

Esercizi

Esercizio 1:

Scrivere l'equazione parametrica di una ellisse con semiassi $(a,b)=(4,2)$ centrata nell'origine e che giace sul piano $z=0$ che viene traslata portando il suo centro nel punto di coordinate $C(5,3,-2)$.

Soluzione:

L'equazione parametrica dell'ellisse centrata nell'origine è:

$$\begin{cases} x = 4 \cos \theta \\ y = 2 \sin \theta \\ z = 0 \end{cases}$$

Applicando la traslazione in coordinate omogenee si ottiene:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \cos \theta \\ 2 \sin \theta \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 + 4 \cos \theta \\ 3 + 2 \sin \theta \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Quindi l'equazione parametrica dell'ellisse traslata è:

$$\begin{cases} x = 5 + 4 \cos \theta \\ y = 3 + 2 \sin \theta \\ z = -2 \end{cases}$$

Esercizio 2:

Creare la matrice di trasformazione 3D che rappresenta una rotazione di $\theta=30^\circ$ rispetto all'asse y e verificare il risultato di questa trasformazione applicato al punto P di coordinate (1,0,0)

Soluzione:

La matrice che cerchiamo è

$$T = \begin{bmatrix} \cos(30^\circ) & 0 & \sin(30^\circ) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(30^\circ) & 0 & \cos(30^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Applicando la matrice T al punto P in coordinate omogenee si ottengono le coordinate omogenee del punto trasformato

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Esercizio 3:

Creare la matrice di trasformazione 3D che rappresenta una rotazione di $\theta=45^\circ$ rispetto all'asse x seguita da una traslazione di (30,40,0)

Soluzione:

La matrice che cerchiamo si scrive come $M=TR$ dove T rappresenta la traslazione e R la rotazione

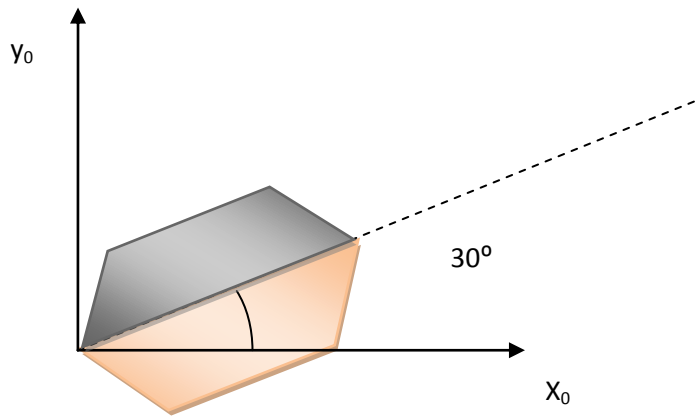
$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 30 \\ 0 & 1 & 0 & 40 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M = TR = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 30 \\ 0 & 1 & 0 & 40 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 30 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 40 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Esercizio 4:

Creare la matrice di trasformazione 2D che rappresenta una riflessione rispetto ad un asse ruotato di $\theta=30^\circ$ rispetto all'asse x



Soluzione:

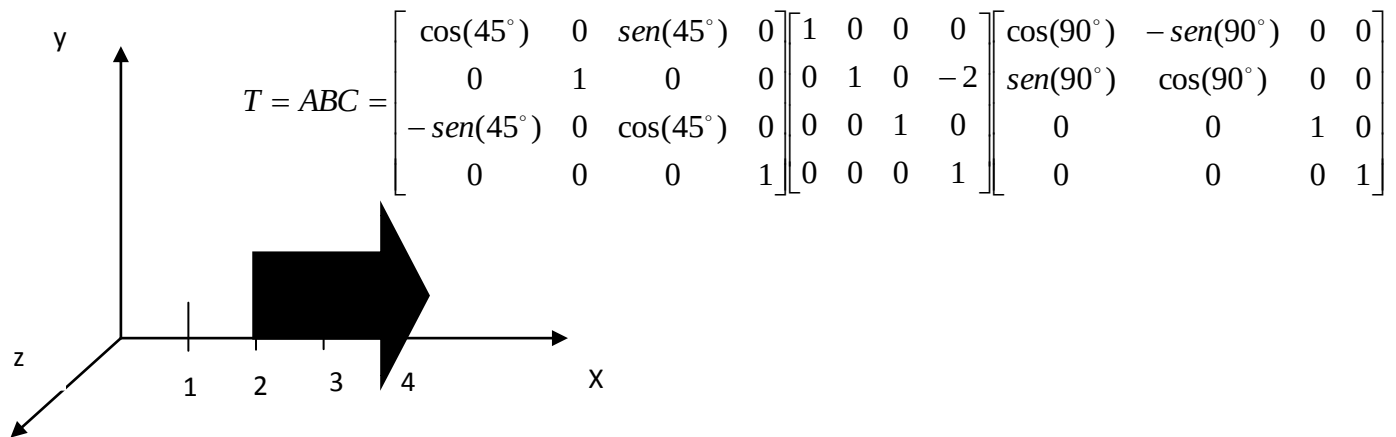


La matrice che cerchiamo si scrive come $M=R^{-1}SR$ dove R rappresenta una matrice di rotazione di $\theta=-30^\circ$ che serve per portare l'asse allineato con l'asse x del sistema di riferimento globale. S rappresenta una matrice di riflessione rispetto all'asse x.

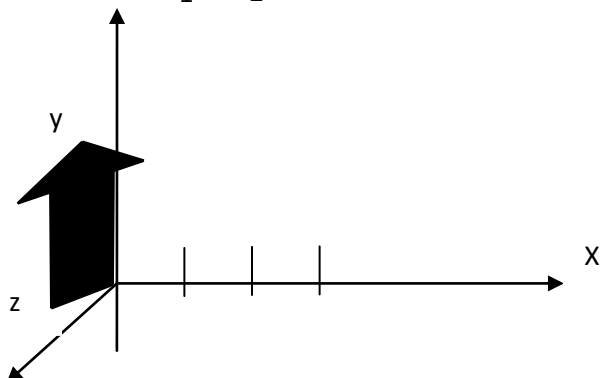
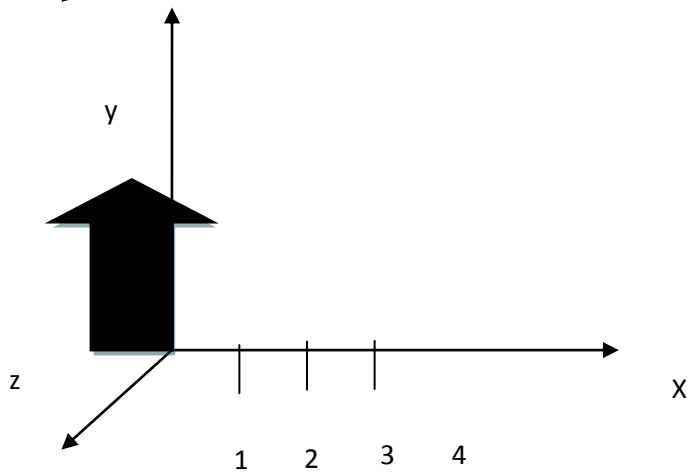
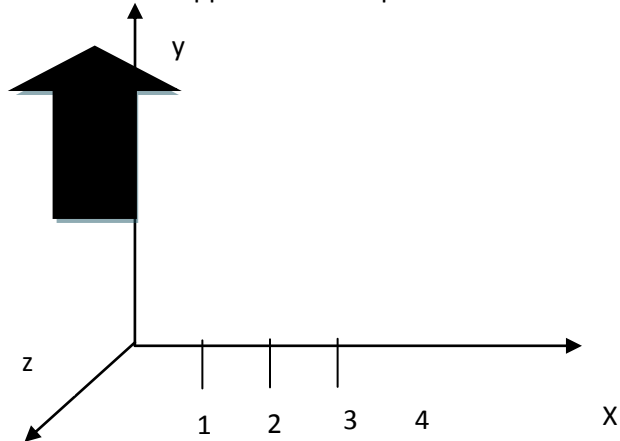
$$R^{-1}SR = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Esercizio 5:

Dato il poligono in figura disegnare il risultato della trasformazione composta $T=ABC$ applicata ad esso

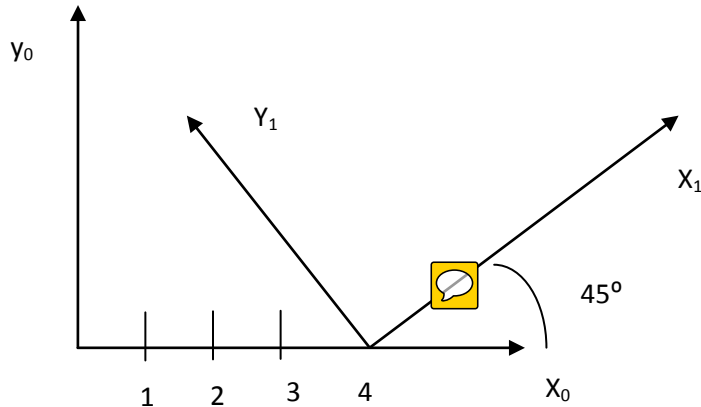


Soluzione: Applicando in sequenza le tre trasformazioni C, B, A si ottiene



Esercizio 6:

Dati due sistemi di riferimento O_0 e O_1 rappresentati in figura



Scrivere la matrice di trasformazione di coordinate dal sistema di riferimento O_1 al sistema O_0 e calcolare le coordinate 0p nel sistema O_0 del punto ${}^1p=[1,0,0,1]^T$ nel sistema O_1

Soluzione:

La matrice che cerchiamo si scrive come composizione di una rotazione di $\theta=45^\circ$ rispetto all'asse z_0 (che esce dal piano del foglio) e di una traslazione di 4 lungo x_0

$${}^0_1M = TR = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 & 4 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Le coordinate del punto ${}^1p=[1,0,0,1]^T$ nel sistema di riferimento O_0 si calcolano come

$${}^0p = {}^0_1M {}^1p = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 & 4 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 + 4 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Esercizio 7:

Dato il centro di proiezione $F=[2,1,0]^T$ e il piano di proiezione di equazione $y=4$, scrivere l'espressione della matrice di proiezione 4×4 corrispondente.

Soluzione:

Si scrive l'espressione in forma parametrica della retta passante per il centro di proiezione e per il punto generico $= [x,y,z]^T$

$$x' = 2 + (x - 2)t$$

$$y' = 1 + (y - 1)t$$

$$z' = zt$$

Si pone $y'=4$ e si risolve per t , si ottiene $t = \frac{3}{y-1}$

Sostituendo nelle espressioni di x' e z' si ottiene

$$x' = \frac{3x + 2y - 8}{y - 1}$$

$$z' = \frac{3z}{y - 1}$$

$(y-1)$ è il termine di divisione prospettica che determina la quarta riga della matrice di proiezione, la matrice che cerchiamo è

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & -8 \\ 0 & 4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

i coefficienti della seconda riga (a,b,c,d) si ottengono dall'espressione

$$4W = 4(y - 1) = 0x + 4y + 0z - 4$$

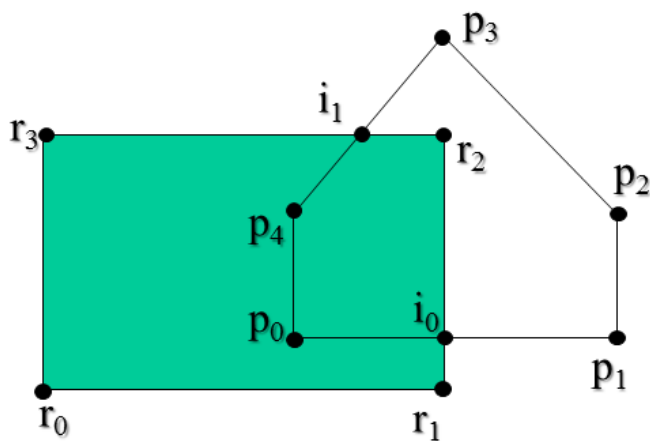
infatti

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & -8 \\ 0 & 4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x + 2y - 8 \\ 4(y - 1) \\ 3z \\ y - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3x + 2y - 8}{y - 1} \\ 4 \\ \frac{3z}{y - 1} \\ 1 \end{bmatrix}$$

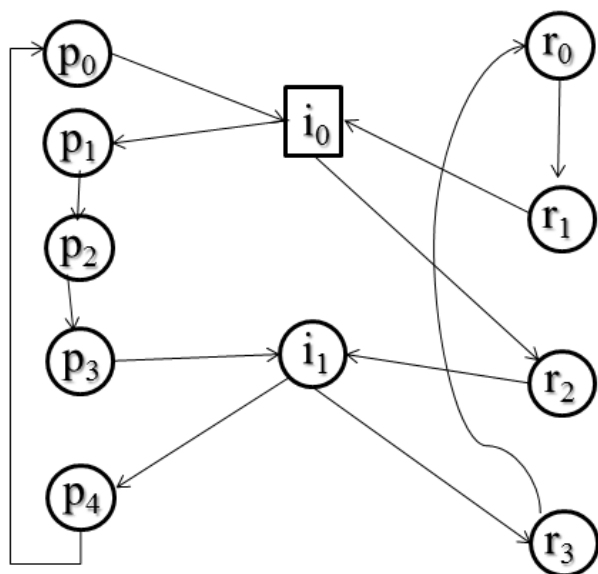
Esercizio 8:



La figura mostra una finestra rettangolare di clipping e un poligono. Disegnare il grafico di connessione dei vertici utilizzato dall'algoritmo di **Weiler-Atherton** per il clipping di poligoni.



Soluzione:



Esercizio 9:

Si consideri un vertice P (1,2,3) su un poligono con versore normale N(0,0,1), una luce posizionale posta in (4,5,5) e un osservatore posto in (1,2,6). Calcolare i versori L,V,R e l'intensità del colore nel punto P secondo il modello di Phong in assenza di luce emessa sapendo che i parametri del materiale sono $k_a=0.2, k_d=0.5, k_s=0.5, n=2$ e che le componenti di intensità della sorgente di luce sono $I_a=1, I_d=1, I_s=1$

Soluzione:

$$L = \frac{(4,5,5) - (1,2,3)}{\|(4,5,5) - (1,2,3)\|} = \frac{(3,3,2)}{\sqrt{22}}$$

$$V = \frac{(1,2,6) - (1,2,3)}{\|(1,2,6) - (1,2,3)\|} = \frac{(0,0,3)}{\sqrt{9}} = (0,0,1)$$

$$R = 2(N \cdot L)N - L = 2\left((0,0,1) \cdot \frac{(3,3,2)}{\sqrt{22}}\right)(0,0,1) - \frac{(3,3,2)}{\sqrt{22}} = \frac{(-3,-3,2)}{\sqrt{22}}$$

$$\begin{aligned} I &= I_a k_a + I_d k_d (N \cdot L) + I_s k_s (R \cdot V)^n = 0.2 + 0.5\left((0,0,1) \cdot \frac{(3,3,2)}{\sqrt{22}}\right) + 0.5\left(\frac{(-3,-3,2)}{\sqrt{22}} \cdot (0,0,1)\right)^2 = \\ &= 0.2 + \frac{1}{\sqrt{22}} + 0.5\left(\frac{2}{\sqrt{22}}\right)^2 = 0.2 + 0.213 + 0.09 = 0.504 \end{aligned}$$

Esercizio 10:

Dato il triangolo avente per vertici i punti A(4,6) B(2,1) e C(6,3) calcolare le coordinate baricentriche del punto $P_1(4, \frac{10}{3})$ che appartiene al triangolo.

Soluzione:

Le coordinate baricentriche (α, β, γ) di un punto $P(P_x, P_y)$ rispetto ai vertici del triangolo sono:

$$P = \alpha A + \beta B + \gamma C$$

con $\alpha + \beta + \gamma = 1$

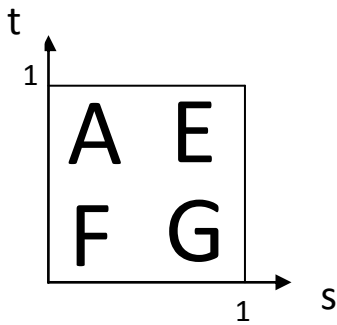
Pertanto si può scrivere il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} P_x = 4\alpha + 2\beta + 6\gamma \\ P_y = 6\alpha + \beta + 3\gamma \\ \alpha + \beta + \gamma = 1 \end{cases}$$

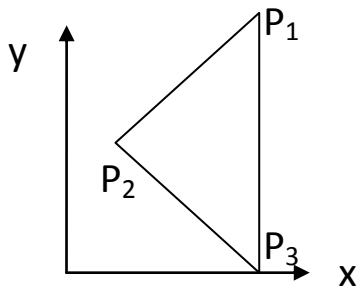
Che risolto fornisce le coordinate cercate $(\alpha, \beta, \gamma) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$

Esercizio 11:

La seguente texture che contiene le lettere "AEFG"



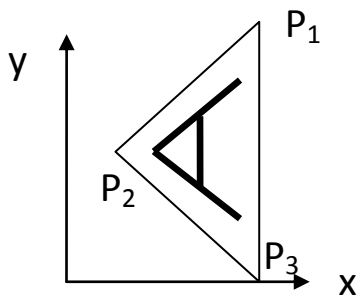
viene mappata sul triangolo di vertici $P_1 (40,60,0)$, $P_2 (10,30,0)$ $P_3 (40,0,0)$



mediante le seguenti relazioni $P_1 : (s,t) = (0.5,0.5)$ $P_2 : (s,t) = (0.25,1)$ $P_3 : (s,t) = (0,0.5)$

Disegnare qualitativamente come la texture viene mappata sopra il triangolo

Soluzione:



Esercizio 12:

Calcolare il vettore normale N alla superficie parametrica $Q(u, v) = (2u, 2v, -(2u-1)^2 - \frac{1}{2}(2v-1)^2)$
nel punto $P = (u, v) = (\frac{1}{2}, 0)$

Soluzione:

Il vettore N si calcola come $N = Q_u(u, v) \times Q_v(u, v)$ dove

$$Q_u = \frac{\partial Q}{\partial u}$$

$$Q_v = \frac{\partial Q}{\partial v}$$

Pertanto si ottiene

$$Q_u(u, v) = (2, 0, -4(2u-1))$$

$$Q_v(u, v) = (0, 2, -2(2v-1))$$

e quindi $Q_u(\frac{1}{2}, 0) = (2, 0, 0)$

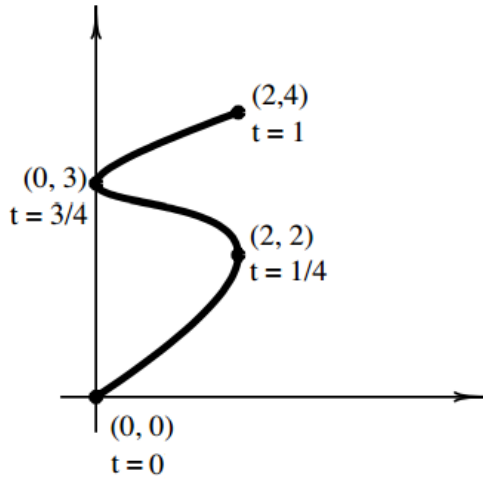
$$Q_v(\frac{1}{2}, 0) = (0, 2, 2)$$

Infine

$$N(\frac{1}{2}, 0) = (2, 0, 0) \times (0, 2, 2) = (0, -4, 4)$$

Esercizio 13:

Calcolare con il metodo dell'interpolazione di **Lagrange** l'equazione parametrica della curva polinomiale cubica in 2D che passa per i punti di coordinate (0,0) per $t=0$, (2,2) per $t=1/4$, (0,3) per $t=3/4$, (2,4) per $t=1$.



Soluzione:

stiamo cercando una curva parametrica (con parametro t) del tipo:
$$\begin{cases} x(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \\ y(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 \end{cases}$$

la soluzione consiste nel trovare i valori dei coefficienti (a_0, a_1, a_2, a_3) e (b_0, b_1, b_2, b_3)

Imponendo le condizioni di interpolazione fornite dal problema si ottengono due sistemi lineari:

$$\begin{cases} 0 = a_0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0^2 + a_3 \cdot 0^3 \\ 2 = a_0 + a_1 \left(\frac{1}{4}\right) + a_2 \left(\frac{1}{4}\right)^2 + a_3 \left(\frac{1}{4}\right)^3 \\ 0 = a_0 + a_1 \left(\frac{3}{4}\right) + a_2 \left(\frac{3}{4}\right)^2 + a_3 \left(\frac{3}{4}\right)^3 \\ 2 = a_0 + a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1^2 + a_3 \cdot 1^3 \end{cases}$$

che risolto fornisce il risultato $(a_0, a_1, a_2, a_3) = (0, 18, -48, 32)$

$$\begin{cases} 0 = b_0 + b_1 \cdot 0 + b_2 \cdot 0 + b_3 \cdot 0 \\ 2 = b_0 + b_1 \frac{1}{4} + b_2 \left(\frac{1}{4}\right)^2 + b_3 \left(\frac{1}{4}\right)^3 \\ 3 = b_0 + b_1 \frac{3}{4} + b_2 \left(\frac{3}{4}\right)^2 + b_3 \left(\frac{3}{4}\right)^3 \\ 4 = b_0 + b_1 + b_2 + b_3 \end{cases}$$

che risolto fornisce il risultato $(b_0, b_1, b_2, b_3) = (0, 12, -\frac{56}{3}, \frac{32}{3})$