

**ALCUNI ESERCIZI SUL FLUSSO DI COSTO MINIMO IN  
PRESENZA DI CAPACITÀ SUGLI ARCHI.**

CORSO DI RICERCA OPERATIVA II

**ESERCIZIO 1.** Per ognuno dei grafi di Figura 1, per i quali sono specificati sia costi ( $c_{ij}$ ) che capacità ( $d_{ij}$ ), determinare una soluzione ottima per il problema di flusso di costo minimo, partendo dalle rispettive basi iniziali.

- (a)  $B_0 = \{(1, 3), (1, 4), (3, 6), (4, 6), (5, 6)\}$ ,  $N_1^0 = \{(1, 3), (2, 5), (3, 2)\}$ .
- (b)  $B_0 = \{(1, 2), (1, 4), (2, 3), (3, 5), (5, 6)\}$ ,  $N_1^0 = \{(2, 5), (4, 6)\}$ .
- (c)  $B_0 = \{(1, 2), (2, 3), (2, 5), (3, 4), (4, 6), (6, 7)\}$ ,  $N_1^0 = \{(1, 3), (3, 6)\}$ .

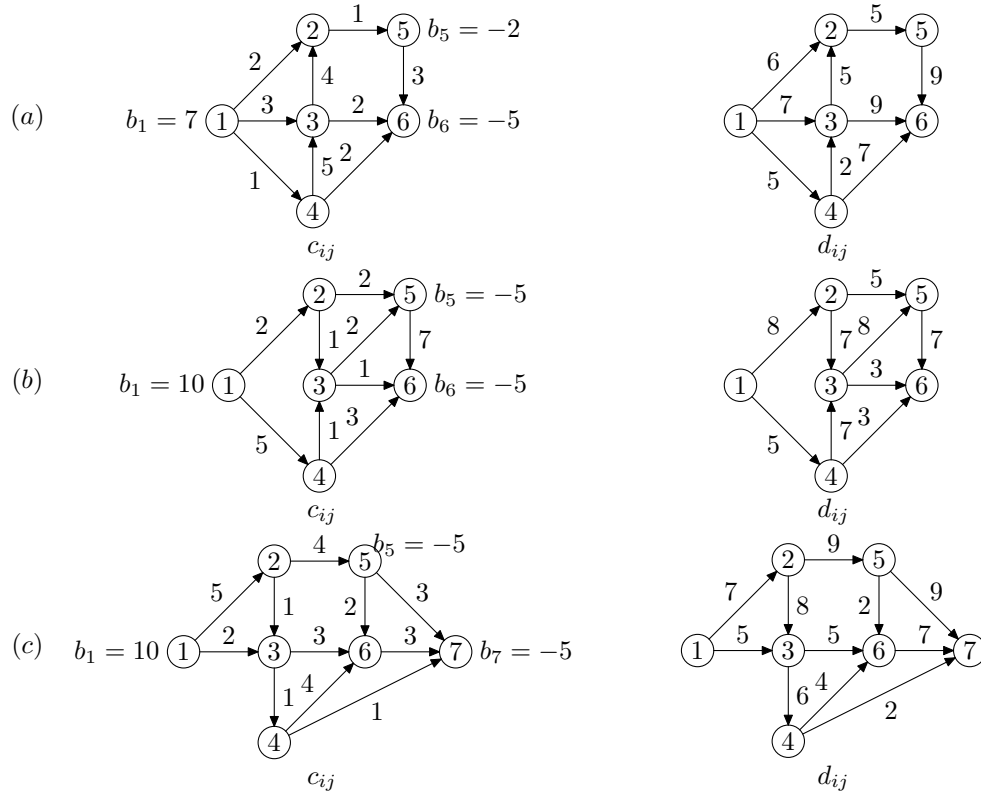
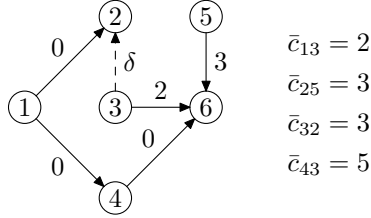


FIGURA 1. Reti di flusso con costi ( $c_{ij}$ ) e capacità ( $d_{ij}$ ).

1. (a) Dati  $B = \{(1, 3), (1, 4), (3, 6), (4, 6), (5, 6)\}$  e  $N_1 = \{(1, 3), (2, 5), (3, 2)\}$ , per determinare i flussi  $x_{ij}$  si impostano i vincoli di conservazione del flusso, con  $x_{ij} = 0$  se  $(i, j) \notin B \cup N_1$ ,  $x_{ij} = d_{ij}$  se  $(i, j) \in N_1$ . Risulta quindi (si noti che l'ultima equazione è ridondante) quanto segue.

$$\begin{array}{llll}
 \text{(Nodo 1)} & x_{12} + 7 + x_{14} = 7 & x_{12} = 0 \\
 \text{(Nodo 2)} & -x_{12} - 5 + 5 = 0 & x_{14} = 0 & x_{13} = 7 \\
 \text{(Nodo 3)} & -7 + x_{36} + 5 = 0 & \implies x_{36} = 2 & x_{25} = 5 \\
 \text{(Nodo 4)} & x_{46} - x_{14} = 0 & x_{46} = 0 & x_{32} = 5 \\
 \text{(Nodo 5)} & x_{56} - 5 = -2 & x_{56} = 3 \\
 \text{(Nodo 6)} & -x_{36} - x_{46} - x_{56} = -5
 \end{array}$$

Valutando i costi ridotti si ottiene



Le condizioni di ottimalità sono violate dagli archi

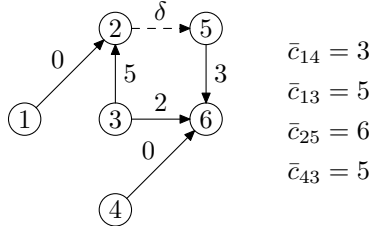
- $(1, 3)$ , perché  $(1, 3) \in N_1$  e  $\bar{c}_{13} > 0$ ,  
 $(2, 5)$ , perché  $(2, 5) \in N_1$  e  $\bar{c}_{25} > 0$ ,  
 $(3, 2)$ , perché  $(3, 2) \in N_1$  e  $\bar{c}_{32} > 0$ .

L'arco  $(3, 2)$  è quindi idoneo ad entrare in base; esso individua il ciclo  $\{(3, 2), (1, 2), (1, 4), (4, 6), (3, 6)\}$ . L'ammontare della variazione di flusso sugli archi del ciclo è data da

$$\begin{aligned}
 \delta &= \min\{x_{32}, d_{12} - x_{12}, x_{14}, x_{46}, d_{36} - x_{36}\} \\
 &= \min\{5, 6, 0, 0, 7\} = 0.
 \end{aligned}$$

Gli archi candidati a lasciare la base sono  $(1, 4)$  e  $(4, 6)$ ; arbitrariamente, si è scelto  $B_1 = B_0 + (3, 2) - (1, 4)$ . Si passa quindi alla nuova soluzione di base degenera

$$\begin{aligned}
 B_1 &= \{(1, 2), (3, 2), (3, 6), (4, 6), (5, 6)\}, \\
 N_1^1 &= \{(1, 3), (2, 5)\}.
 \end{aligned}$$



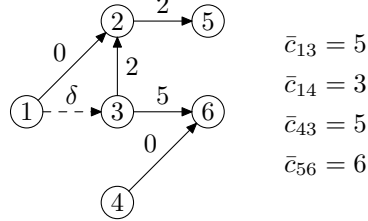
L'arco  $(2, 5) \in N_1^1$  viola le condizioni di ottimalità ( $x_{25} = d_{25}$ ,  $\bar{c}_{25} > 0$ ), e può quindi entrare in base. Esso induce il ciclo  $\{(2, 5), (5, 6), (3, 6), (3, 2)\}$ , con

$$\begin{aligned}
 \delta &= \min\{x_{25}, x_{56}, d_{36} - x_{36}, x_{32}\} \\
 &= \min\{5, 3, 7, 5\} = 3.
 \end{aligned}$$

Si ottiene quindi

$$B_2 = B_1 - (3, 6) + (2, 5) = \{(1, 2), (2, 5), (3, 2), (3, 6), (4, 6)\}$$

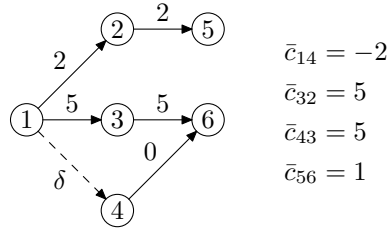
$$N_1^2 = \{(1, 3)\}.$$



Entra quindi in base l'arco  $(1, 3)$  mentre esce  $(2, 3)$  ( $\delta = 2$ ).

$$B_3 = \{(1, 2), (1, 3), (2, 5), (3, 6), (4, 6)\}$$

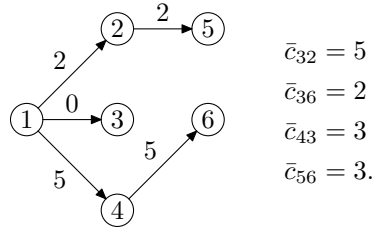
$$N_1^3 = \emptyset$$



Infine si ottiene, con  $\delta = 5$ ,

$$B_4 = B_3 + (1, 4) - (3, 6) = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 5), (4, 6)\}$$

$$N_1^4 = \emptyset.$$

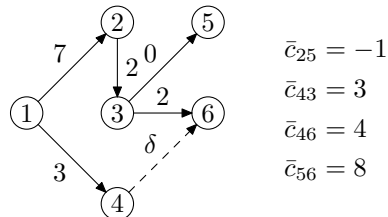


La soluzione risulta ottima, poiché tutte le condizioni di ottimalità sono rispettate.

(b) Valutando i costi ridotti rispetto alla base  $B_0$  si ottiene quanto segue.

$$B_0 = \{(1, 2), (1, 4), (2, 3), (3, 5), (3, 6)\},$$

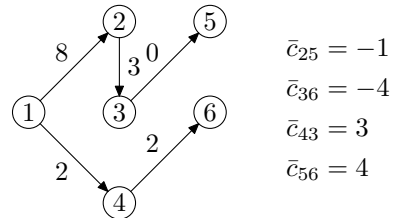
$$N_1^0 = \{(2, 5), (4, 6)\}$$



L'arco saturo  $(4, 6)$  viola le condizioni di ottimalità, e può quindi entrare in base.

$$B_1 = B_0 + (4, 6) - (3, 6) = \{(1, 2), (1, 4), (2, 3), (3, 5), (4, 6)\}$$

$$N_1^1 = \{(2, 5), (3, 6)\}$$



La nuova soluzione rispetta le condizioni di ottimalità.

(c) Base ottima  $B^* = \{(1, 2), (1, 3), (2, 5), (3, 4), (3, 6), (6, 7)\}$ ,  $N_1^* = \{(4, 7)\}$ .