

RICERCA OPERATIVA - PARTE I

ESERCIZIO 1. (9 punti) Sia data la rete $G = (V, A)$ con

$$V = \{S, 1, 2, 3, 4, D\}$$

e

$$A = \{(S, 1), (S, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 3), (2, 4), (3, 4), (3, D), (4, D)\}$$

con le capacità

$$c_{S1} = 8 \quad c_{S2} = 10 \quad c_{13} = 6 \quad c_{14} = 2 \quad c_{21} = 2 \quad c_{23} = 3 \quad c_{24} = 4 \quad c_{34} = 3 \quad c_{3D} = 10 \quad c_{4D} = 7.$$

Sia data la soluzione

$$x_{S1} = 6 \quad x_{S2} = 2 \quad x_{13} = 6 \quad x_{14} = 2 \quad x_{21} = 2 \quad x_{23} = 0 \quad x_{24} = 0 \quad x_{34} = 3 \quad x_{3D} = 3 \quad x_{4D} = 5.$$

Dopo aver mostrato che tale soluzione è un flusso ammissibile, si parta da essa per determinare il flusso massimo e il taglio minimo per questa rete. Può accadere che tra gli archi del taglio minimo ce ne sia uno non saturo nella soluzione ottima?

ESERCIZIO 2. (10 punti) Sia data una catena di Markov con i tre stati $\{0, 1, 2\}$ e la seguente matrice di probabilità di transizione:

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \end{bmatrix}$$

Si risponda alle seguenti domande:

- la catena di Markov è irriducibile?
- qual è il periodo di ciascuno dei tre stati?
- qual è la distribuzione di probabilità degli stati in condizioni stazionarie?
- qual è il tempo medio di ricorrenza per ciascuno dei tre stati?

Se modifico la matrice delle probabilità di transizione in questo modo

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{4} + x & \frac{1}{4} - x \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} - x & \frac{3}{4} + x & 0 \end{bmatrix}$$

per quale valore di x la probabilità in condizioni stazionarie dello stato 1 è $\frac{7}{4}$ della probabilità in condizioni stazionarie dello stato 0?

ESERCIZIO 3. (6 punti) Si dimostri la correttezza dell'algoritmo greedy per il calcolo dell'albero di supporto a peso minimo.

ESERCIZIO 4. (5 punti) Si illustri la procedura vista a lezione per la pianificazione di progetti in modo da minimizzare la durata di tali progetti. Si spieghi il significato dei valori calcolati durante l'esecuzione della procedura e come questi vengano utilizzati per individuare le attività critiche del progetto.