



Lo Spazio R^3

Mc128k

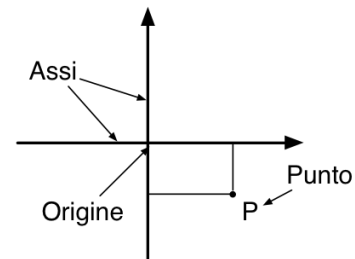
Elementi fondamentali, operazioni, vettori, rette, piani



Spazio $\mathbb{R}^3$

Piano cartesiano

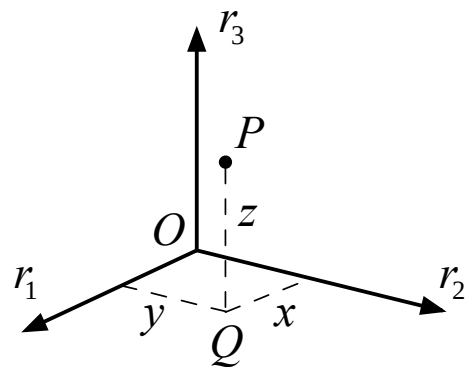
Formato da due rette perpendicolari che convergono in un punto detto Origine (O). Sono definiti verso e unità di misura.



Spazio ordinario

Formato da tre dimensioni, quindi tre rette perpendicolari a due a due.

Esiste una corrispondenza biunivoca tra punto e coordinate, quindi un punto P e una **terna** (quindi l'ordine è importante) di coordinate x_1, x_2, x_3 . Nel diagramma per determinare le coordinate si proietta il punto sui tre piani perpendicolari e si prende la distanza ortogonale.



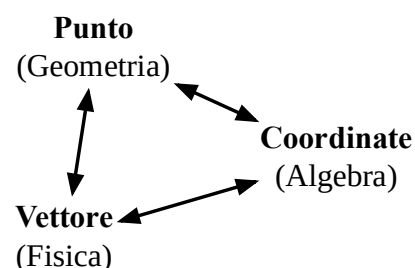
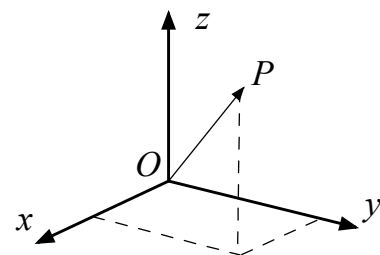
In geometria un punto si indica con le coordinate:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ oppure } \{x_1, x_2, x_3\}$$

I **numeri** vengono detti anche **scalari**. Una terna di numeri è un elemento del prodotto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$ (si legge "erre tre"). I punti si dicono anche **vettori**, se si considera il punto di partenza O (origine degli assi) e l'orientamento viene dato dal segmento $\overline{OP}$.

Quindi punto, vettore e coordinate rappresentano la stessa cosa.

Solitamente si indicano i vettori con le lettere U, V, W, u, v, w .

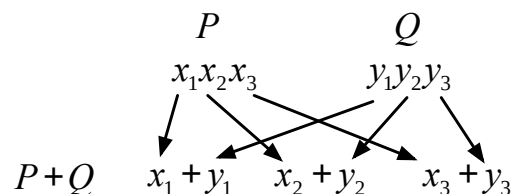


Vettori

Operazioni

Somma

Due vettori si possono sommare membro a membro, quindi si prendono i singoli valori di ogni dimensione e si sommano.



Geometricamente si interpreta come la **regola del parallelogramma**.

Per la sottrazione basta invertire il secondo vettore:

$$P - Q = P + (-Q)$$

Prodotto per uno scalare

Da non confondere con il prodotto scalare, in questo caso si moltiplica membro a membro un vettore per uno scalare (quindi un numero):

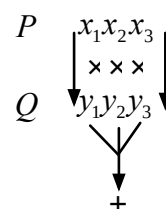
$$c\mathbf{v} := (cx_1, cx_2, cx_3) \\ (-1)\mathbf{v} = -\mathbf{v}$$

Prodotto scalare

Esprime in modo formale tutti i concetti geometrici, dato che con esso si possono definire lunghezza, distanza e angolo.

Per ottenerlo, si moltiplicano membro a membro i vettori, poi si sommano i risultati. Si indica con il punto grosso oppure con le parentesi "spigolose":

$$\mathbf{v} \bullet \mathbf{w}, \quad \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \\ \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$



Il prodotto scalare indica che il prodotto di due vettori diventa uno scalare.

Proprietà

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle \text{ (simmetria)}$$

$$\langle \lambda \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \lambda \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \text{ (linearità)}$$

$$\langle \mathbf{v} + \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$$

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \geq 0 \text{ (somma di elementi al quadrato)}$$

Norma

Indica la lunghezza di un vettore, quindi la distanza di un punto dall'origine:

$$\|\mathbf{v}\| := \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

Fare particolare attenzione al fatto che in casi avanzati potrebbe non valere il teorema di Pitagora generalizzato (cambiamento di prodotto scalare), usare sempre la definizione di norma.

Per indicare la distanza tra punti o vettori:

$$d(v, w) := \|v - w\|$$

Ortogonalità

Due vettori sono ortogonali se il prodotto scalare è uguale a 0:

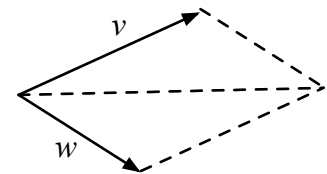
$$\langle v, w \rangle = 0$$

Ortogonale, perpendicolare e normale sono tre modi equivalenti di definire la stessa cosa.

Teorema

Siano $v, w \in \mathbb{R}^n$, allora soddisfano la uguaglianza se e solo se formano un rettangolo, quindi sono ortogonali.

$$\|v\|^2 + \|w\|^2 = \|v + w\|^2 \Leftrightarrow v, w \text{ sono ortogonali}$$



Dimostrazione

Siano date le ipotesi:

$$v = (x_1, x_2, x_3)$$

$$w = (y_1, y_2, y_3)$$

$$v + w = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$$

$$\|v + w\|^2 = (v + w) \cdot (v + w) = (x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2 + (x_3 + y_3)^2$$

Svolgendo e raccogliendo:

$$\underbrace{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)}_{\|v\|^2} + \underbrace{(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)}_{\|w\|^2} + 2 \underbrace{(x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3)}_{v \cdot w}$$

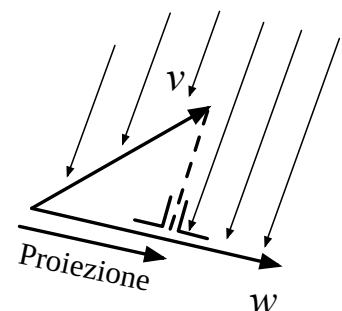
Risulta esattamente la espansione del quadrato $\|v + w\|^2$. Quindi se il doppio prodotto è nullo (ortogonali perché il prodotto scalare è uguale a zero), allora l'uguaglianza $\|v\|^2 + \|w\|^2 = \|v + w\|^2$ viene verificata, e il teorema è dimostrato.

Proiezione ortogonale

La proiezione ortogonale di un vettore su un altro si indica:

$$pr_w v := \frac{\langle v, w \rangle}{\|w\|^2} w = \frac{\langle v, w \rangle}{\langle w, w \rangle} w$$

Non fa altro che scomporre un vettore producendo il componente parallelo all'altro.



Insiemi di vettori ortogonali

Si definisce $S^\perp$ come l'insieme dei vettori ortogonali ad un dato vettore S .

$$S^\perp = \{x \in \mathbb{R}^3 : x \cdot v = 0 \forall v \in S\}$$

Esempio

Dato un vettore $S = \{5, 2, 4\}$, l'insieme $S^\perp$ è dato:

$$S^\perp = \{x = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \cdot (5, 2, 4) = 0\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R}^3 : 5x + 2y + 4z = 0\}$$

Viene definita una equazione, e se i valori di un vettore sostituiti a x, y, z verificano la condizione che la intera equazione è uguale a 0, allora il vettore appartiene all'insieme. Se i vettori fossero due, allora si mettono a sistema in modo che devono essere soddisfatte entrambe le condizioni:

$$\begin{cases} ax + by + cz = 0 \\ dx + ey + fz = 0 \end{cases}$$

Vettori paralleli

Due vettori v e w sono paralleli se $v = kw$.

Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

Presi due vettori, $v, w \in \mathbb{R}^3$:

$$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \|w\|$$

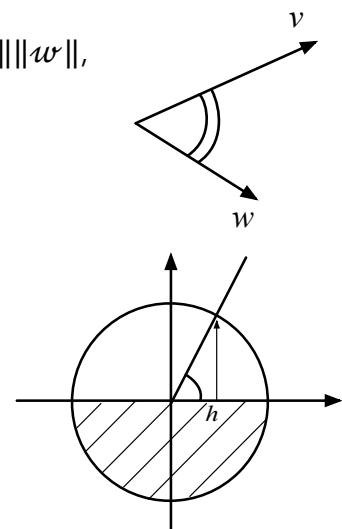
Fare attenzione a distinguere il modulo $|\dots|$ dalla norma $\|\dots\|$. La disuguaglianza si può anche scrivere espandendo il valore assoluto:

$$-\|v\| \|w\| \leq \langle v, w \rangle \leq \|v\| \|w\|$$

Scegliendo due vettori non nulli $\neq 0$, dividendo per $\|v\| \|w\|$, si ottiene che il valore al centro è compreso tra -1 e 1 :

$$-1 \leq \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|} \leq 1$$

Da cui segue la definizione di angolo. Quindi preso un qualsiasi numero h tale che $-1 \leq h \leq 1$, esiste sempre un solo angolo ϑ compreso tra 0 e π (radianti) definito da h tale che $h = \cos \vartheta$. Graficamente si interpreta come segue (nota, come angolo tra vettori si prende sempre quello più piccolo, quindi non esiste un angolo ottuso in questo caso).



Disuguaglianza triangolare

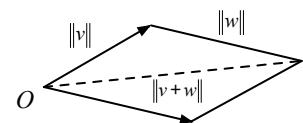
Il terzo lato è sempre minore o uguale della somma degli altri.

$$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$$

Angolo

Definizione (coseno)

Definiti due vettori v, w non nulli si definisce il **coseno** dell'angolo $\widehat{vw} = \text{ang}(v, w)$ come il numero ϑ tale che $0 < \vartheta < \pi$ tale che $\cos \vartheta = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|} \in \mathbb{R}$



Si definisce quindi il prodotto scalare come:

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = \|\boldsymbol{v}\| \|\boldsymbol{w}\| \cdot \cos \vartheta$$

Prodotto vettoriale

È il prodotto che dà un vettore. Siano $\boldsymbol{v} = (x_1, x_2, x_3)$ e $\boldsymbol{w} = (y_1, y_2, y_3)$, il prodotto vettoriale è definito come segue:

$$\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w} = (x_2 y_3 - x_3 y_2, -x_1 y_3 + x_3 y_1, x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

Risulta più facile da ricordare utilizzando le matrici:

$$\begin{pmatrix} I & II & III \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}$$

Si toglie la prima colonna e si esegue il **prodotto in croce** di quello che resta, poi si prende la seconda con il segno opposto, poi la terza.

Osservazioni

$$\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w} \perp \boldsymbol{v}$$

$$\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w} \perp \boldsymbol{w}$$

$$\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w} = -\boldsymbol{w} \times \boldsymbol{v}$$

$$\|\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}\| = \|\boldsymbol{w}\| \|\boldsymbol{v}\| \cdot \sin \vartheta$$

$$\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w} = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{v} = k\boldsymbol{w} \text{ (sottendono un piano inesistente)}$$

Dimostrazione

$$\text{Dimostrare che } \|\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}\| = \|\boldsymbol{v}\| \|\boldsymbol{w}\| \cdot \sin \vartheta$$

Nota: $\|\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}\|$ rappresenta l'area del parallelogramma formato dai due vettori.

Considerando la definizione di angolo, quindi limitandolo a $0 \leq \vartheta \leq \pi$, si ha che il seno è sempre positivo, possiamo quindi elevare entrambi i termini al quadrato senza perdere informazioni.

$$\|\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}\|^2 = \|\boldsymbol{v}\|^2 \|\boldsymbol{w}\|^2 \cdot \sin^2 \vartheta$$

$$\text{Sapendo che } \sin^2 \vartheta = 1 - \cos^2 \vartheta:$$

$$\|\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}\|^2 = \|\boldsymbol{v}\|^2 \|\boldsymbol{w}\|^2 \cdot (1 - \cos^2 \vartheta)$$

Sviluppando:

$$\|\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}\|^2 = \|\boldsymbol{v}\|^2 \|\boldsymbol{w}\|^2 - \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle^2$$

Sviluppando i componenti (x_1, x_2, x_3) , si verifica che le due parti sono uguali.

Rette

Rappresentare una retta nello spazio in modo matematicamente corretto e univoco non è semplice, la equazione non è l'oggetto, e la rappresentazione per vettori (pur essendo valida per l'ambito corrente) risulta imperfetta, dato che ci sono più vettori che possono rappresentare la stessa retta.

Definizione (retta)

Una retta è uno sottospazio affine di dimensione 1.

Definizione (retta)

Più comodamente per questo contesto, una retta si può definire come la traiettoria di un punto che si muove nella stessa direzione con lo stesso verso. Si crea quindi la equazione parametrica:

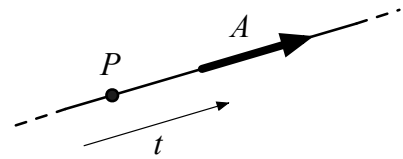
$$x = P + tA$$

x : Posizione del punto mentre si muove

P : Il punto che si muove

t : Il parametro (tempo)

A : Vettore che indica la direzione



Retta passante per due punti

$$X: P + t(P - R)$$

Esempio

$$P(1, 1, -1), Q(2, 1, 0)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 - 2 \\ 1 - 1 \\ -1 - 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 \\ z = -1 - t \end{cases}$$

Equazione cartesiana

Si vuole passare dalla equazione parametrica (punto che si muove in una direzione) alla forma cartesiana (intersezione di piani), si procede in questo modo:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = p_x + ta_x \\ y = p_y + ta_y \\ z = p_z + ta_z \end{cases}$$

Sostituendo il parametro t da una equazione alle altre due si ricavano due equazioni con tre incognite, che quindi messe a sistema generano una retta:

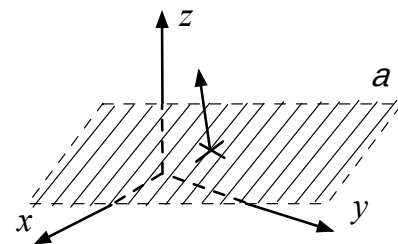
$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

Piani

Definizione (piano)

Un piano è un insieme di rette perpendicolari ad una retta data detta **normale al piano**, o meglio l'insieme di **vettori** ortogonali alla normale.

Le normali ad un piano sono infinite, si possono concettualizzare come tutti i vettori paralleli a quello trovato dalla equazione del piano.



Il piano è un $S^\perp$, e i piani solitamente si indicano con le lettere greche minuscole.

Un piano α_0 **passante per l'origine** è definito dalla normale $n = (a, b, c) \neq 0$. L'equazione cartesiana è data da:

$$\alpha_0 = \{x \in \mathbb{R}^3 : x \cdot n = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^3 : ax + by + cz = 0\}$$

Da notare come funziona: viene definita la equazione che deve essere uguale a zero, ma dalla forma risulta il prodotto scalare tra due vettori, uno definito (a, b, c) , l'altro no (x, y, z) , e questo prodotto scalare deve essere uguale a zero, quindi i due devono essere ortogonali! Un vettore viene dato, e deve essere ortogonale ai vettori che compongono il piano, è quindi la normale al piano (una delle tante normali).

Per definire un piano passante per un punto P e con normale n basta traslare il piano per farlo passare per l'origine:

$$\alpha: \{x = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x - P) \cdot n = 0\}$$

Quindi un piano **non passante per l'origine**, in forma estesa, presenterà in più il termine d :

$$ax + by + cz + d = 0$$

Piano passante per tre punti

Si prende l'equazione generica e si sostituiscono le coordinate dei punti. Poi si mette tutto a sistema:

$$\begin{matrix} P \in \alpha \\ Q \in \alpha \\ R \in \alpha \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} ax + by \dots \\ \dots \\ \dots \end{matrix} \right.$$

Posizioni

Si possono determinare le posizioni reciproche tra due rette, una retta e un piano e due piani (oltre ai punti).

Definizione (retta passante per un punto)

Si dice che una retta r passa per un punto Q se $Q \in r$, ovvero se esiste un valore del parametro t_0 tale che $Q = P + t_0 A$.

Esempio

$$r: (0, -1, -2) + t(0, 1, 1)$$

$$Q: (0, -2, -4)$$

Bisogna vedere se esiste un t_0 tale che la equazione risulti $Q = P + t_0 A$:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Mettendo a sistema:

$$\begin{cases} 0 = 0 + 0t \\ -2 = -1 + t \\ -4 = -2 + t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = -2 \end{cases} \rightarrow \emptyset$$

Non ha soluzioni, quindi la retta non passa per il punto.

Definizione (piano passante per un punto)

Si dice che il piano $\alpha: ax + by + cz + d = 0$ passa per il punto Q se $Q \in \alpha$, quindi se le coordinate di Q soddisfano l'equazione del piano.

Basta semplicemente sostituire le coordinate nella equazione del piano e vedere se ha senso.

Definizione (retta passante per due punti)

Dati due punti, per trovare la unica retta che passa per i due:

$$P + t(Q - P)$$

In pratica si trasla il vettore PQ per farlo passare per l'origine, trovando la direzione, e si fa passare per P .

Definizione (rette parallele)

Due rette $r: X = P + tA$ e $r': X' + tA$ sono parallele se hanno la stessa direzione, quindi $A' = kA$ (possono essere di lunghezza diversa pur avendo la stessa direzione).

Se le rette inoltre hanno un punto in comune, allora sono **coincidenti**.

Definizione (rette incidenti)

Due rette sono incidenti se si incontrano esattamente in un punto.

$$r \cap r' = \{Q\}$$

Definizione (piani paralleli)

Due piani $\alpha: ax + by + cz + d = 0$ e $\alpha': a'x + b'y + c'z + d' = 0$ sono paralleli se $n' = kn$ (normali).

Se inoltre $d' = d$, allora sono **coincidenti**.

Definizione (retta parallela ad un piano)

Una retta $r: X = P + tA$ e un piano $\alpha: ax + by + cz + d = 0$ sono paralleli se e solo se $A \perp n$.

Se inoltre r ha un punto in comune con α , allora si dice che r giace su α .

Definizione (retta incidente ad un piano)

Una retta è incidente ad un piano se $\alpha \cap r = \{Q\}$, quindi se la retta "buca" il piano in un punto. Inoltre può verificarsi che la retta sia perpendicolare al piano, quindi $\alpha \perp r$ se $n = kr$.

Definizione (piani incidenti)

Si dice che due piani sono incidenti se non sono paralleli, in tal caso $\alpha \cap \beta$ è una retta definita dalle due equazioni in un sistema.

Esempio

$$\begin{cases} 2x + 3z = 5 \\ y - 8z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}z \\ y = 8z \end{cases}$$

Si inserisce il parametro t :

$$\begin{cases} 2x + 3z = 5 \\ y - 8z = 0 \\ z = t \end{cases}$$

Si può scrivere come vettore:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Due piani incidenti inoltre possono essere **ortogonali** se $n' \perp n$.

Superfici quadratiche

Vengono descritte delle superfici (non necessariamente piani) tramite coordinate cartesiane.

I piani sono un tipo particolare di superficie:

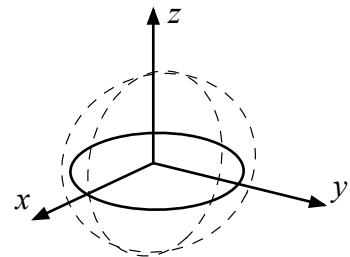
$$ax + by + cz + d = 0 \quad n \neq 0$$

Se la funzione polinomiale che descrive la superficie è di secondo grado, si dice quadratica.

Esempio

$$3x^2 + 8y^2 - 2xy + 7z^2 + yz - 3xz + 2y + 3z + 5 = 0$$

Si può tentare di capire il tipo di superficie dalla equazione annullando alcuni termini, quindi effettivamente trovando sezioni della figura tridimensionale intersecandola con diversi piani perpendicolari agli assi.



Spazio $\mathbb{R}^n$

Detto spazio n -dimensionale (o iperspazio), ha un numero arbitrario di dimensioni. Fissato $n \geq 1$, si possono considerare file ordinate formate da n numeri chiamate **n-uple**.

$$P: (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

Il vettore nullo è definito:

$$0 = (0, 0, \dots, 0)$$

Si definiscono operazioni simili a quelle in $\mathbb{R}^3$.