale di V .

1. Verifica dell'esistenza del vettore nullo
 - a. $0 = 0 \cdot v_1 + \dots + 0 \cdot v_n$ si può fare prendendo $a_j = 0 \forall j$
2. Esistenza della somma
 - a. Se $v, w \in \mathcal{L}(v_1, \dots, v_k)$ vale anche che la somma $v + w \in \mathcal{L}$
 - b. $v = (a_1 v_1 + \dots + a_k v_k)$, $w = (b_1 v_1 + \dots + b_k v_k)$
3. Prodotto per uno scalare
 - a. $v = a_1 v_1 + \dots + a_k v_k$
 - b. $cv = (ca_1)v_1 + \dots$ raccogliendo rimane comb. lin. $v_1, \dots, v_k$

Si dice che i vettori $v_1, \dots, v_k$ **generano** lo spazio vettoriale V se l'insieme delle loro combinazioni lineari $\mathcal{L}$ coincide con V .

I generatori possono essere anche in eccesso, l'importante è che ce ne siano più di una certa quantità. Per esempio $\mathbb{R}^n$ viene generato da un numero k di vettori tali che $k \geq n$. Meno vettori non possono raggiungere tutti i punti dello spazio, di più vanno bene comunque, dato che sono ridondanti (linearmente dipendenti da altri vettori).

Spazio finitamente generato

V si dice uno spazio finitamente generato se è generato da un numero finito di vettori.

Esempio

$V = M_{2 \times 2}$ è finitamente generato?

Riprendendo l'esempio precedente, si cerca di creare dei generatori per la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, quindi delle matrici che moltiplicate per coefficienti e poi sommate possano ottenere A .

Si può considerare un caso molto semplice:

$$A = 1 \cdot e_1 + 2 \cdot e_2 + 3 \cdot e_3 + 4 \cdot e_4$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sono stati costruiti effettivamente dei generatori per qualunque matrice 2×2 , ma è importante notare che non sono unici, ad esempio il primo è equivalente a:

$$1 \cdot \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Spazio infinitamente generato

Al contrario, uno spazio infinitamente generato come $\mathbb{R}[k]$ o $\mathcal{F}$ non ha un numero finito di generatori.

Generatori fondamentali

1. Gli elementi della base canonica $\{e_{ij}\}$ generano $M_{m \times n}(\mathbb{K})$, essendo matrici caratterizzate da zeri tranne che un solo elemento uguale a 1 nel posto i, j
2. $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{C}^n$ sono generati da $\{e_1, \dots, e_n\}$
3. I polinomi si dividono in due tipi:
 - a. $\forall n, \mathbb{R}_n[t]$ è finitamente generato da $\{1, t, t^2, \dots, t^n\}$
 - b. $\mathbb{R}[t]$ non è finitamente generato
4. Le funzioni non sono finitamente generate (vedi seno e coseno), non si possono generare con combinazioni lineari finite.

Dimostrazione

$\mathbb{R}[t]$ non è finitamente generato.

Supponiamo per assurdo che esso lo sia, quindi esistono generatori di $\mathbb{R}[t]$: $p_1(t), \dots, p_k(t)$ di grado $b_1, \dots, b_k$

Si considerano le loro combinazioni lineari:

$$a_1 p_1(t) + a_2 p_2(t) + \dots + a_k p_k(t)$$

Se ora venisse sommato un termine, il grado potrebbe:

- Rimanere uguale
- Diventare più grande (nuovo termine di grado più alto degli altri)
- Diventare più piccolo (annulla un grado massimo)

Per il fatto che il grado potrebbe crescere, i generatori non possono essere finiti, quindi si crea un assurdo.

Generatori di $\mathbb{R}^2$

$$\mathcal{L}(v_1, v_2) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a v_1 + b v_2, a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

Se $v_1, v_2 = 0$, $\mathcal{L}(v_1, v_2) = 0$ (origine)

Generatori di $\mathbb{R}^3$

$\mathcal{L}(v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R})$

I tre vettori sono linearmente indipendenti.

$$\mathcal{L}(v_1, v_2, v_3) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = tv_1 + hv_2 + sv_3, t, s, h \in \mathbb{R} \right\}$$

- Se due sono lin. dip. allora si ottiene un piano passante per l'origine
- Se tre sono linearmente dipendenti, si ottiene una retta
- Se sono zero si ottiene solo l'origine (che rimane comunque uno spazio vettoriale).

I generatori di uno spazio si possono scrivere in **due forme** equivalenti:

1. $W = \mathcal{L}(v_1, \dots, v_n)$
2. $W = \text{Sol}(A, \mathcal{O})$

Per passare dalla forma (1) alla forma (2) si risolve il sistema associato

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \vdots & \vdots & \vdots & x_1 \\ v_1 & \cdots & v_n & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & x_n \end{array} \right) \text{ (vedi forma cartesiana) e si cercano le equazioni che}$$

corrispondono a zeri, sono le equazioni del sottospazio.

Invece per passare dalla forma (2) alla (1) si risolve il sistema omogeneo e si trova una **base** di W dando alternativamente valori 0 e 1 alle variabili libere (es. 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1).

Equazione cartesiana

Si vuole ottenere la equazione cartesiana per i generatori $\mathcal{L}(v_1, \dots, v_n)$, quindi dell'insieme $W = \mathcal{L}(\dots)$. Questo vuol dire stabilire quando il sistema associato $(A|b)$ è risolvibile, dove:

$$A = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ v_1 & \cdots & v_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}, \quad b = (x \quad y \quad z)$$

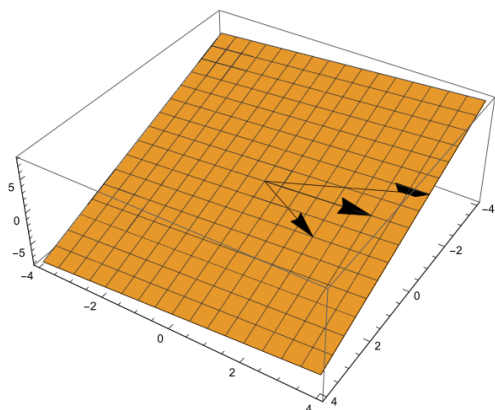
Ottenendo:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \vdots & \vdots & \vdots & x \\ v_1 & \cdots & v_3 & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & z \end{array} \right)$$

Risolvendo con Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \cdots & \cdots & \cdots & (eq) \\ 0 & \cdots & \cdots & (eq) \\ 0 & 0 & 0 & (eq) \Leftarrow \end{array} \right)$$

La ultima equazione (quella uguale al vettore nullo) è il risultato cercato, una equazione che descrive lo spazio generato dai vettori.



Esempio

Determinare la equazione cartesiana di $W = \mathcal{L}(v_1, v_2, v_3)$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Creo la matrice associata, controllo che sia risolubile ($\text{rg } A = \text{rg } A|b$), riduco a scala, trovo le righe di A uguali a zero, prendo le equazioni in b associate a quelle righe. In questo caso si ottengono le equazioni cartesiane:

$$z - x - 2y + 4 = 0$$

$$w - y + 2x = 0$$

Forma parametrica

Per $\mathbb{R}^3$ bisogna avere tre punti non allineati P_0, P_1, P_2 .

$$x = P_0 + t(P_1 - P_0) + s(P_2 - P_0), \quad t, s \in \mathbb{R}$$

Per passare dalla forma cartesiana alla forma parametrica bisogna formare il sistema formato dalla equazione.

Esempio

Si vuole passare dalla equazione cartesiana alla forma parametrica:

$$y - 3z - 5x = 0$$

Il sistema si costruisce banalmente dalla equazione stessa, dalla matrice associata risulta che bisogna utilizzare due parametri:

$$\{y - 3z - 5x = 0$$

$$(-5 \quad 1 \quad -3 \mid 0)\}$$

La matrice è già ridotta a scala, quindi si scelgono parametri per t e s .

$$t \rightarrow 1, \quad s \rightarrow -3$$

$$\begin{cases} y - 3z - 5x = 0 \\ y = t \\ z = s \end{cases} \rightarrow x = \frac{1}{5}t - \frac{3}{5}s$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5}t - \frac{3}{5}s \\ t \\ s \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$W = \mathcal{L} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Vengono generati i vettori dipendenti dai parametri che generano il sottospazio. In questo caso sono due, quindi viene generato un piano.

La stessa cosa funziona se si hanno a disposizione più equazioni cartesiane:

- Mettere a sistema
- Formare la matrice completa
- Ridurre a scala
- Porre i parametri $(t, s \dots)$
- Applicare le sostituzioni nelle equazioni
- Risolvere rispetto alle tre variabili
- Ottenere i vettori dipendenti (quelli moltiplicati per i parametri)

Intersezione e somma di spazi

Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$, siano W, U suoi sottospazi. Si dimostra che $W \cap U$ è ancora un sottospazio vettoriale, mentre l'unione in generale non è un sottospazio; risulta essere invece un sottospazio la somma dei due.

$$W + U = \{v \in V : v = w + u, w \in W, v \in U\}$$

Osservo che $W = \mathcal{L}(w_1, \dots, w_n)$ e $U = \mathcal{L}(u_1, \dots, u_n)$ allora $W + U = \mathcal{L}(u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n)$, in altre parole si ottiene una base che comprende tutti i generatori degli ssv.

Per esempio possono essere sottospazi vettoriali due rette (non coincidenti) **passanti per l'origine**, la somma delle due ottiene due generatori linearmente indipendenti, quindi una base di $\mathbb{R}^2$; due rette generano un piano.

Definizione

Diremo che V è **somma diretta** di W e U se:

- $V = W + U$ (somma più grande possibile), quindi ogni elemento $v \in V$ si può scrivere **univocamente** come la somma di un elemento di U e uno di W .
- $W \cap U = \{0\}$ (intersezione più piccola possibile), condizione necessaria e sufficiente.

Lo si indica con $V = W \oplus U$.

Formula di Grassmann

Sia V uno sv. di dimensioni finite su campo $\mathbb{K}$, siano W, U suoi ssv., allora $\dim(W + U) = \dim W + \dim U - \dim(U \cap W)$.

Chiaramente i vettori in comune non sono linearmente indipendenti, quindi vanno tolti per avere una base, quindi il numero di dimensioni di uno sv.

Corollario

Se $V = W \oplus U$, per la formula di Grassmann due spazi vettoriali sono in somma diretta se e solo se $\dim V = \dim W + \dim U - 0$ (dato che la intersezione è nulla).

Dimostrazione

$$\dim(W + U) = \dim W + \dim U - \dim(W \cap U)$$

Chiamiamo per convenienza i componenti:

$$\dim W = p$$

$$\dim U = q$$

$$\dim(W \cap U) = k$$

Sia $(v_1, \dots, v_k)$ una base comune, completo a base di W aggiungendo vettori. Sia dunque

$$\mathcal{B}_W = (v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_p)$$

$$\mathcal{B}_U = (v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_u)$$

Essendo basi, i vettori all'interno sono linearmente indipendenti tra loro.

Per provare la tesi bisogna dimostrare che il seguente insieme di vettori (formato da tutti i vettori delle basi, comuni e non) sia base di $W + U$:

$$\Gamma = (v_1, \dots, v_k, w_{k+1}, \dots, w_p, u_{k+1}, \dots, u_q)$$

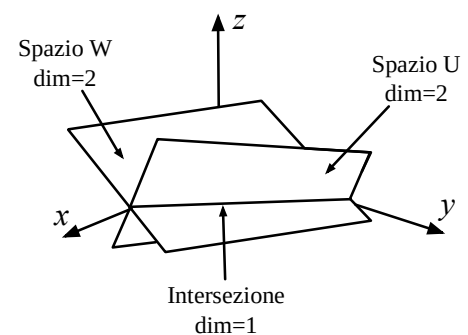
Unendo le basi, i vettori $v_1, \dots, v_k$ sono in comune, dato che altrimenti sarebbero dipendenti (sono gli stessi).

L'insieme forma una base, dato che i vettori sono linearmente indipendenti e generano $W + U$. Costruisco i vettori di questo insieme come combinazione lineare di scalari per i vettori che formano la base:

$$w \in W$$

$$u \in U$$

$$v = w + u = (a_1 v_1 + \dots + a_k v_k + b_{k+1} w_{k+1} + \dots + b_p w_p) + (c_1 v_1 + \dots + c_k v_k + d_{k+1} u_{k+1} + \dots + d_p u_p)$$



I due piani in comune hanno una retta, i due sottospazi di dimensione 2 in R^3 hanno in comune un sottospazio di dimensione 1

Raccogliendo:

$$= (a_1 c_1) v_1 + \dots + (a_k c_k) v_k + b_{k+1} w_{k+1} + \dots + b_p w_p + d_{k+1} u_{k+1} + \dots + d_p u_p$$

Dimostro che sono linearmente indipendenti, quindi scrivo una comb. lin. nulla e verifico che i coefficienti possono essere solo zeri:

$$(a_1 c_1) v_1 + \dots + (a_k c_k) v_k + b_{k+1} w_{k+1} + \dots + b_p w_p + d_{k+1} u_{k+1} + \dots + d_p u_p = 0$$

Porto a destra, effettivamente differenziando i componenti $\in w$ e $\in u$:

$$(a_1 c_1) v_1 + \dots + (a_k c_k) v_k + b_{k+1} w_{k+1} + \dots + b_p w_p = -d_{k+1} u_{k+1} - \dots - d_p u_p$$

In questo modo si sta affermando che un vettore di W è uguale a parte delle componenti di un vettore di U , ma non ci sono parti dipendenti, quindi l'unica combinazione che può rendere vera l'uguaglianza è 0 , quindi $b_y = 0$.

Rimane:

$$a_1 v_1 + \dots + a_k v_k \rightarrow v_1, \dots, v_k \text{ sono lin. indep.} \rightarrow a_j = 0$$

Lemma di Steinitz

Afferma che dato uno spazio vettoriale finitamente generato da n vettori, preso un numero di vettori maggiore di n appartenenti a quello spazio, essi devono essere linearmente dipendenti, quindi **ogni base di uno spazio ha lo stesso numero di generatori**.

Sia $V = \mathcal{L}(v_1, \dots, v_m)$, siano $w_1, \dots, w_n \in V$ con $m < n$, allora sono linearmente dipendenti.

Osservazione

Sia V uno s.v. di dimensione n , sia W un suo ssv., allora:

- W ha una base, e $\dim W \leq \dim V$
- Se $\dim W = n$ allora $W = V$